МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

Допущено Министерством образования
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по аграрно-техническим специальностям

В трех частях

Часть 1

Механика. Молекулярная физика.
Термодинамика

Минск
БГАТУ
2016

УДК 53(07)
ББК 22.3я7
Ф57

Авторы:
кандидат физико-математических наук *В. К. Долгий*,
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Т. Неманова,*
кандидат физико-математических наук, доцент *Е. П. Чеченина*,
кандидат физико-математических наук, доцент *В. А. Чернявский*

Рецензенты:
кафедра лазерной физики и спектрографии БГУ (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *Е. С. Воропай*);
доцент кафедры физики БГУИР, кандидат физико-математических наук, доцент *А. В. Березин*

Физика. Лабораторный практикум : учебное пособие. В 3 ч.
Ф57 Ч. 1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика / В. К. Долгий [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2016. – 164 с.
ISBN 978-985-519-812-4.

Учебное пособие включает теоретический раздел, содержащий основные сведения по обработке результатов и оценке погрешностей измерений, а также лабораторные работы по механике, молекулярной физике и термодинамике. Каждая работа содержит теоретическое введение, описание лабораторной установки и хода выполнения лабораторной работы, а также вопросы для самоконтроля.

Предназначено для студентов учреждений высшего образования по аграрно-техническим специальностям.

УДК 53(07)
ББК 22.3я7

ISBN 978-985-519-812-4 (ч. 1)
ISBN 978-985-519-811-7

© БГАТУ, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение..... 5

Требования к выполнению лабораторных работ..... 6

Основные сведения по обработке результатов
и оценке погрешностей измерений..... 10

Физические основы механики..... 25
Лабораторная работа 1.1
Изучение кинематических величин и связи между ними при поступательном и вращательном движениях твердого тела..... 25
Лабораторная работа 1.2
Определение коэффициента трения скольжения при движении по горизонтальной поверхности 38
Лабораторная работа 1.3
Изучение динамики вращательного движения твердого тела... 49
Задание 1. Определение момента инерции твердого тела..... 55
Задание 2. Изучение основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела..... 62
Лабораторная работа 1.4
Изучение колебаний физического и математического маятников..... 69
Задание 1. Определение характеристик свободных колебаний физического маятника..... 74
Задание 2. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника..... 79
Лабораторная работа 1.5
Изучение законов сохранения импульса и энергии при упругом ударе..... 85
Лабораторная работа 1.6
Изучение упругих свойств твердых тел..... 97
Задание 1. Определение модуля Юнга методом изгиба ... 103
Задание 2. Определение модуля сдвига с помощью пружинного маятника..... 109

Задание 3. Определение модуля сдвига методом растяжения пружины 112

Основы молекулярной физики и термодинамики..... 115
Лабораторная работа 2.1
Изучение законов идеального газа 115
Задание 1. Определение показателя адиабаты газа методом Клемана – Дезорма..... 122
Задание 2. Определение универсальной газовой постоянной.. 127
Лабораторная работа 2.2
Определение наиболее вероятной скорости электронного газа . 131
Лабораторная работа 2.3
Определение коэффициента динамической вязкости 143
Задание 1. Измерение коэффициента динамической вязкости воздуха..... 148
Задание 2. Измерение коэффициента динамической вязкости жидкости методом Стокса..... 153

Справочные таблицы……. 158

Список рекомендуемой литературы 160

ВВЕДЕНИЕ

Физика – наука экспериментальная. Эксперимент, т.е. наблюдение исследуемого явления в точно контролируемых условиях, – один из основных методов исследования в физике.

Одна из важнейших задач курса «Физика» как учебной дисциплины состоит в формировании у студентов целостного представления об окружающем мире. Совершенно очевидно, что быстро ориентироваться и успешно работать в современном мире могут только те выпускники вузов, которые в процессе обучения получили достаточно широкую и глубокую фундаментальную подготовку, а также навыки самостоятельной исследовательской работы. Одна из основных задач состоит в овладении методами экспериментального исследования физических процессов и явлений. Для решения этой задачи существует лабораторный практикум, главная цель которого – дать студентам возможность приобрести навыки в проведении эксперимента, обработке результатов и их анализе, а также служить фундаментом для активного и со знанием дела творческого участия в производственной деятельности.

Данное учебное издание состоит из трех частей, содержание которых охватывает все основные разделы курса «Физика»: Часть 1. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика; Часть 2. Электростатика. Постоянный электрический ток. Электромагнетизм; Часть 3. Волновая и квантовая оптика. Каждая из трех частей представляет собой цикл лабораторных работ, тематика которых полностью соответствует программе курса общей физики и модульной системе обучения. Каждая лабораторная работа состоит из теоретического введения (или общих положений теоретического плана), описания экспериментальной установки, порядка выполнения работы (измерений и их обработка), а также вопросов для самоконтроля степени усвоения материала. Каждая лабораторная работа рассчитана на два академических часа (допуск, выполнение и защита предыдущей работы). Поэтому выполнению работы должна предшествовать предварительная самоподготовка с использованием конспекта лекций, методического пособия и учебника, которая заключается в освоении теоретического материала, знакомства с описанием установки и подготовки отчета.

Выполнение лабораторных работ поможет лучше усвоить изучаемый материал, приобрести навыки работы с оборудованием, научиться формулировать цели работы и делать выводы на основе полученных результатов.

ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Допуск к лабораторной работе

Перед выполнением лабораторной работы студент должен получить у преподавателя допуск для выполнения работы. Для того чтобы получить допуск к лабораторной работе студент должен:

– заранее оформить конспект данной лабораторной работы;

– ответить на вопросы преподавателя по теории, методике измерений, устройству установки и методике обработки результатов.

При получении студентом допуска к выполнению работы, преподаватель ставит свою подпись в конспекте студента (графа «ДОПУСК» в таблице на обложке).

Оформление конспекта для допуска к лабораторной работе

Конспект для допуска и выполнения лабораторных работ готовится заранее на двойных листах из тетради в клетку (1 – 5 двойных листов в зависимости от почерка).

Первая страница (обложка)

БГАТУ

кафедра физики

Лабораторная работа №

Название:

Выполнил:
студент __ курса ___группы

_____
(ф.и.о.)

	Допуск	*Измерения*	*Зачет*
Подпись, дата			

Минск 20___ г.

Следующие страницы
Цель работы: *(переписать полностью из описания или сформулировать самостоятельно).*
Теоретическое введение: *(письменно ответить на поставленные в лабораторной работе вопросы с использованием формулировок законов, определений основных физических величин и соотношений между ними, а также рисунков, графиков и схем с пояснениями к ним).*
Экспериментальная установка: *(нарисовать общий вид или схематичный рисунок установки и пояснить элементы установки).*
Результаты измерений и их обработка: *(подготовить таблицу для записи результатов измерений)*

Если студент не подготовил конспект по лабораторной работе, то он не допускается к выполнению работы до тех пор, пока конспект не будет подготовлен (причина невыполнения работы считается неуважительной).

Выполнение лабораторной работы

Учитывая указания преподавателя, студент получает и заносит в таблицы экспериментальные данные, проводит расчеты, строит графики и т.п. Выполнив необходимые действия, показывает полученные результаты измерений и расчетов преподавателю и при правильном результате получает подпись в графе «ИЗМЕРЕНИЯ».

Оформление отчета

Полностью оформленная и подготовленная к зачету работа должна соответствовать следующим требованиям:

1. Должны быть выполнены *все пункты* раздела «Оформление конспекта для допуска к лабораторной работе».

2. Для всех величин, представленных в таблицах, должны быть записаны соответствующие *единицы измерения.*

3. Графики должны удовлетворять следующим требованиям:

– построение должно быть выполнено на миллиметровой бумаге или на листе в клетку, размером не менее половины тетрадного листа;

– на графике: оси декартовой системы, на концах осей – стрелки, обозначения величин, единицы измерения, множитель (10^n);

– на каждой оси должен быть выбран равномерный масштаб (риски через равные промежутки, числа через равное количество рисок);

– под графиком написать полное название графика *словами* (например: график зависимости скорости от времени);

– экспериментальные и теоретические точки наносить ярко, разными значками;

– экспериментальная кривая должна соответствовать теоретической зависимости (не соединять экспериментальные точки ломаной линией);

– сделать выводы по каждому графику в соответствии с шаблоном:

Полученный экспериментально график зависимости _____ *от* _____ *имеет вид (прямой,*
(название функции словами) *(название аргумента)*
проходящей через начало координат, параболы, гиперболы, плавной кривой и т.п.) и качественно совпадает (не совпадает) с теоретической зависимостью данной характеристики, имеющей вид
_____.
(формула)

4. Сделать вывод в соответствии с шаблоном:

По результатам измерений и расчетов получено значение _____, *равное* _____ = _____ ± _____ _____
(название физической величины) *(символ)* *(среднее)* *(ошибка)* *(единица измерения)*

Полученное экспериментально значение _____, *равное*
(полное название величины словами)
_____, *с точностью до ошибки измерений,*
(число, единица измерения)
составляющей _____, *совпадает (не совпадает)*
(число, единица измерения)
с табличным (теоретическим) значением данной величины, равным _____.
(число, единица измерения)

Защита лабораторной работы

Преподаватель проверяет правильность и полноту оформления конспекта, задает вопросы по теории, методике измерений, устройству установки, методике обработки результатов, обоснованности выводов по отдельным результатам работы и всей работе в целом, и если работа считается полностью выполненной, то преподаватель ставит подпись в графе «ЗАЧЕТ».

Выполненные работы должны быть защищены на текущем или на следующем занятии.

Если студент имеет две и более незащищенные работы, то до тех пор, пока выполненные работы не будут защищены, к выполнению следующих работ студент не допускается (причина невыполнения считается неуважительной).

Порядок отработки невыполненных лабораторных работ

Лабораторные работы, не выполненные по уважительной причине, отрабатываются бесплатно при наличии разрешения деканата, конспекта по данной лабораторной работе с подписью ведущего занятия преподавателя в графе «ДОПУСК» в течение двух недель от даты пропущенного занятия.

Лабораторные работы, не выполненные по неуважительной причине, отрабатываются платно в течение двух недель от даты пропущенного занятия при наличии конспекта по данной лабораторной работе с подписью ведущего занятия преподавателя в графе «ДОПУСК», квитанции об оплате, договора об оказании услуг по ликвидации академической задолженности и акта о выполненных работах (оказанных услугах) по договору.

Отработка лабораторных работ проводится согласно графику отработки, утвержденному заведующим кафедрой, и расположенному на доске объявлений на кафедре.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

Любой эксперимент сопровождается измерениями целого ряда различных величин.

Измерением называют процесс получения опытным путем числового соотношения между измеряемой величиной, характеризующей некоторый объект или явление, и некоторым ее значением, принятым за единицу измерения.

Единицей измерения физической величины называется величина, которой по определению присвоено числовое значение, равное единице. Оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц измерения называется *значением физической величины*.

По способу определения значения физической величины измерения делятся на *прямые* и *косвенные*.

Под *прямыми измерениями* понимают измерения, при которых значение искомой физической величины находится непосредственно из опыта с помощью специальных технических средств (мер, измерительных приборов и др.).

Косвенные измерения – это измерения, результат которых получается на основе прямых измерений ряда величин x_1, x_2, ..., x_n, связанных с искомой величиной y известной функциональной зависимостью $y = f(x_1, x_2, \ ..., \ x_n)$, например: нахождение скорости движения по пройденному расстоянию и времени движения.

К косвенным измерениям прибегают в случаях, когда прямые измерения невозможны, чрезмерно сложны или не обеспечивают необходимой точности и надежности результата.

1. Обработка результатов прямых измерений

При измерении любой физической величины, как бы тщательно мы не выполняли измерения, принципиально невозможно получить ее истинное значение, т.е. свободный от искажений результат. Искажения, которые получаются при любом измерении, приводят к *погрешности измерения* – отклонению результата измерения от истинного значения измеряемой величины. При измерении некото-

рой величины x в качестве оценки этого отклонения можно было бы взять разность

$$\Delta x = x - x_{\text{ист}}, \tag{1}$$

где x и $x_{\text{ист}}$ – измеренное и истинное значения величины x соответственно;

Δx – *абсолютная погрешность результата измерения* – величина, определяемая как разность между результатом измерения физической величины x и ее истинным значением $x_{\text{ист}}$. Но истинное значение в (1) неизвестно и, как упоминалось выше, принципиально не может быть определено. Выходом из создавшегося положения является выполнение измерений несколько раз, т.е. проведение *серии измерений*.

Пусть серия измерений величины x состоит из n измерений, а x_i – значение этой величины, найденное в результате i-го измерения. Тогда, согласно (1), отклонение результата i-го измерения от истинного значения величины x

$$\Delta x_i = x_i - x_{\text{ист}}. \tag{2}$$

Сложив все равенства (2), имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot x_{\text{ист}}, \tag{3}$$

откуда для $x_{\text{ист}}$ получим

$$x_{\text{ист}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \overline{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i, \tag{4}$$

где $\overline{x}$ – среднее арифметическое отдельных измерений.

При очень большом числе измерений случайные отклонения Δx_i, равные по величине, но противоположные по знаку, встречаются одинаково часто. Следовательно, при бесконечно большом числе измерений

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0 \tag{5}$$

В этом случае из формулы (4) следует

$$x_{\text{ист}} = \bar{x}\,, \tag{6}$$

а результат измерений можно записать в следующем виде:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x\,. \tag{7}$$

Эту запись следует понимать как неравенство

$$\bar{x} - \Delta x \le x_{\text{ист}} \le \bar{x} + \Delta x\,, \tag{8}$$

где интервал $\left[\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x\right]$ называется *доверительным интервалом*. Величина абсолютной погрешности измерения Δx равна полуширине доверительного интервала.

Для оценки качества (точности) выполненных измерений независимо от измеряемой величины используется *относительная погрешность* измерения

$$\varepsilon_x = \frac{|\Delta x|}{x_{\text{ист}}}\,, \tag{9}$$

которая показывает, какую часть абсолютная погрешность составляет от истинного значения.

В зависимости от источников погрешностей измерения различают методические погрешности, порождаемые несовершенством методики измерения, и инструментальные, или приборные, погрешности, обусловленные несовершенством технических средств, используемых при измерении. По характеру проявления ошибки делятся на *систематические*, *случайные*, *грубые* или *промахи*.

Систематическими ошибки – это ошибки, величина и знак которых остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. Источниками систематических ошибок, как правило, являются упомянутые выше методические и инструментальные (приборные) погрешности. Примерами методических ошибок, имеющих систематический характер, могут служить: использование упрощающих предположений и приближенных формул при описании физических явлений (например, при взвешивании тела на аналитических весах будет допущена систематическая методическая ошибка, если не будет

вноситься поправка на различие выталкивающих сил, действующих со стороны воздуха на взвешиваемое тело и разновесы). Примерами инструментальных ошибок систематического характера являются ошибки, обусловленные несовпадением исходного положения указателя с нулевой отметкой шкалы прибора, несоответствие условий эксплуатации прибора нормальным и др. Полностью устранить инструментальную ошибку невозможно, но ее следует учесть, зная класс точности прибора.

Случайные ошибки – это ошибки, величина и знак которых изменяются случайно при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности вызываются многими факторами, не поддающимися учету, например, несовпадение момента включения секундомера с моментом начала опыта, влияние незначительного движения воздуха на ход наблюдаемого физического процесса и др. В силу случайного характера их проявления оказать на них целенаправленное воздействие невозможно, но их можно уменьшить путем многократного повторения измерений.

Случайные погрешности обладают следующими свойствами:

– абсолютные погрешности Δx принимают непрерывный ряд значений;

– противоположные по знаку абсолютные погрешности встречаются одинаково часто, т.е. они равновероятны;

– большие по значению абсолютные погрешности встречаются реже, чем малые, т.е. они менее вероятны.

Наиболее полную оценку случайной составляющей $\Delta x_{\text{сл}}$ погрешности прямого измерения дают статистические методы, основанные на *законе нормального распределения* случайных величин (*распределение Гаусса*), которое имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-x_{\text{ист}})^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (10)$$

где $x_{\text{ист}}$ – истинное значение измеряемой величины x, которое определяет максимум функции распределения $f(x)$;

σ – стандартное отклонение, характеризующее ширину распределения.

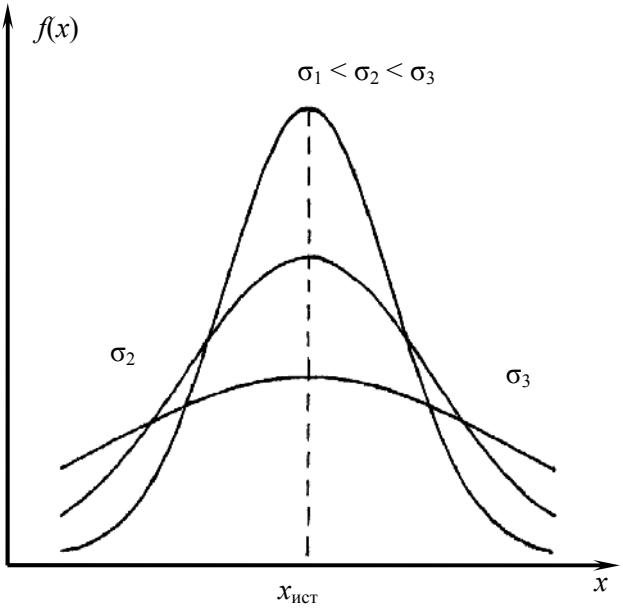

Рис. 1

График функции распределения Гаусса (рис. 1) представляет собой симметричную колоколообразную кривую (гауссову кривую), достигающую максимума при значении $x = x_{ист}$. Вычислив вторую производную от функции распределения (10) и приравняв ее к нулю, получим $x = x_{ист} \pm \sigma$.

Значения x указывают положение точек перегиба гауссовой кривой относительно ее центра и делят площадь криволинейной трапеции, ограниченную графиком и осью X, на центральную и периферийную части (рис. 2). Расстояние между точками перегиба, равное 2σ, определяет ширину центральной части. Вычислив площадь последней, можно убедиться, что при любых значениях σ и $x_{ист}$ она будет составлять 68,3 % от всей площади криволинейной трапеции. Это означает, что при бесконечно большом числе измерений величины x 68,3 % всех измерений будут давать значения, попадающие в доверительный интервал [$x_{ист}$-σ; $x_{ист}$+σ], и только 31,7 % измеренных значений будут лежать вне этого интервала.

Иными словами, число 0,683 определяет надежность P попадания измеренного значения в интервал, полуширина которого равна σ. Такой доверительный интервал называют *стандартным интервалом*, а параметр σ – *стандартным отклонением нормального распределения*.

При двукратном и трехкратном увеличении ширины стандартного интервала надежность измеренного результата возрастает до 0,954 и 0,997 соответственно, то есть за пределы трехкратного интервала $\left[x_{\text{ист}} - 3\sigma; x_{\text{ист}} + 3\sigma\right]$ попадает ничтожная доля (0,3 %) всего числа измерений.

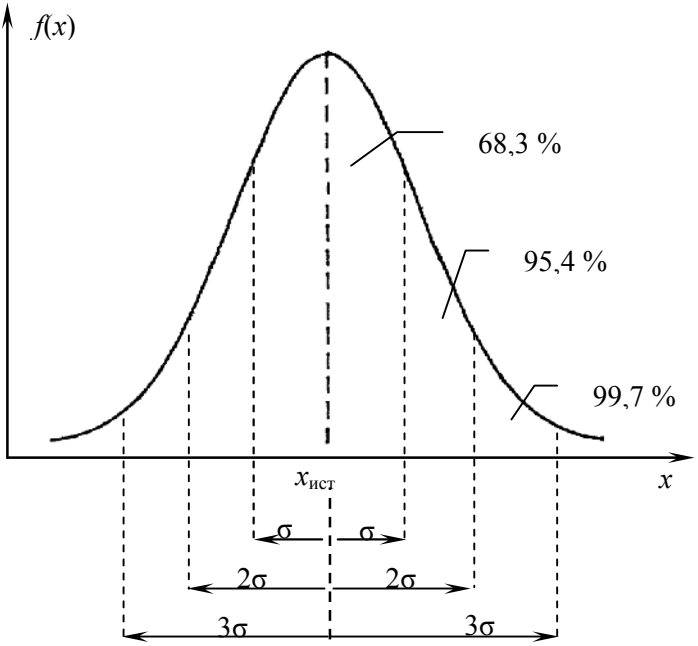

Рис. 2

В общем случае при заданной надежности P полуширина доверительного интервала равна

$$\Delta x_{\text{сл}} = \lambda_p \sigma, \tag{11}$$

где λ_p – числовой коэффициент, соответствующий выбранной надежности P выполненных измерений.

Формула (11) указывает, как в рамках нормального распределения можно в принципе оценить полуширину доверительного интервала $\Delta x_{\text{сл}}$ при заданной надежности. Однако практическое применение изложенного метода наталкивается на две трудности: 1) неизвестно истинное значение измеряемой величины; 2) в лабораторных условиях невозможно и нецелесообразно повторять измерения бесконечно большое число раз. Учет данных обстоятельств приводит к необходимости некоторых изменений записанных соотношений для использования приведенного метода оценки $\Delta x_{\text{сл}}$ в реальных ситуациях.

В теории погрешностей показано, что при выполнении серии измерений значений физической величины x_1, x_2, ..., x_n такие изменения сводятся к следующему:

– для симметричного распределения (10) истинное значение измеряемой величины x необходимо заменить средним арифметическим измеренных значений:

$$x_{\text{ист}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right); \qquad (12)$$

– в качестве оценки стандартного отклонения σ следует использовать среднеквадратичную ошибку $S_{\bar{x}}$ результатов n измерений:

$$\sigma \approx S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\ ; \qquad (13)$$

– числовой коэффициент λ_p в формуле (11) требуется заменить на множитель $t_{p,n}$, названный *коэффициентом Стьюдента*, который зависит от доверительной вероятности (надежности) и числа проведенных измерений:

$$\Delta x_{\text{сл}} = t_{p,n} S_{\bar{x}} = t_{p,n}\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\ . \qquad (14)$$

В таблице 1 представлены значения коэффициентов Стьюдента $t_{p,n}$ для разных значений надежности P и числа измерений n.

Таблица 1

Значения коэффициентов Стьюдента для разных значений p и n

n	Надежность P								
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8

Грубые ошибки или *промахи* – это ошибки измерения, значительно превышающие по величине ожидаемую при данных условиях погрешность. Промахи вызываются обычно невнимательностью экспериментатора, резким изменением условий эксперимента, неисправностью прибора. Такие результаты измерений должны исключаться из рассмотрения как не заслуживающие доверия.

В тех случаях, когда систематические ошибки, порождаемые известными причинами, устранены, вклад в значение полной погрешности прямого измерения Δx определяется величиной случайной погрешности $\Delta x_{\text{сл}}$ и величиной приборной погрешности средств измерения $\Delta x_{\text{пр}}$. Величины $\Delta x_{\text{сл}}$ и $\Delta x_{\text{пр}}$, которые называют *составляющими погрешности прямого измерения*, обусловлены независимыми причинами. В теории вероятностей показано, что в случае независимых составляющих, полная абсолютная погрешность прямого измерения может быть вычислена по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{сл}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2} \,. \qquad (15)$$

Формула (15) отражает возможность учитывать то, что при независимых источниках ошибок, переоценка первого слагаемого

$\Delta x_{сл}$ может в какой-то мере быть скомпенсирована недооценкой второго слагаемого $\Delta x_{пр}$ и наоборот. Аналогичная формула имеет место и для относительной погрешности:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{сл}^2 + \varepsilon_{пр}^2} \,. \tag{16}$$

Упрощенный способ вычисления погрешностей состоит в том, что за абсолютную погрешность прямых измерений принимают среднее значение модулей случайных отклонений от среднего значения, т. е. считают, что средняя абсолютная ошибка вычисляется следующим образом:

$$\Delta\bar{x} = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2| + ... + |\Delta x_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\Delta x_i| \cdot \tag{17}$$

В таком случае окончательный результат прямых измерений записывается в виде

$$x = \bar{x} \pm \Delta\bar{x} \,, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta\bar{x}}{\bar{x}} \,. \tag{18}$$

Результат в виде формулы (18) должен быть записан с соблюдением правил приближенного вычисления (см. п. 3).

2. Обработка результатов косвенных измерений

Пусть измеряемая физическая величина y не измеряется непосредственно прибором, а выражается по некоторой формуле через другие величины x_1, x_2, ..., x_n, которые получаются в результате прямых измерений, т.е.

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{19}$$

Наиболее вероятное значение $\bar{y}$ получается, если для ее расчета по формуле (17) используются наиболее вероятные значения $\bar{x}_i$ прямых измерений (i = 1, 2, …, n). Поэтому

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n). \tag{20}$$

Поскольку все величины $\overline{x}_i$ измерены с некоторой погрешностью $\Delta\overline{x}_i$ прямого измерения, то $\overline{y}$ также будет определена с некоторой погрешностью Δy.

Пусть y зависит только от одной величины x, т.е. $y = f(x)$. Тогда при малых Δx для абсолютной и относительной погрешностей величины y получим

$$\Delta y = \left|\frac{dy}{dx}\right|\Delta x\,, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\overline{y}} = \left|\frac{1}{\overline{y}}\frac{dy}{dx}\right|\Delta x = \left|\frac{d\ln y}{dx}\right|\Delta x\,, \tag{21}$$

где производные $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d\ln y}{dx}$ вычисляются при $x = \overline{x}$.

Погрешность Δy величины y является малой добавкой к величине $\overline{y}$, поэтому Δy можно считать дифференциалом dy функции многих переменных $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$. При этом абсолютные ошибки измерения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, являющихся аргументами этой функции, удовлетворяют условиям: $\Delta x_1 << \overline{x}_1$, $\Delta x_2 << \overline{x}_2, \cdots$ $\Delta x_n << \overline{x}_n$ и поэтому могут быть заменены соответствующими дифференциалами dx_1, dx_2, ..., dx_n. Тогда абсолютная и относительная погрешности косвенных измерений величины y рассчитываются по правилу дифференцирования:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sqrt{\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \ldots. + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^2\right]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}\,, \\ \varepsilon_y &= \frac{\Delta y}{\overline{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\overline{y}}\frac{\partial y}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \ln y}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}\,, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ и $\dfrac{\partial \ln y}{\partial x_i}$ – частные производные по переменным x_i, вычисленные при $x_1 = \overline{x}_1, x_2 = \overline{x}_2, \ldots, x_i = \overline{x}_i$.

Окончательный результат измерений представляется в стандартной форме:

$$y = \bar{y} \pm \Delta y\,, \quad \varepsilon_x = \frac{\Delta y}{\bar{y}}\,. \tag{23}$$

Вычисления абсолютной и относительной погрешностей косвенных измерений по формулам (22) и (23) для наиболее часто встречающихся элементарных функций представлены в таблице 2.

Таблица 2

Формулы для вычисления абсолютных и относительных погрешностей косвенных измерений

Вид функции	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$x + y$	$\Delta x + \Delta y$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{\lvert x + y\rvert}$
$x - y$	$\Delta x + \Delta y$	$\dfrac{\Delta x + \Delta y}{\lvert x - y\rvert}$
Cx	$C\Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$
xy	$\lvert x\rvert \cdot \Delta y + \lvert y\rvert \cdot \Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert} + \dfrac{\Delta y}{\lvert y\rvert}$
$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\lvert x\rvert \cdot \Delta y + \lvert y\rvert \cdot \Delta x}{y^2}$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert} + \dfrac{\Delta y}{\lvert y\rvert}$
x^n	$\lvert n\rvert \cdot \lvert x\rvert^{n-1} \cdot \Delta x$	$\lvert n\rvert \cdot \dfrac{\Delta x}{\lvert x\rvert}$
$\ln x$	$\dfrac{\Delta x}{x}$	$\dfrac{\Delta x}{x \cdot \lvert \ln x\rvert}$
$\sin x$	$\lvert \cos x\rvert \cdot \Delta x$	$\dfrac{\Delta x}{\lvert \mathrm{tg} x\rvert}$
$\cos x$	$\lvert \sin x\rvert \cdot \Delta x$	$\lvert \mathrm{tg} x\rvert \cdot \Delta x$
$\mathrm{tg} x$	$\dfrac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\dfrac{2\Delta x}{\lvert \sin 2x\rvert}$

Замечания.

1. Все значения аргументов *x, y*, записанные в таблице, понимаются как соответствующие средние значения $\overline{x}, \overline{y}$ физических величин, найденные с помощью прямых измерений.

2. Скобки модуля величины (например, $|x|$ либо $|\sin x|$ и т. д.) появляются по той причине, что при выводе формул для абсолютной или относительной погрешности косвенных измерений, принимается случай максимально возможной погрешности. Это достигается в случаях, когда ошибки, вносимые в результат всеми измеряемыми величинами, имеют одинаковый знак и складываются их абсолютные величины. К тому же, за относительную ошибку всегда принимается положительная величина.

3. В приведенной выше таблице *C* означает постоянную величину. Если это известная константа (например, число π), то ее нужно брать с такой точностью, чтобы относительная погрешность этой величины была значительно меньше относительной погрешности всех остальных величин, входящих в выражение для искомой величины.

Рассмотрим пример расчета погрешности косвенного измерения величины $y = f\left(x_1, x_2, \ ..., \ x_n\right)$. При наблюдении поступательного прямолинейного равноускоренного движения тела без начальной скорости было измерено время движения *t* и пройденный путь *S* (прямые измерения). Необходимо найти численное значение ускорения *a* (косвенное измерение). Как известно,

$$a = f\left(t, S\right) = \frac{2S}{t^2}.$$

Прологарифмируем последнее выражение

$$\ln a = \ln\left(2S\right) - 2\ln t,$$

а затем вычислим дифференциал

$$d\ln a = \frac{2dS}{2S} - \frac{2dt}{t} = \frac{da}{a}.$$

Таким образом, получим

$$\Delta a = \overline{a}\left(\frac{\Delta S}{\overline{S}} + \frac{2\Delta t}{\overline{t}}\right), \qquad \varepsilon = \frac{\Delta a}{\overline{a}} = \frac{\Delta S}{\overline{S}} + \frac{2\Delta t}{\overline{t}},$$

где средние значения $\overline{S}$ и $\overline{t}$ вычисляются по результатам n измерений как

$$\overline{S} = \frac{1}{n}\left(S_1 + S_2 + ... + S_n\right), \qquad \overline{t} = \frac{1}{n}\left(t_1 + t_2 + ... + t_n\right),$$

а среднее значение ускорения

$$\overline{a} = \frac{2\overline{S}}{\overline{t}^2}.$$

3. Представление результатов измерений

При вычислении средних значений и погрешностей прямых и косвенных измерений необходимо выполнять простые правила приближенных вычислений.

Все результаты измерений и вычислений, округленные значения точных чисел, табличные значения (кроме тех, после которых в скобках указано «точно») являются приближенными числами.

Значащими цифрами числа являются все его цифры, в том числе и нули, если они не расположены в начале числа. Например, 1,2345 − 5 значащих цифр, 1,200 − 4 значащие цифры; 0,012 − 2 значащие цифры. Приближенные числа принято представлять в *нормальной форме*: первую значащую ставят в разряд единиц, остальные − в десятичных разрядах после запятой, и полученное число умножается на множитель вида 10^n. Например, $2003 = 2{,}003 \cdot 10^3$.

Записывая результат измерений и вычислений в виде формул (13) либо (18) необходимо помнить, что количество значащих цифр измеряемых величин определяется абсолютными ошибками, полученными при определении этих величин:

а) величину абсолютной погрешности следует округлить до двух значащих цифр, если первая из них единица, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях;

б) при записи значений средних значений необходимо указывать все цифры вплоть до последнего десятичного разряда, использованного для записи погрешности.

При округлении должны быть выполнены простые правила. Для округления числа до *n* значащих цифр отбрасывают все его цифры, стоящие после *n*-го разряда. При этом последняя из сохраняемых цифр не изменяется, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5; последняя из сохраняемых цифр увеличивается на 1, если первая из отбрасываемых равна или больше 5. Приведем примеры записей результата прямого измерения диаметра шарика:

правильная запись $d = (5,290 \pm 0,013)$ мм;

неправильная запись $d = (5,29 \pm 0,01)$ мм, нарушено правило а);

неправильная запись $d = (5,29 \pm 0,013)$ мм, нарушено правило б);

неправильная запись $d = (5,2900 \pm 0,0134)$ мм, нарушено правило а).

4. Графическое представление физических зависимостей

Графики являются наиболее информативным и наглядным способом представления экспериментальных зависимостей. Для построения графика необходимо руководствоваться следующими правилами:

1) графики выполняются на бумаге с миллиметровой сеткой, значение функции откладывают по оси ординат, аргумента − по оси абсцисс. На осях необходимо указывать обозначение и единицы измерения физической величины;

2) на осях приводится только тот интервал аргумента, в котором проводились измерения. Точка пересечения осей не обязательно должна соответствовать нулю по каждой из осей;

3) начало отсчета по осям и масштаб осей выбирается независимо друг от друга таким образом, чтобы кривые занимали практически все поле чертежа, и определяется абсолютными погрешностями откладываемых по осям величин;

4) точки, соответствующие полученным результатам, наносят на график и обводят кружком небольшого радиуса (или квадратиком, или крестиком и т.д.). Как правило, физические зависимости – это гладкие, плавные линии без резких изломов. Поэтому кривую проводят между точками плавно, желательно, чтобы по обе стороны кривой располагалось одинаковое количество точек;

5) график должен быть наглядным и приемлемым с эстетической точки зрения (разные цвета для различных эксперименталь-

ных точек, кривых и т.д.). Если имеется несколько кривых, то каждой кривой присваивается номер, а на свободном поле чертежа указывается название, обозначение или параметр кривой, соответствующий этому номеру. Каждый график снабжается подписью, в которой должно быть отражено содержание графика;

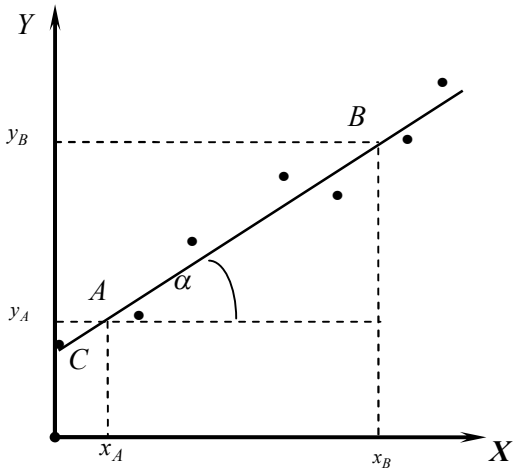

Рис. 3

6) для нахождения коэффициентов (например k и b), которые определяют линейную связь между двумя физическими величинами (например $y = kx + b$), используется графический метод. Для этого необходимо построить график зависимости y от x (рис. 3), на котором выбираются достаточно удаленные точки A и B, определяются их координаты x_A, y_A и x_B, y_B, а затем рассчитывается угловой коэффициент k как тангенс угла наклона прямой:

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\left(y_B - y_A\right)}{\left(x_B - x_A\right)}. \qquad (24)$$

Коэффициент b равен координате точки C пересечения графика с осью y. Если график проходит через начало координат, то $b = 0$, и для расчета углового коэффициента достаточно одной точки B.

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Лабораторная работа 1.1

ИЗУЧЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И СВЯЗИ МЕЖДУ НИМИ ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: определить кинематические величины поступательного и вращательного движений.

Теоретическое введение

Простейшей формой движения материи является механическое движение, которое представляет собой изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей. Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. Поступательное движение – это такое движение тела, при котором любая прямая, связанная с ним, остается параллельной самой себе. Любые точки тела, находящегося в состоянии только поступательного движения, в каждый данный момент времени, проходят одну и ту же траекторию, имеют одинаковые скорости и одинаковые ускорения.

При изучении движения используется понятие идеализированной частицы, которая рассматривается как материальная точка. Материальная точка – это тело, у которого нет пространственной протяженности (размеров), обладающее массой и которое может совершать только поступательное движение.

Всякое движение происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки необходимо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение, для чего вводится тело отсчета и система отсчета.

Тело отсчета – произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение остальных тел в каждый момент времени. Система отсчета – это совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета.

Для описания движения материальной точки используется декартовая система координат – ортонормированный базис, который образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, проведенными из начала координат.

Положение произвольной точки характеризуется радиус-вектором $\vec{r}$ – это вектор, проведенный из начала выбранной системы координат в ту точку траектории, в которой в данный момент времени находится материальная точка

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} .$$

Модуль радиус-вектора определяется по формуле

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Движение материальной точки полностью определено, если декартовы координаты материальной точки заданы в зависимости от времени:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

– *кинематические уравнения движения точки*, которые эквивалентны одному векторному уравнению движения точки: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета, называется *траекторией*, а вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени, называется вектором *перемещения.*

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k} .$$

Из того, что перемещение – вектор, следует подтверждающийся на опыте *закон независимости движений*: если точка одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение точки равно векторной сумме перемещений, совершаемых ею за то же время в каждом из движений порознь. В зависимости от формы траектории движение может быть *прямолинейным* или *криволинейным*.

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина – *скорость*, определяющая как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Вектором средней скорости в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется отношение вектора перемещения точки к промежутку времени, за который это перемещение произошло, т.е.

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} .$$

Мгновенная скорость – это предел, к которому стремится вектор средней скорости материальной точки при бесконечном уменьшении промежутка времени:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} .$$

Таким образом, *вектор мгновенной скорости* равен первой производной радиус-вектора движущейся точки по времени и направлен по касательной к траектории в сторону движения.

Вектор мгновенной скорости в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат можно представить в следующем виде:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k} ,$$

где υ_x, υ_y, υ_z – проекции вектора мгновенной скорости на координатные оси X, Y, Z; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы соответствующих координатных осей.

Чтобы определить υ_x, υ_y, υ_z возьмем проекции на координатные оси радиуса-вектора $\vec{r}$ и продифференцируем его по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} .$$

Сравнивая последние два выражения, получим

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} , \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} , \ \upsilon_z = \frac{dz}{dt} .$$

Таким образом, *проекции вектора мгновенной скорости* на декартовы оси равны первым производным от соответствующих координат по времени.

Модуль вектора мгновенной скорости определяется выражением

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} \ .$$

Физическая величина, которая характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлению, называется *ускорением*.

Вектором среднего ускорения неравномерного движения в интервале времени от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению приращения вектора скорости к интервалу времени, за которое приращение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} .$$

Мгновенным ускорением называется векторная величина, характеризующая быстроту приращения вектора скорости движущейся точки и равную пределу, к которому стремится среднее ускорение этой точки в промежутке времени от t до $t + \Delta t$ при неограниченном уменьшении Δt:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} .$$

Поскольку *скорость* – быстрота приращения перемещения тела во времени, а *ускорение* – быстрота приращения скорости по времени, то ускорение можно записать следующим образом:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} ,$$

т.е. *ускорение точки* равно первой производной от ее скорости по времени, или, что тоже самое, второй производной от ее радиус-вектора по времени.

Вектор мгновенного ускорения в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат имеет вид

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора мгновенного ускорения на координатные оси X, Y, Z; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы соответствующих координатных осей. Для определения a_x, a_y, a_z продифференцируем по времени выражение для вектора мгновенной скорости:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k}.$$

Сравнивая последние два выражения, получим

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

При плоском криволинейном движении полное ускорение материальной точки можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 4)

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

где $\vec{a}_n$ – *нормальное* (или центростремительное) ускорение материальной точки;

$\vec{a}_\tau$ – *тангенциальное* (или касательное) ускорение материальной точки.

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по модулю и направлено по касательной к траектории движения (рис. 4), как в сторону движения, так и в противоположную сторону. Вектор тангенциального ускорения определяется соотношением

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\vec{\tau} = a_\tau\vec{\tau}.$$

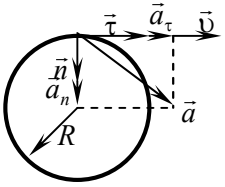

Рис. 4

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости материальной точки и всегда направлено к центру кривизны траектории (рис. 4). Вектор нормального ускорения определяется соотношением

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} = a_n\vec{n}\ .$$

Модули тангенциального и нормального ускорений связаны между собой соотношением

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\ .$$

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения. При вращении тела угол поворота изменяется со временем по закону $\varphi=\varphi(t)$, который называется *уравнением вращательного движения тела.*

Угловое перемещение $d\vec{\varphi}$ – векторная величина, модуль которой равен углу поворота $\Delta\varphi$ радиус-вектора за время Δt и направлено перпендикулярно плоскости движения материальной точки по правилу правого винта.

Средней угловой скоростью материальной точки на данном участке движения называется величина

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\ .$$

Угловой скоростью тела называется векторная величина, равная пределу, к которому стремится вектор средней угловой скорости при бесконечном уменьшении промежутка времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{\omega}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\ .$$

Согласно правилу правого винта вектор угловой скорости направлен по оси вращения, причем так, чтобы вращение, рассматриваемое с конца вектора угловой скорости, происходило против хода часовой стрелки.

Угловым ускорением движения материальной точки называется векторная величина, равная пределу, к которому стремится отношение приращения угловой скорости $\Delta\vec{\omega}$ за промежуток времени Δt к этому промежутку времени при стремлении последнего к нулю.

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$$

При ускоренном вращении вектор углового ускорения совпадает с вектором угловой скорости (рис. 5), а при замедленном – противоположен ему (рис. 6),

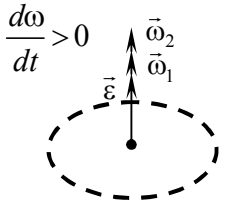

Рис. 5

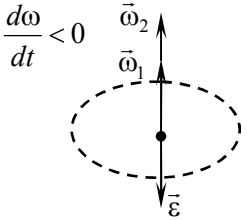

Рис. 6

где $\vec{\omega}_1$ – угловая скорость в начальный момент времени;

$\vec{\omega}_2$ – угловая скорость через некоторый промежуток времени.

Модули тангенциального и нормального ускорений произвольной точки тела, вращающейся вокруг неподвижной оси по окружности радиуса R, связаны с угловой скоростью и угловым ускорением соотношениями

$$a_\tau = \varepsilon R\,,\ a_n = \omega^2 R\,.$$

Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 7. Основными элементами установки являются: а) основание, состоящее из двух шарнирно соединенных между собой частей, на которых расположены шкалы, цена деления которых составляет один миллиметр; б) оптоэлектрические датчики **1** и **2**, представляющие собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор; в) диск **3**, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси; г) два металлических цилиндрических тела **4,** связанных между собой нитью;

д) цифровой секундомер **5**, предназначенный для измерения промежутков времени.

Рис. 7

Пусть к концам нити, перекинутой через блок, подвешены два груза массами m_1 и m_2 (рис. 8). Если системе, состоящей из грузов и блока, предоставить возможность двигаться, то грузы будут двигаться поступательно с постоянным ускорением, а блок будет вращаться с постоянным угловым ускорением.

Для описания движения груза массой m_1 выберем систему отсчета. Начало координат (точку 0) выберем в точке начального положения груза массой m_1, ось Y направим вертикально вниз. В качестве часов будем использовать секундомер, который включается в момент $t = 0$ начала движения груза массой m_1 (следовательно, $\upsilon_0 = 0$). Если расстояние, пройденное грузом, обозначить h, то по формулам для равноускоренного движения можно записать:

$$h = \frac{at^2}{2}, \tag{1.1.1}$$

$$\upsilon = at, \tag{1.1.2}$$

где υ – проекция вектора скорости груза массой m_1 на ось Y;

a – проекция ускорения груза на эту ось.

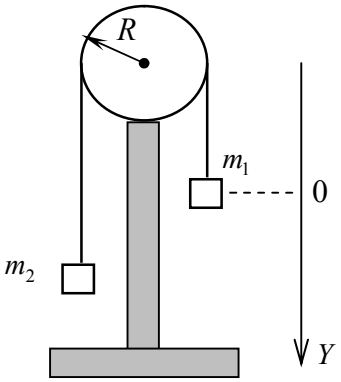

Рис. 8

Из выражения (1.1.1) получаем

$$a = \frac{2h}{t^2} \tag{1.1.3}$$

и, подставив (1.1.3) в (1.1.2), получим

$$\upsilon = \frac{2h}{t}. \tag{1.1.4}$$

Очевидно, что тангенциальное ускорение a_τ точек, лежащих на краю блока, равно ускорению a груза массой m_1. Тангенциальное и угловое ускорения связаны между собой соотношением

$$a_\tau = a = \varepsilon R,$$

где R – радиус блока.

Подставив это соотношение в (1.1.3), получим

$$\varepsilon = \frac{2h}{Rt^2}. \qquad (1.1.5)$$

Используя выражения для угла поворота при равноускоренном вращении, можно найти угол, на который повернется блок, и угловую скорость его вращения:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \omega = \varepsilon t .$$

С учетом формулы (1.1.5) последние выражения принимают вид

$$\varphi = \frac{h}{R}, \ \omega = \frac{2h}{Rt}. \qquad (1.1.6)$$

Число оборотов N блока за время t можно найти из следующего выражения:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Подставив в это выражение формулу (1.1.6), получим

$$N = \frac{h}{2\pi R}. \qquad (1.1.7)$$

Порядок выполнения работы

1. Разложите основание прибора и на его вертикальной части установите оптоэлектрические датчики на расстоянии h_1 между ними таким образом, чтобы датчик **1** находился выше датчика **2** (см. рис. 7). Расстояние h_1 задается преподавателем. Его значение занесите в таблицу.

2. Измерьте радиус диска **3** и занесите его значение в таблицу 1.

Таблица 1

$R =$								
	i	t_1	$\bar{t}_1$	a_1	υ_1	ε_1	ω_1	N_1
$h_1 =$	1							
	2							
	3							
	4							
	5							
	i	t_2	$\bar{t}_2$	a_2	υ_2	ε_2	ω_2	N_2
$h_2 =$	1							
	2							
	3							
	4							
	5							

3. Установите на диске два связанных нитью груза **4** и добейтесь, чтобы грузы висели вертикально, не раскачиваясь.

4. Включите цифровой секундомер **5** нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение 2-х секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись r .

5. Последовательным нажатием кнопки «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектрическими датчиками r .

6. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

7. На груз, который будет двигаться между датчиками, положите дополнительный груз и поднимите их на высоту на несколько сантиметров выше светового луча датчика **1** и придержите.

8. Отпустите грузы. Секундомер производит измерение промежутка времени, в течение которого груз двигался между датчиками (при пересечении грузом светового луча первого датчика секундомер начнет отсчет времени, а при достижении грузом светового луча второго датчика закончит). Результат измерения занесите в таблицу 1.

9. Вращая диск, поднимите грузы на первоначальную высоту. При прохождении груза через световой луч датчика **1** секундомер начнет отсчет времени. Остановите его, перекрыв рукой световой луч датчика **2**.

10. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием любой из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК».

11. Повторите измерения 5 раз и результаты занесите в таблицу 1.

12. Проведите аналогичные измерения для расстояния между оптоэлектрическими датчиками h_2.

13. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ» и сложите основание прибора.

14. Вычислите средние значения времени движения груза.

15. По полученным средним значениям времени движения вычислите значения ускорения по формуле (1.1.3), скорости движения по формуле (1.1.4), углового ускорения по формуле (1.1.5), угловой скорости по формуле (1.1.6) и число оборотов по формуле (1.1.7) для каждой высоты. Результаты вычислений занесите в таблицу 1.

16. Сравните полученные результаты для расстояний h_1 и h_2 и заполните таблицу 2.

Таблица 2

$\frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_2}$	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$	$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$	$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\frac{N_1}{N_2}$

17. Рассчитайте для одной из величин t_1 или t_2 абсолютную погрешность измерения Δt и ее среднее значение $\Delta\bar{t}$ по формулам (17) и (18). Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется механическим движением? Какое движение тела называется поступательным? вращательным? прямолинейным? криволинейным?

2. Дайте определение материальной точки. Запишите кинематические уравнения движения материальной точки.

3. Что называется телом отсчета? системой отсчета?

4. Дайте определение траектории и вектора перемещения.

5. Сформулируйте закон независимости движений.

6. Дайте определение кинематическим величинам: вектору средней скорости, мгновенной скорости, вектору среднего ускорения неравномерного движения, мгновенному ускорению.

7. Запишите выражения, которыми определяется вектор мгновенной скорости и вектор мгновенного ускорения в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат.

8. Дайте определение кинематическим величинам: тангенциальному и нормальному ускорениям, угловой скорости и угловому ускорению. Как направлены: тангенциальное ускорение? нормальное ускорение? угловое ускорение? угловая скорость?

9. Запишите формулу, которая связывает линейную и угловую скорости точки, движущейся по окружности.

10. Запишите формулу, которая связывает тангенциальное и угловое ускорения точки, движущейся по окружности.

Лабораторная работа 1.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Цель работы: изучить основные закономерности, которым подчиняются силы трения, и определить коэффициент трения скольжения при движении по горизонтальной поверхности.

Теоретическое введение

Всякое движущееся тело встречает сопротивление своему движению со стороны окружающей его среды и других тел, с которыми оно во время движения соприкасается, т.е. на любое движущееся тело действует *сила трения*.

Силой трения называется сила, характеризующая взаимодействие соприкасающихся поверхностей двух тел и препятствующие их взаимному перемещению. Силы трения приложены к телам вдоль поверхностей их соприкосновения и всегда направлены в сторону, противоположную относительной скорости движения тел. Различают трение двух видов: *внешнее (сухое)* и *внутреннее (вязкое) трения*.

Внешнее (сухое) трение – явление, заключающееся в возникновении в месте контакта двух соприкасающихся твердых тел касательных сил, которые препятствуют относительному перемещению этих тел.

Возникновение сухого трения обусловлено тем, что вследствие шероховатости поверхностей, соприкасающихся друг с другом, контакт между телами имеет место только на гребнях выступов (d ~ 1-50 мкм). В местах контакта поверхности внедряются одна в другую. При движении в местах контакта возникают микроскопические деформации (расстояния между частицами поверхностных слоев уменьшаются) и возникающие при этом электромагнитные силы отталкивания проявляются как силы трения.

Различают два вида внешнего трения: *трение кинематическое*, которое происходит между телами, движущимися друг относительно друга, и *трение статическое* между взаимно неподвижными телами. В зависимости от характера относительного движения

соприкасающихся тел кинематическое трение подразделяется на *трение скольжения* и *трение качения*.

Статическое трение возникает при попытке вызвать скольжение одного тела по другому. При значениях внешней силы $0 < F < F_0$, где F_0 – предельное значение силы статического трения, тело остается в покое и имеет место трение покоя, которое обусловлено в основном упругими деформациями микровыступов. *Сила трения покоя* по модулю равна результирующей сил, стремящихся сдвинуть тело, и направлена противоположно ей. Максимальное значение силы трения покоя приблизительно равно силе трения скольжения.

По закону статического трения предельное значение модуля силы статического трения прямо пропорционально величине силы нормального давления тела на опору.

$$F_0 = \mu_0 N,$$

где μ_0 – коэффициент трения покоя, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей двух тел.

Однако из опыта известно, что сила статического трения может увеличиваться лишь до некоторого предельного значения, и в момент времени, когда $F > F_0$, тело придет в движение (рис. 9). Когда внешняя сила превосходит по модулю силу статического трения, тело начинает скользить по поверхности и имеет место трение скольжения, возникающее в результате пластических деформаций микровыступов и их частичного разрушения. Согласно экспериментально установленному *закону Кулона – Амонтона*, модуль силы трения скольжения пропорционален силе нормального давления:

$$F_{\text{ск}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния трущихся поверхностей. Модуль силы трения скольжения всегда меньше модуля максимальной силы трения покоя, т.е. $\mu_0 > \mu$. Однако если различие между этими двумя силами мало, то можно считать, что $\mu_0 = \mu$.

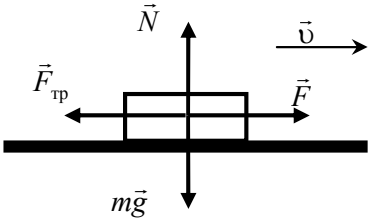

Рис. 9

При качении одного тела по поверхности другого возникает сила сопротивления движению (рис. 10), которая называется *силой трения качения.* Эта сила действует со стороны опоры на катящееся по ней тело. По *закону Кулона*, при качении без проскальзывания, *сила трения качения* пропорциональна силе нормального давления, но коэффициент пропорциональности значительно меньше коэффициента трения скольжения и зависит от радиуса катящегося тела.

$$F_{кач}=\mu_{кач}\frac{N}{R},$$

где $\mu_{кач}$ – коэффициент трения качения, зависящий от материала катящегося тела, опорной плоскости и физического состояния поверхностей;

R – радиус тела, которое катится.

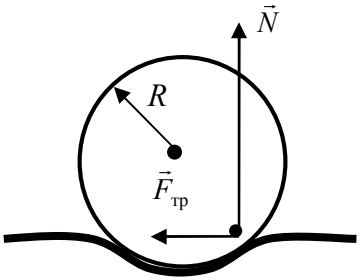

Рис. 10

При движении тел в жидких и газообразных средах возникает сила сопротивления движению, которую называют *силой вязкого трения* (рис. 11). *Внутреннее (вязкое) трение* – явление, состоящее в возникновении сил трения между слоями жидкости или газа, перемещающимися параллельно друг другу с различными по модулю скоростями.

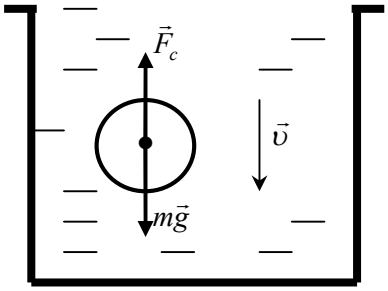

Рис. 11

Силы *внутреннего* (*вязкого*) *трения* зависят от скорости движения тела в среде. По *закону Стокса*, при небольших относительных скоростях движения сила сопротивления линейно возрастает с увеличением скорости и направлена в сторону, противоположную движению.

$$\vec{F}_c = -\mu_1 \vec{\upsilon}.$$

При больших относительных скоростях сила сопротивления пропорциональна квадрату (и даже кубу) скорости движения тела.

$$\vec{F}_c = -\mu_2 \left|\vec{\upsilon}^2\right|,$$

где μ_1 и μ_2 – коэффициенты сопротивления, зависящие от формы и размеров тела, состояния его поверхности и от вязкости среды.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 12. Основными элементами установки являются: а) основание, состоящее из двух шарнирно соединенных между собой частей, на которых расположены шкалы, цена деления которых составляет один миллиметр.

Рис. 12

На одной части расположены желоб, вдоль направляющих которого движется тело, а на конце закреплен неподвижный блок; б) оптоэлектрические датчики **1** и **2**, представляющие собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор; в) тело **3** с различными поверхностями трения, имеющее две поверхности скольжения (пробковую и деревянную) с разными коэффициентами трения. В центрах граней тела для установки стержней имеются отверстия диаметром 8 мм. Стержень с флажком вставляется горизонтально в отверстие на одной из боковых граней тела и предназначается для перекрытия светового пучка фотодиода оптического датчика. Второй стержень, который вставляется вертикально в отверстие на верхней грани, предназначен для изменения массы тела при размещении на нем шайб. К одному из торцов тела прикреплен крючок; г) подставка для шайб **4**, которая соединяется нитью с телом; д) цифровой секундомер **5**, предназначенный для измерения промежутков времени.

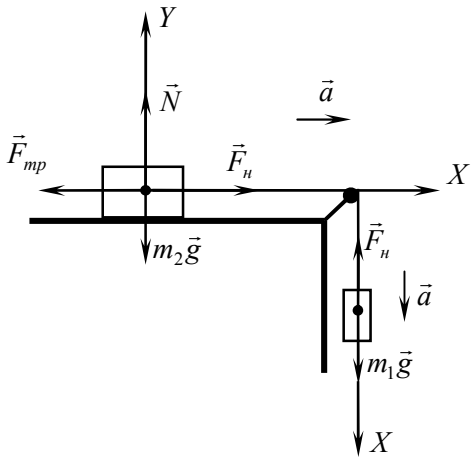

Рис. 13

Рассмотрим движение по горизонтальной поверхности тела массой m_2, связанного нитью, перекинутой через неподвижный блок, с грузом массой m_1 (рис. 13). На тело массой m_2 действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_{н}$. На груз массой m_1 действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_{н}$. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением на оси блока, согласно второму закону Ньютона можем записать:

$$m_2\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_{н} = m_2\vec{a}\,.$$

$$m_1\vec{g} + \vec{F}_{н} = m_1\vec{a}\,.$$

Так как каждую из сил можно считать постоянной, то и сумма векторов этих сил будет постоянной. Следовательно, ускорение, с которым движутся тела, также будет постоянным.

Эти уравнения в проекциях на ось OX и OY принимают следующий вид:

$$\text{OX: } F_{н} - F_{тр} = m_2 a\,; \qquad (1.2.1)$$

$$\text{OY: } N - m_2 g = 0 ; \tag{1.2.2}$$

$$\text{OY: } m_1 g - F_{\text{н}} = m_1 a . \tag{1.2.3}$$

Сложим уравнения (1.2.1) и (1.2.3):

$$m_1 g - F_{\text{тр}} = (m_1 + m_2) a . \tag{1.2.4}$$

Модуль силы трения при движении по горизонтальной поверхности пропорционален силе реакции опоры. С учетом (1.2.2), получим

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu m_2 g , \tag{1.2.5}$$

где N – модуль силы реакции опоры;

μ – коэффициент трения.

Подставив формулу (1.2.5) в (1.2.4), получим

$$m_1 g - \mu m_2 g = (m_1 + m_2) a ,$$

откуда величина коэффициента трения скольжения

$$\mu = \frac{m_1}{m_2} - \frac{(m_1 + m_2) a}{m_2 g} , \tag{1.2.6}$$

где a – ускорение, с которым движется тело.

Пусть за время t от начала движения тело пройдет путь l. Тогда по формуле равноускоренного движения

$$l = \frac{a t^2}{2} ,$$

откуда ускорение

$$a = \frac{2l}{t^2} . \tag{1.2.7}$$

Порядок выполнения работы

1. Разложите основание прибора и на его горизонтальной части вплотную к вертикальной установите в желоб тело **3** деревянной

поверхностью вниз и убедитесь, что выступ на поверхности тела может свободно перемещаться по направляющим желоба (рис. 12).

2. Установите в отверстия, которые расположены в центрах граней тела, два стержня. Один стержень вставляется горизонтально в отверстие на одной из боковых граней тела и предназначается для перекрытия светового пучка оптического датчика. Второй стержень вставляется вертикально в отверстие на верхней грани и предназначен для изменения массы тела.

3. Установите оптоэлектрические датчики на горизонтальной части основания прибора как показано на рисунке (датчик **1** около тела, а датчик **2** на расстоянии l, заданном преподавателем) таким образом, чтобы при движении тела стержень пересекал световые лучи первого и второго оптоэлектрических датчиков.

4. Перекиньте шнур, соединяющий тело **3** и подставку для шайб **4** через блок **5**. Положите на подставку **4** несколько шайб и освободите тело трения. Если тело не движется, увеличьте число шайб на подставке **4** и вновь проверьте характер движения системы. Повторяйте это действие до тех пор, пока система не начнет двигаться равноускоренно.

5. Рассчитайте массу подставки с шайбами m_1 и массу тела m_2 по следующим формулам и результаты запишите в таблицу 1.

$$m_1 = m_{\text{п}} + nm_{\text{ш}},$$

где $m_{\text{п}}$ – масса поставки;

$m_{\text{ш}}$ – масса шайбы;

n – число шайб на подставке 4;

$$m_2 = m_{\text{т}} + km_{\text{ш}},$$

где $m_{\text{т}}$ – масса тела;

$m_{\text{ш}}$ – масса шайбы;

k – число шайб на стержне.

6. Включите цифровой секундомер **6** нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение 2-х секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись r . ⊢

7. Последовательным нажатием кнопки «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектрическими датчиками r . ⊣

Таблица 1

тип поверхности – деревянная, $m_п$ = 8 г, $m_ш$ = 10 г, $m_т$ = , l = , k = , n =								
i	m_1	m_2	t	a	μ	$\mu_{ср}$	$\Delta\mu$	ε_μ
1								
2								
3								
4								
5								

8. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

9. Переместите и удерживайте тело **3** в крайнем положение (у вертикальной части основания прибора), а затем отпустите его. Секундомер производит измерение промежутка времени, в течение которого тело двигалось между датчиками (при пересечении стержнем, установленным на теле **3**, светового луча первого датчика секундомер начнет отсчет времени, а при пересечении светового луча второго датчика закончит). Результат измерения занесите в таблицу.

10. Верните тело в исходное положение. При прохождении тела через световой луч датчика **1** секундомер начнет отсчет времени. Остановите его, перекрыв рукой световой луч датчика **2**.

11. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием любой из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК».

12. Устанавливая тело в одно и то же исходное положение, проведите измерения 5 раз. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

13. Проведите аналогичные измерения (пункты 1–13) для пробковой поверхности. Результаты измерений занесите в таблицу 2.

Таблица 2

тип поверхности – пробковая, $m_п$ = 8 г, $m_ш$ = 10 г, $m_т$ = , l = , k = , n =								
i	m_1	m_2	t	a	μ	$\mu_{ср}$	$\Delta\mu$	ε_μ
1								
2								
3								
4								
5								

14. По формуле (1.2.7) определите ускорение системы тел.

15. По формуле (1.2.6) определите величину коэффициента трения скольжения, а по формуле (12) среднее значение коэффициента трения скольжения $\overline{\mu}$.

16. Вычислите относительную погрешность коэффициента трения скольжения по формуле

$$\varepsilon_{\mu} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta g}{g} + 2\frac{\Delta t}{t},$$

где $\Delta l = 0,5$ мм, $\Delta t = 0,005$ с, а при подстановке значения g = = 9,81 м/с^2 следует считать погрешность этой величины Δg = 0,05 м/с^2. Результат занесите в таблицу.

17. Зная относительную погрешность и среднее значение коэффициента трения скольжения, вычислите среднюю абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta\mu = \varepsilon_{\mu}\overline{\mu}.$$

18. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте основные законы динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела.

2. Что происходит при действии силы трения, в каких пределах она может изменяться, и куда направлена?

3. Какое трение называется внутренним, а какое внешним? Поясните их механизм. В чем принципиальная разница между этими видами трения?

4. Поясните, чем отличаются два вида внешнего трения: кинематическое трение и статическое трение?

5. Сформулируйте и запишите закон статического трения. От чего зависит коэффициент статического трения? Поясните, когда возникает явление застоя и в чем оно заключается.

6. Сформулируйте и запишите закон Амонтона – Кулона для трения скольжения. От чего зависит коэффициент трения скольжения?

7. Назовите причины, вызывающие трение скольжения. Нарисуйте схематично график зависимости коэффициента трения скольжения от скорости тела и поясните его.

8. Сформулируйте закон Кулона для трения качения. Объясните, почему коэффициент трения качения имеет размерность длины. Объясните механизм трения качения.

9. Запишите закон Стокса для внутреннего трения при небольших относительных скоростях движения. Каким выражением будет определяться сила сопротивления при больших относительных скоростях? От чего зависят коэффициенты внутреннего трения?

Лабораторная работа 1.3

ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: освоить метод расчета момента инерции твердого тела и проверить выполнение основного уравнения динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека.

Теоретическое введение

Абсолютно твердое тело – это тело, имеющее определенную форму, которая сохраняется неизменной, т.е. составляющие тело частицы остаются в неизменном положении относительно друг друга. В действительности, любое тело под действием внешних сил способно испытать деформацию или начать колебаться, но обычно эти эффекты очень малы.

Движение твердого тела можно рассматривать как сумму поступательного движения его центра масс и вращательного движения относительно оси, проходящей через его центр масс. Поступательное движение можно представить как сумму независимых поступательных движений по трем координатным осям, а вращение – как сумму вращательных движений около этих осей. Таким образом, движение твердого тела в пространстве в общем случае состоит из трех поступательных и трех вращательных движений – т.е. шести независимых движений.

Число независимых движений, из которых составляется движение твердого тела, называется *числом степеней свободы*. Свободное абсолютно твердое тело имеет шесть степеней свободы. Для описания такого движения требуется шесть независимых уравнений движения, которые можно заменить двумя независимыми векторными уравнениями:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F} \text{ – уравнение движения центра масс,}$$

где $\vec{F}$ – результирующая всех внешних сил, действующих на тело;

$\vec{\upsilon}_c$ – скорость движения центра масс;

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{\text{внеш}} \text{ – уравнение моментов,}$$

где $\vec{L}_0$ – момент импульса тела;

$\vec{M}_0^{\text{внеш}}$ – результирующий момент внешних сил, действующий на тело относительно точки *O*.

Векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ точки, проведенного из точки *O* в точку приложения силы на вектор силы $\vec{F}$, называется *моментом силы относительно точки O*.

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}\,.$$

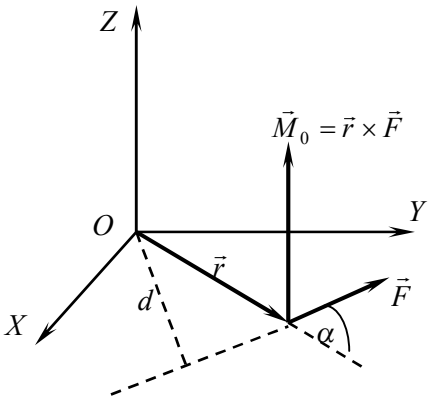

Рис. 14

Моментом силы относительно оси Z называется физическая величина, равная составляющей (проекции) вдоль этой оси момента силы относительно любой точки на этой оси.

$$\vec{M}_Z = \left(\vec{M}_0\right)_Z = \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)_Z.$$

Если на тело действует несколько сил, то суммарный момент этих сил равен сумме моментов всех сил относительно данной точки:

$$\vec{M}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{zi} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right].$$

Модуль вектора момента силы относительно точки *O* равен:

$$M_0 = Fr\sin\alpha = Fd\,,$$

где *d – плечо силы относительно точки O* – расстояние, измеряемое по перпендикуляру от точки *O* до *линии действия силы* (линия, вдоль которой действует сила) (рис. 14).

Таким образом, *модуль момента силы* относительно точки *O* есть скалярная величина, равная произведению модуля силы, действующей на твердое тело, на плечо силы относительно этой точки.

За единицу момента силы принят момент силы 1 Н, плечо которого равно 1 м. $[M] = \text{Н}\cdot\text{м}$.

Векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}_i$ точки, проведенного из точки *O* в движущуюся материальную точку на импульс $m\vec{\upsilon}$ этой материальной точки, называется *моментом импульса (количества движения) материальной точки относительно точки O.*

$$\vec{L}_0 = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}\,.$$

Моментом импульса материальной точки относительно оси Z называется физическая величина, равная составляющей (проекции) вдоль оси момента импульса этой материальной точки относительно любой точки на этой оси.

$$\vec{L}_z = \left(\vec{L}_0\right)_z = \left(\vec{r} \times m\vec{\upsilon}\right)_z\,.$$

Моментом импульса механической системы относительно некоторой точки O называется векторная величина, равная геометрической сумме моментов импульса относительно той же точки всех материальных точек системы.

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times m_i\vec{\upsilon}_i\right].$$

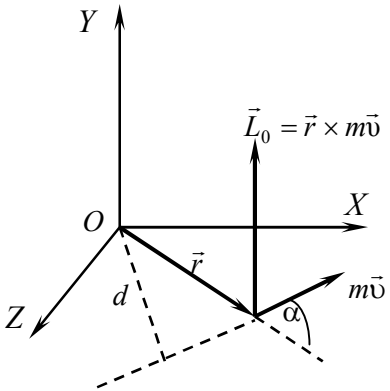

Рис. 15

Модуль вектора момента импульса относительно точки *O* равен:

$$L_0 = rp\sin\alpha = pd\ ,$$

где *d* – плечо импульса относительно точки *O* – это расстояние, измеряемое по перпендикуляру от точки *O* до линии, вдоль которой направлен импульс.

Таким образом, *модуль вектора момента импульса относительно точки O* есть скалярная величина, равная произведению импульса на плечо импульса относительно точки *O* (рис. 15).

За единицу момента импульса принят момент импульса материальной точки, движущейся по окружности радиусом 1 м и имеющей импульс 1 кг·м/с. $[L] =$ кг·м^2/с.

По *закону изменения момента импульса системы материальных точек*, производная по времени от момента импульса системы материальных точек относительно неподвижной точки *O* равна сумме моментов внешних сил относительно этой точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{\text{внеш}}\ .$$

Если момент внешних сил относительно оси Z механической системы равен нулю, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{zi}^{\text{внеш}} = 0$, то момент импульса замкнутой системы тел относительно этой оси с течением времени не изменяется.

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} \equiv 0, \ \vec{L}_z = \text{const}$$

– *закон сохранения момента импульса*.

Физическая величина, являющаяся мерой инертности точки во вращательном движении вокруг некоторой оси Z и равная произведению массы этой точки на квадрат расстояния от точки до оси, называется *моментом инерции материальной точки* относительно этой оси.

$$I_z = mr^2.$$

Моментом инерции тела относительно данной оси называется физическая величина, являющаяся мерой инертности тела во вращательном движении вокруг этой оси и равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний r_i от той же оси.

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} I_{zi} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ .$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$I_z = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \ ,$$

где ρ – плотность тела;

V – объем тела.

Момент инерции зависит только от формы тела и распределения масс по объему тела относительно данной оси. За единицу момента инерции принят момент инерции материальной точки массой 1 кг, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения. $[I] = \text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси облегчается, если воспользоваться *теоремой о параллельном переносе оси вращения (теорема Гюйгенса – Штейнера)*: момент инерции тела I_Z относительно произвольной оси Z равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

$$I_z = I_c + ma^2 .$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси Z, то его кинетическая энергия равна:

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 ,$$

где ω – угловая скорость вращения.

Кинетическую энергию катящегося твердого тела можно представить в виде суммы кинетических энергий двух движений – поступательного со скоростью, равной скорости центра инерции тела, и вращения с некоторой угловой скоростью вокруг мгновенной оси, проходящей через центр инерции:

$$K = \frac{1}{2} m\upsilon_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 .$$

При вращении твердого тела совершается работа только внешними силами, приложенными к телу, так как тело не деформируется и внутренние силы работы не совершают. Эта работа определяется как

$$dA = M_\omega d\varphi = M_z d\varphi_z ,$$

где M_z – результирующий момент внешних сил относительно оси вращения;

$d\varphi_z = \omega_z dt$ – угол поворота тела за рассматриваемый малый промежуток времени.

Работа при вращении тела идет на изменение его кинетической энергии. Так как

$$dK = d\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) = I\omega_z d\omega_z,$$

то

$$M_z d\varphi_z = I\omega_z d\omega_z .$$

Продифференцируем последнее выражение по времени. Учитывая то, что $\frac{d\varphi_z}{dt} = \omega_z$, а $\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_z$, получим *основной закон динамики вращательного движения*: момент силы относительно оси *Z* равен произведению момента инерции относительно этой оси на угловое ускорение, с которым вращается тело.

$$M_z = I_z\varepsilon .$$

Основной закон динамики вращательного движения может быть представлен и в другой форме:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt},$$

т.е. производная момента импульса твердого тела относительно неподвижной оси равна моменту сил относительно той же оси.

Задание 1. Определение момента инерции твердого тела.

Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 16. Основными элементами установки являются: а) основание, состоящее из двух шарнирно соединенных между собой частей, на которых расположены шкалы, цена деления которых составляет один миллиметр; б) оптоэлектрические датчики **1** и **2**, представляющие собой пластмассовый П-образный кожух в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор; в) диск **3**, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси; г) два металлических цилиндрических тела **4,** связанных между собой нитью; д) цифровой секундомер **5**, предназначенный для измерения промежутков времени.

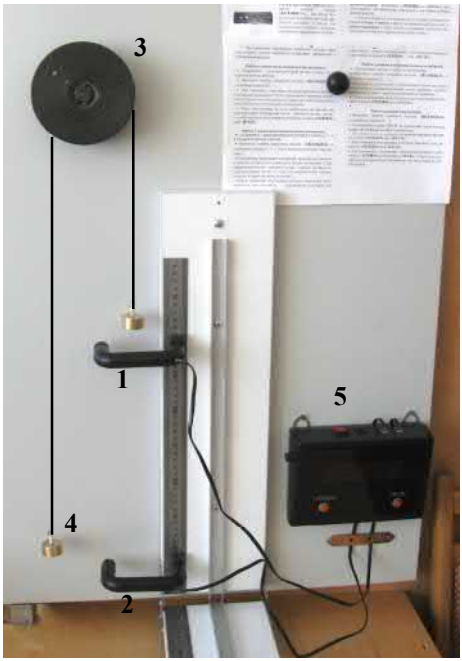

Рис. 16

Момент инерции твердого тела можно определить аналитически, применяя для расчета известные формулы, и экспериментально, изучая вращение тела вокруг неподвижной оси. Рассмотрим один из способов экспериментального определения момента инерции твердого тела относительно закрепленной оси.

Определим момент инерции блока, представляющего собой однородный диск, относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс блока, наблюдая его вращение вокруг этой оси (рис. 17). Если к концам нити, перекинутой через блок, подвесить грузы одинаковой массой m_0 , то система блок – нить – грузы будет неподвижной.

На один из грузов массой m_0 положим перегрузок массой m_1, чтобы грузы пришли в движение. Применяя второй закон Ньютона к каждому из грузов, подвешенных к концам нити, можно записать следующие уравнения движения:

$$(m_0 + m_1)\vec{g} + \vec{F}_{н_1} = (m_0 + m_1)\vec{a}_1,$$

$$m_0\vec{g} + \vec{F}_{н_0} = m_0\vec{a}_0.$$

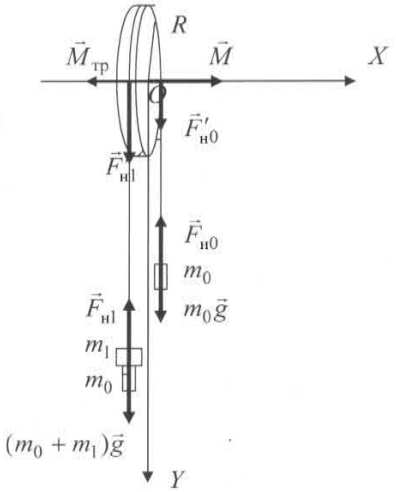

Рис. 17

Согласно основному закону динамики вращательного движения уравнение движения блока имеет следующий вид:

$$I \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M} + \vec{M}_{тр},$$

где I – момент инерции блока относительно оси вращения;

$\vec{\varepsilon}$ – его угловое ускорение;

$\vec{M}$ – момент силы трения покоя;

$\vec{M}_{тр}$ – момент силы трения на оси закрепления блока. Момент инерции блока и моменты сил берутся относительно оси вращения.

В проекциях на оси *OY* и *OX* получим соответственно

$$(m_0 + m_1)g - F_{н_1} = (m_0 + m_1)a_1, \qquad (1.3.1)$$

$$m_0 g - F_{н_0} = -m_0 a_0, \qquad (1.3.2)$$

$$M - M_{\text{тр}} = I \cdot \varepsilon . \tag{1.3.3}$$

Момент силы трения покоя относительно оси вращения (также как относительно центра блока *O*) равен:

$$M = \left(F_{\text{н}_1}^{'} - F_{\text{н}_0}^{'}\right)R , \tag{1.3.4}$$

где R − радиус блока.

Согласно третьему закону Ньютона $F_{\text{н}_0} = F_{\text{н}_0}^{'}$, а $F_{\text{н}_1} = F_{\text{н}_1}^{'}$. Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (1.3.4) и получим

$$M = \left(F_{\text{н}_1} - F_{\text{н}_0}\right)R \tag{1.3.5}$$

Вычтем из уравнения (1.3.2) уравнение (1.3.1), и с учетом того, что $a_1 = a_0 = a$, получим

$$F_{\text{н}_1} - F_{\text{н}_0} = m_1 g - \left(2m_0 + m_1\right)a \tag{1.3.6}$$

Ускорение a поступательного движения груза является тангенциальным ускорением точек обода блока и поэтому связано с угловым ускорением блока соотношением

$$a = \varepsilon R. \tag{1.3.7}$$

С другой стороны, из формулы пути при равноускоренном движении $a = \dfrac{2l}{t^2}$, где l – расстояние, которое прошел каждый груз за время t из состояния покоя. Учитывая это, получим

$$\varepsilon = \frac{2l}{t^2 R} .$$

С учетом соотношений (1.3.6) и (1.3.7) равенство (1.3.4) запишется следующим образом:

$$M = (m_1 g - \left(2m_0 + m_1\right)\varepsilon R)R . \tag{1.3.8}$$

Если использовать перегрузки сначала массой m_1, а потом массой m_2, то (при $m_1 + 2m_0$, $m_2 + 2m_0 << M_{\text{б}}$, где $M_{\text{б}}$ − масса блока)

момент сил трения на оси блока $M_{тр}$ можно считать постоянным. Но различие масс перегрузков приведет к различным значениям моментов сил трения покоя между нитью и блоком и, следовательно, к различным угловым ускорениям ε_1 и ε_2 в указанных двух случаях. Поэтому на основании формулы (1.3.8) в случае перегрузка массой m_1 будем иметь момент силы трения покоя между нитью и блоком

$$M_1 = (m_1 g - (2m_0 + m_1)\varepsilon_1 R)R\,, \tag{1.3.9}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{2l}{Rt_1^2}\,, \tag{1.3.10}$$

а в случае перегрузка массой m_2

$$M_2 = (m_2 g - (2m_0 + m_2)\varepsilon_2 R)R\,, \tag{1.3.11}$$

где

$$\varepsilon_2 = \frac{2l}{Rt_2^2}\,. \tag{1.3.12}$$

При этом согласно уравнению (1.3.3) указанные моменты сил удовлетворяют равенствам

$$M_1 - M_{тр} = I \cdot \varepsilon_1\,,$$

$$M_2 - M_{тр} = I \cdot \varepsilon_2\,.$$

Решая совместно эти уравнения, определим момент инерции блока

$$I = \frac{M_2 - M_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \tag{1.3.13}$$

и момент сил трения на оси блока

$$M_{тр} = \frac{M_1\varepsilon_2 - M_2\varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\,. \tag{1.3.14}$$

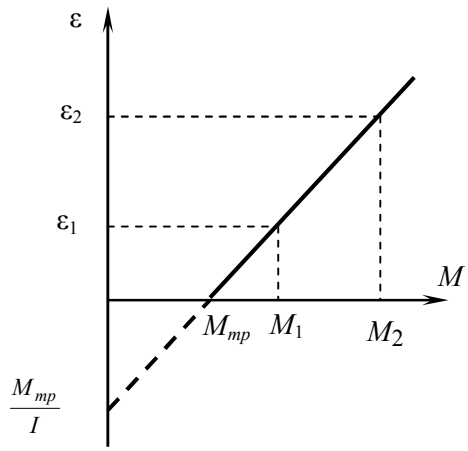

Рис. 18

Величины момента инерции I и момента силы трения $M_{\text{тр}}$ можно определить графически, построив график функции $\varepsilon = \varepsilon(M)$. Этот график в соответствии с формулой (1.3.3) имеет вид прямой линии (рис. 18), уравнение которой

$$\varepsilon = \frac{M}{I} - \frac{M_{\text{тр}}}{I}.$$

Порядок выполнения работы

1. Разложите основание прибора и на его вертикальной части установите оптоэлектрические датчики на расстоянии l между ними таким образом, чтобы датчик **1** находился выше датчика **2** (см. рис. 16). Расстояние l задается преподавателем.

2. Измерьте радиус диска **3** и занесите его значение в таблицу.

3. Установите на диске два связанных нитью груза **4** массой m_0 каждый, и добейтесь, чтобы грузы висели вертикально, не раскачиваясь. Массу m_0 груза занесите в таблицу.

4. Включите цифровой секундомер **5** нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При вклю-

чении в течение 2-х секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись r .

5. Последовательным нажатием кнопки «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектрическими датчиками r .

6. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

7. На груз **4** массой m_0, который будет двигаться между датчиками, положите перегрузок массой m_1 и поднимите их на высоту на несколько сантиметров выше светового луча датчика **1**.

8. Отпустите грузы. Секундомер производит измерение промежутка времени, в течение которого груз двигался между датчиками (при пересечении грузом светового луча первого датчика секундомер начнет отсчет времени, а при достижении грузом светового луча второго датчика закончит). Результат измерения занесите в таблицу.

9. Вращая диск, поднимите грузы на первоначальную высоту. При прохождении груза через световой луч датчика **1** секундомер начнет отсчет времени. Остановите его, перекрыв рукой световой луч датчика **2**.

Таблица

$l =$	$R =$		$m_0 =$		$m_1 =$			$m_2 =$		
i	t_1	$\overline{t_1}$	ε_1	M_1	t_2	$\overline{t_2}$	ε_2	M_2	I	$M_{\text{тр}}$
1										
2										
3										
4										
5										

10. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием любой из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК».

11. Повторите измерения 5 раз и результаты занесите в таблицу.

12. Проведите аналогичные измерения с использованием другого перегрузка массой m_2. Результаты измерений занесите в таблицу.

13. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ» и сложите основание прибора.

14. Для каждого перегрузка вычислите среднее значение времени прохождения пути $\overline{t_1}$ и $\overline{t_2}$, и для каждого из этих значений и по

формулам (1.3.9) – (1.3.12) вычислите значения угловых ускорений ε_1 и ε_2, а также моментов сил M_1 и M_2. Результаты вычислений занесите в таблицу.

15. По формулам (1.3.13), (1.3.14) рассчитайте момент инерции блока I относительно оси вращения и величину момента сил трения на оси блока $M_{тр}$. Результаты вычислений занесите в таблицу.

16. Используя результаты вычислений, постройте график зависимости $\varepsilon=\varepsilon(M)$ по двум точкам (M_1,ε_1) и (M_2,ε_2), и по построенному графику определите (графически) значения величин I и $M_{тр}$.

17. Сравните экспериментально полученные значения момента инерции и момента силы трения с вычисленными по формулам. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Задание 2. Изучение основного уравнения динамики вращательного движения твердого тела.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 19. Основными элементами установки являются: а) основание с жестко закрепленной вертикальной стойкой, на которых расположена шкала, цена деления которой составляет один миллиметр. Посередине вертикальной стойки находится подшипниковый узел, несущий крестообразный маятник и соединенный с ним диск, на который наматывается нить; б) оптоэлектрические датчики **1** и **2**, представляющие собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор. Шнур предназначен для подключения датчика к секундомеру; в) диск **3**, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси; г) на стержнях маятника находятся металлические цилиндрические грузы **4**, которые могут крепиться на различных расстояниях от оси вращения; д) цифровой секундомер **5**, предназначенный для измерения промежутков времени; е) груз **6,** закрепленный на нити, перекинутой через диск **3.**

Рис. 19

Маятник приводится во вращение при помощи груза, подвешенного на нити, намотанной на диск. Под действием этого груза на диск действует момент силы относительно оси вращения, который можно определить как

$$M = F_{\text{н}}^{'} \cdot R, \tag{1.3.15}$$

где R – плечо силы натяжения, равное радиусу диска.

На груз действуют две силы: сила тяжести груза $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{F}_{\text{н}}$ (рис. 20). Ускорение движущегося груза будет направлено вниз.

Спроецируем эти силы на ось Y, которую направим вертикально вверх, и с помощью второго закона Ньютона составим уравнение движения груза:

$$F_{\text{н}} = mg - ma. \tag{1.3.16}$$

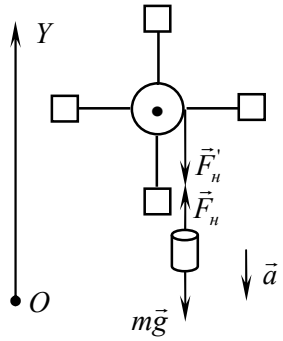

Рис. 20

Согласно третьему закону Ньютона $F_н = F'_н$. Подставив формулу (1.3.16) в (1.3.15), получим

$$M = m\left(g - a\right)R. \tag{1.3.17}$$

Под действием момента силы натяжения нити относительно оси вращения диск приобретает угловое ускорение. Учитывая, что движение происходит с постоянным угловым ускорением, воспользуемся формулой равноускоренного движения груза

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

Подставив эту формулу в (1.3.17), получим

$$M = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right)R. \tag{1.3.18}$$

Так как нить разматывается без проскальзывания, линейное ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек, лежащих на поверхности диска. Используя связь между угловым и тангенциальным ускорениями, получим формулу для определения углового ускорения системы:

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{a}{R} = \frac{2h}{t^2 R}. \qquad (1.3.19)$$

При постоянном моменте инерции крестообразного маятника (грузы **4** на стержнях находятся в одном и том же закрепленном положении – рис. 19), и двух различных грузах **6** на нити имеем

$$M_1 = I \cdot \varepsilon_1, \quad M_2 = I \cdot \varepsilon_2.$$

Разделив одно уравнение на второе, получим

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \qquad (1.3.20)$$

Выполнение соотношения (1.3.20) в пределах погрешности опыта может служить критерием справедливости основного уравнения динамики вращательного движения.

Порядок выполнения работы

1. Установите оптоэлектрические датчики на расстоянии *h* между ними таким образом, чтобы датчик **1** находился выше датчика **2** (см. рис. 19). Расстояние *h* устанавливается путем перемещения нижнего кронштейна и задается преподавателем. Его значение занесите в таблицу.

2. Измерьте радиус диска **3** и занесите его значение в таблицу.

3. Закрепите грузы **4** крестообразного маятника на четырех стержнях крестовины на самом дальнем расстоянии от центра, что соответствует максимальному моменту инерции системы (рис. 19).

4. Включите цифровой секундомер **5** нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение 2-х секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись r .

5. Последовательным нажатием кнопки «РЕЖИМ» установите режим работы с двумя оптоэлектрическими датчиками r .

6. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

7. Вращая крестовину против часовой стрелки, наматывайте нить на диск до тех пор, пока нижний край груза **6** массой m_0 не поднимется на высот, на несколько сантиметров выше светового луча датчика **1**, и придержите.

8. Отпустите груз. Секундомер производит измерение промежутка времени, в течение которого груз двигался между датчиками. Результат измерения занесите в таблицу.

9. Вращая диск, поднимите груз на первоначальную высоту. При прохождении груза через световой луч датчика **1** секундомер начнет отсчет времени. Остановите его, перекрыв рукой световой луч датчика **2**.

10. Сбросьте показание секундомера на нуль нажатием любой из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК».

11. Повторите измерения 5 раз и результаты занесите в таблицу.

Таблица

$h =$, $R =$, $m_0 =$, $\Delta m =$, $m =$									
	i	t_1	$\overline{t_1}$	t_2	$\overline{t_2}$	M_1	M_2	ε_1	ε_2
$\boldsymbol{I_{max}}$	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
$\boldsymbol{I_{min}}$	1								
	2								
	3								
	4								
	5								

12. Положите на груз **6** массой m_0 дополнительный перегрузок массой Δm. Определите суммарную массу $m = m_0 + \Delta m$ и занесите рассчитанный результат в таблицу.

13. Повторите измерения 5 раз для груза массой m. Результаты измерений занесите в таблицу.

14. Переместите грузы **4** крестообразного маятника на четырех стержнях крестовины на самое близкое расстояние от центра, что соответствует минимальному моменту инерции системы, и закрепите их.

15. Повторите измерения (пункты 7–12) для грузов массой m_0 и m по 5 раз и результаты занесите в таблицу.

16. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ».

17. Для каждой массы вычислите среднее значение времени прохождения пути $\overline{t_1}$ и $\overline{t_2}$, и для каждого из этих значений по формулам (1.3.18), (1.3.19) вычислите значения угловых ускорений ε_1 и ε_2, а также моментов сил M_1 и M_2. Результаты вычислений занесите в таблицу.

18. По формуле (1.3.20) проверьте выполняемость равенства в пределах погрешности опыта. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы понимаете под абсолютно твердым телом?

2. Какими уравнениями можно описать движение абсолютно твердого тела? Сколькими степенями свободы оно обладает?

3. Дайте определение момента силы относительно неподвижной точки; относительно неподвижной оси. Назовите единицу измерения.

4. Чему равен модуль момента силы? Какая величина называется плечом силы? Поясните при помощи рисунка. Что вы понимаете под линией действия силы?

5. Дайте определение момента импульса материальной точки относительно неподвижной точки; относительно неподвижной оси. Назовите единицу измерения.

6. Дайте определение момента импульса системы относительно неподвижной точки. Как определяется модуль вектора момента импульса относительно оси?

7. Сформулируйте и запишите закон изменения момента импульса; закон сохранения момента импульса.

8. Дайте определение момента инерции материальной точки относительно оси. Назовите единицу измерения.

9. Сформулируйте и запишите теорему Гюйгенса – Штейнера.

10. Чему равна кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Как определяется работа, совершаемая внешними силами, при вращении твердого тела?

11. Сформулируйте и запишите основной закон динамики вращательного движения твердого тела.

Лабораторная работа 1.4

ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ФИЗИЧЕСКОГО И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

Цель работы: измерить период колебаний физического маятника, определить его приведенную длину и момент инерции; с помощью математического маятника определить ускорение свободного падения.

Теоретическое введение

Колебательным движением называют такое движение, которое характеризуется повторяемостью во времени значений физических величин, определяющих движение или состояние. Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебания, повторяются через равные промежутки времени. *Для возникновения механических колебаний* необходимо выполнение определенных условий:

– наличие источника энергии, вызывающего смещение тела относительно положения равновесия;

– наличие силы, направленной противоположно смещению;

– малые потери энергии на трение колеблющегося тела.

Любое колебание характеризуется следующими параметрами:

Смещение x – величина, равная отклонению тела от положения равновесия в данный момент времени.

Амплитуда колебаний A – величина, равная максимальному отклонению тела от положения равновесия.

Период колебаний T – наименьший промежуток времени, через который система, совершающая колебания, снова возвращается в то же состояние, в котором она находилась в начальный момент, выбранный произвольно.

Частота колебаний ν – величина, равная числу колебаний, совершаемых в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклическая частота ω – величина, равная числу полных колебаний, совершающихся за 2π единиц времени:

$$\omega = 2\pi\nu .$$

Фаза колебаний ($\omega t + \alpha_0$) – величина, определяющая смещение в любой момент времени.

Простейший вид периодических колебаний – это гармонические колебания. *Гармонические колебания* – это периодическое изменение во времени физической величины, происходящее по закону косинуса или синуса. *Уравнение гармонических колебаний* имеет вид

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \text{ или } x = A\sin\left(\omega t + \varphi_1\right),$$

где величины $A, \omega_0, \alpha -$ постоянны; $\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{\pi}{2}$.

Продифференцировав уравнение гармонических колебаний по времени, получим выражение для *проекции скорости* материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Продифференцировав уравнение скорости по времени, получим выражение для *проекции ускорения* материальной точки, совершающей гармонические колебания,

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = -A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0\right).$$

Второй закон Ньютона позволяет в общем виде записать связь между силой и ускорением при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки:

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) = -m\omega^2 x ,$$

где F_x – проекция силы на направление оси *OX*, вдоль которой совершаются колебания.

Гармонические колебания совершаются под действием упругой силы, пропорциональной смещению и направленной к положению

равновесия. Силы, имеющие другую природу, чем упругие силы, но удовлетворяющие последнему соотношению, называются *квазиупругими.*

$$F_x = -kx\,,$$

где $k = m\omega^2$ – коэффициент квазиупругой силы.

Смещение как функция времени является решением дифференциального уравнения гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0\,.$$

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную энергию и обратно, причем полная энергия гармонических колебаний должна оставаться постоянной. *Потенциальная и кинетическая энергии* гармонических колебаний определяются соотношениями:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\left(\omega t + \varphi_0\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2\left(\omega t + \varphi_0\right);$$

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\left(\omega t + \varphi_0\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\,.$$

Следовательно, *полная энергия гармонического колебания*, состоящая из суммы кинетической и потенциальной энергий, равна:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\,.$$

В физике под маятником понимают твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке. Период малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина нити;

g – ускорение свободного падения.

Пружинный маятник – это система, состоящая из упругой невесомой пружины, к концу которой прикреплена материальная точка, совершающая гармонические колебания, период которых

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где k – жесткость пружины;

m – масса материальной точки.

Физический маятник – это абсолютно твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку, не совпадающую с центром масс тела. Период малых колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}},$$

где I – момент инерции маятника относительно оси подвеса;

L – расстояние от оси подвеса до центра масс маятника.

Приведенной длиной физического маятника $L_{\text{пр}}$ называется длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром масс, и лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется *центром качаний физического маятника*. Точка подвеса и центр качаний обладают *свойством взаимности*: при переносе точки подвеса в центр качаний прежняя точка подвеса становится новым центром качаний и период колебаний не меняется.

Во всех реальных колебательных системах происходит уменьшение энергии системы, и если ее не восполнять за счет работы внешних сил, то колебания будут затухать. *Затухающие колебания*

– это колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается. *Дифференциальное уравнение затухающих колебаний* имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

где ω_0 – *собственная частота*, т.е. частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды;

β – коэффициент затухания.

В случае малого затухания, когда $\beta << \omega_0$, решение дифференциального уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right),$$

где $A = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затухающих колебаний.

Для характеристики быстроты затухания используется *логарифмический декремент затухания* – безразмерная величина, равная натуральному логарифму отношения значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период

$$\Theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

Время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз, называется *временем релаксации*.

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

Для характеристики колебательной системы часто используется *добротность* колебательной системы – безразмерная величина, равная произведению 2π на отношение энергии колебаний системы в произвольный момент времени *t* к убыли этой энергии за промежуток времени от *t* до *t* + *T*, т.е. за один условный период затухающих колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)}.$$

Задание 1. Определение характеристик малых колебаний физического маятника.

Описание установки и метода измерений

Рис. 21

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 21. Основными элементами установки являются: а) металлический стержень **1**, подвешенный на кронштейне. На стержне с помощью винта закреплен стальной цилиндр **2**. Цилиндр может перемещаться вдоль стержня и фиксироваться в нужном положении; б) оптоэлектрический датчик **3**, представляющий собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор. При первом пересечении телом светового луча датчика, секундомер начнет отсчет времени, и после

завершения полного периода колебаний остановится; в) цифровой секундомер **4**, предназначенный для измерения промежутков времени; г) металлическая призма для определения центра масс.

Из определения приведенной длины физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{\text{пр}}}{g}}, \qquad (1.4.1)$$

Тогда приведенная длина физического маятника равна:

$$L_{\text{пр}} = \frac{I}{mL}. \qquad (1.4.2)$$

Применив теорему Штейнера, получим

$$L_{\text{пр}} = \frac{I}{mL} = \frac{I_c + mL^2}{mL} = \frac{I_c}{mL} + L,$$

где I – момент инерции относительно оси колебаний;

I_c – момент инерции относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс маятника;

L – расстояние от центра масс до оси колебаний.

Порядок выполнения работы

1. Снимите маятник с кронштейна и укрепите цилиндр **2** при помощи зажимного винта на расстоянии d от нижнего конца стержня **1** (см. рис. 21). Расстояние d задается преподавателем. Занесите в таблицу это расстояние, а также массы стержня и цилиндра, которые указаны на них.

2. Установите маятник на кронштейн и расположите оптоэлектрический датчик **3** (на датчике надпись № 1) таким образом, чтобы конец стержня при своем движении перекрывал световой луч датчика и свободно проходил через створ датчика (см. рис. 21).

3. Включите цифровой секундомер **4** нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение 2-х секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись r .⊢

4. Последовательным нажатием кнопки «РЕЖИМ» установите режим измерения периода колебаний r

5. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

6. Отклоните маятник на небольшой угол (не более 10 градусов) от положения равновесия и отпустите. Секундомер произведет измерение периода колебаний. Результат измерения занесите в таблицу.

7. Выполните сброс секундомера на нуль нажатием любой из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК» и измерьте следующее полное колебание (повторите выполнение пункта 6). Повторите измерения 5 раз.

Таблица

$d =$, $m_{ст} =$, $m_ц =$, $l =$, $L =$, $a =$, $h =$, $R =$										
i	T	$\overline{T}$	ΔT	$\Delta\overline{T}$	$L^э_{пр}$	$L^т_{пр}$	$I^э_0$	$I^т_0$	$\varepsilon_{L_{пр}}$	$\Delta L_{пр}$
1										
2										
3										
4										
5										
6										

8. По формуле (12) найдите среднее значение периода колебаний $\overline{T}$, а по формулам (17), (18) абсолютную погрешность ΔT измерений и ее среднее значение $\Delta\overline{T}$.

9. Снимите маятник с кронштейна и с помощью металлической призмы определите центр масс физического маятника. С помощью линейки измерьте расстояния (см. рис. 22):

– от центра масс маятника до оси вращения L;

– от центра масс цилиндра до оси вращения a;

– длину стержня l;

– высоту цилиндра h;

– радиус цилиндра R.

Результаты измерений занесите в таблицу.

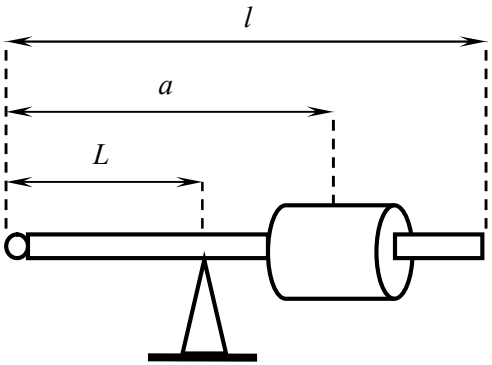

Рис. 22

10. Согласно формуле (1.4.1), используя среднее значение периода колебаний $\overline{T}$, вычислите момент инерции $I_0^{\text{э}}$ и приведенную длину $L_{\text{пр}}^{\text{э}}$ физического маятника с учетом того, что $m = m_{\text{ст}} + m_{\text{ц}}$:

$$I_{\text{о}}^{\text{э}} = \frac{mgL}{4\pi^2}\overline{T}^2, \qquad L_{\text{пр}}^{\text{э}} = \frac{I_0^{\text{э}}}{mL} = \frac{g\overline{T}^2}{4\pi^2}.$$

11. Вычислите теоретическое значение момента инерции маятника по формуле

$$I_0^{\text{т}} = I_{\text{ст}} + I_{\text{ц}},$$

где $I_{\text{ст}}$ – момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, равный

$$I_{\text{ст}} = \frac{1}{3}m_{\text{ст}}l^2.$$

Момент инерции цилиндра $I_{\text{ц}}$ относительно оси колебаний определяется по теореме Штейнера:

$$I_{\text{ц}} = I_z + m_{\text{ц}}a^2,$$

где a – расстояние от центра масс цилиндра до оси вращения;

I_z – момент инерции цилиндра относительно оси Z, перпендикулярной оси симметрии цилиндра и проходящей через его центр масс, равный

$$I_z = m_{\text{ц}}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right),$$

где R – радиус цилиндра;

h – высота цилиндра.

12. Используя полученное значение $I_0^{\text{т}}$, по формуле (1.4.2) определите теоретическое значение приведенной длины $L_{\text{пр}}^{\text{т}}$ физического маятника.

13. Вычислите относительную погрешность приведенной длины физического маятника по формуле

$$\varepsilon_{L_{\text{пр}}} = \frac{\Delta g}{g} + 2\frac{\Delta \overline{T}}{\overline{T}} + 2\frac{\Delta \pi}{\pi},$$

где при подстановке значения $\pi = 3{,}14$ следует, согласно табличным данным, считать погрешность этой величины $\Delta\pi = 0{,}005$, а $\Delta g = 0{,}05$ м/с^2. Результат занесите в таблицу.

14. Зная относительную погрешность и приведенную длину физического маятника, вычислите среднюю абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta L_{\text{пр}} = L_{\text{пр}}\varepsilon_{L_{\text{пр}}}.$$

15. Сравните экспериментально измеренное и теоретически вычисленное значения приведенной длины и момента инерции физического маятника. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Задание 2. Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

Описание установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 23. Основными элементами установки являются: а) шарик **1** подвешенный на нити, закрепленной на кронштейне; б) оптоэлектрический датчик **2**, представляющий собой пластмассовый П-образный кожух, в котором на одной оптической оси размещены светодиод и фототранзистор; в) цифровой секундомер **3**, предназначенный для измерения промежутков времени.

Рис. 23

Математический маятник является частным случаем физического маятника, когда вся масса тела сосредоточена в одной материальной точке, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити.

Ускорение, которое сообщает телу сила притяжения к Земле (без учета суточного вращения Земли), называется *ускорением свободного падения* $\vec{g}$. Согласно закону всемирного тяготения сила, с которой материальная точка массой *m* притягивается к Земле, равна:

$$F = G\frac{mM}{R^2},$$

где G – гравитационная постоянная ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^2/(кг·с^2));

M – масса Земли ($M = 5{,}99 \cdot 10^{24}$ кг);

R – среднее расстояние от точки на поверхности Земли до центра Земли.

Сила притяжения F при условии, что тело находится вблизи поверхности Земли, сообщает телу ускорение свободного падения g.

$$F = mg.$$

Приравнивая оба выражения силы, получим

$$g = G\frac{M}{R^2} \approx 9{,}81 \text{ м/с}^2.$$

Последнее выражение показывает, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела и в данной точке над поверхностью Земли для всех тел одинаковое.

Вращение Земли вокруг своей оси и тот факт, что Земля имеет форму эллипсоида, а не сферы, приводят к тому, что ускорение свободного падения зависит от географической широты местности. По этой причине на полюсах Земли g = 9,83 м/с^2, на экваторе g = 9,78 м/с^2. Кроме того, при средней плотности Земли ρ = 5500 кг/м^3 плотность разных частей земной коры отличается от средней. Это также является причиной отклонения величины ускорения свободного падения от значения 9,8 м/с^2.

В данной лабораторной работе ускорение свободного падения определяется с помощью математического маятника. Как следует из формулы периода малых колебаний математического маятника, величину g можно найти, если измерить длину нити маятника l и период колебаний T:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Более удобно измерить периоды малых колебаний математического маятника T_1 и T_2 при двух различных длинах нити l_1 и l_2 и затем определить величину g в зависимости от разности $l_1 - l_2$. При этом из выражений

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}, \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \tag{1.4.3}$$

получаем расчетную формулу

$$g = \frac{4\pi^2 (l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \tag{1.4.4}$$

Порядок выполнения работы

1. В качестве математического маятника используется шарик **1,** подвешенный на нити, закрепленной на кронштейне (см. рис. 23).

2. Разложите основание прибора и на его вертикальной части установите оптоэлектрический датчик **2** (на датчике надпись № 1) таким образом, чтобы центр шарика при своем движении перекрывал световой луч датчика и свободно проходил через створ датчика.

3. Измерьте расстояние от центра шарика до точки подвеса l_1 (длину математического маятника) и запишите его в таблицу.

4. Включите цифровой секундомер **3** нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ», расположенную сверху прибора. При включении в течение 2-х секунд прибор переходит в состояние выбора режима работы и на экране появляется надпись r .

5. Последовательным нажатием кнопки «РЕЖИМ» установите режим измерения периода колебаний r .

6. Для активации работы прибора в выбранном режиме нажмите и удерживайте кнопку «ПУСК» до появления нулей на табло индикатора.

7. Отклоните шарик **1** на небольшой угол (не более 10 градусов) от положения равновесия и отпустите. При первом пересечении светового луча датчика, секундомер начнет отсчет времени, и после завершения полного колебания остановится.

8. Не прерывая колебаний, выполните сброс секундомера на нуль нажатием любой из кнопок «РЕЖИМ» или «ПУСК» и измерьте время следующего полного колебания. Повторите измерения 5 раз и результаты измерений занесите в таблицу.

Таблица

$l_1 =$					$l_2 =$				$l_1 - l_2 =$		
i	T_1	$\overline{T_1}$	ΔT_1	$\Delta\overline{T_1}$	T_2	$\overline{T_2}$	ΔT_2	$\Delta\overline{T_2}$	g	Δg	ε_g
1											
2											
3											
4											
5											

9. Проведите измерения, аналогичные описанным в пунктах 7-8, для другой длины математического маятника l_2. Для этого укоротите нить, намотав ее на кронштейн, и переместите датчик **2** на верхнюю часть шкалы.

10. После окончания измерений выключите цифровой секундомер нажатием на красную кнопку «ВКЛ/ВЫКЛ» и сложите основание прибора.

11. Рассчитайте периоды колебаний T_1 и T_2 по формуле (1.4.3) для каждого опыта и найдите по формуле (12) средние значения этих величин, т.е. $\overline{T_1}$ и $\overline{T_2}$. Результаты занесите в таблицу.

12. По формулам (17), (18) рассчитайте абсолютные погрешности ΔT_1 и ΔT_2 каждого опыта и их средние абсолютные погрешности $\Delta\overline{T_1}$ и $\Delta\overline{T_2}$. Результаты занесите в таблицу.

13. Вычислите среднее значение ускорения свободного падения по формуле (1.4.4), подставляя в нее известное значение $l_1 - l_2$ и средние значения периодов колебаний $\overline{T_1}$ и $\overline{T_2}$.

14. Вычислите относительную погрешность ускорения свободного падения по формуле

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{\overline{g}} = 2\frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta l}{l_1 - l_2} + 2\frac{\overline{T}_1 \Delta \overline{T}_1 + \overline{T}_2 \Delta \overline{T}_2}{\overline{T}_1^2 - \overline{T}_2^2},$$

где при подстановке значения $\pi = 3{,}14$ следует, согласно табличным данным, считать погрешность этой величины $\Delta\pi = 0{,}002$, $\Delta l = 1$ см. Результат занесите в таблицу.

15. Зная относительную погрешность и среднее значение ускорения свободного падения, вычислите среднюю абсолютную ошибку по формуле

$$\Delta g = \overline{g} \cdot \varepsilon_g .$$

16. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе и запишите окончательный результат в виде

$$g = \left(\overline{g} \pm \Delta g\right) \text{ м/с}^2.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение называется колебательным? Дайте определение периодических колебаний.

2. Перечислите условия, необходимые для возникновения механических колебаний. Назовите параметры, характеризующие любое колебание. Дайте определение каждого из параметров.

3. Какие колебания называются гармоническими? Запишите уравнение гармонических колебаний и объясните физический смысл входящих в него величин.

4. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний.

5. Из чего состоит полная энергия гармонического колебания? Запишите формулу полной, кинетической и потенциальной энергий гармонического колебания.

6. Что в физике понимают под маятником? Перечислите виды маятников.

7. Дайте определение физического маятника и объясните, под действием каких сил (моментов сил) происходят его колебания. При каком условии колебания физического маятника являются гармоническими? Запишите формулу периода гармонических колебаний физического маятника и объясните физический смысл входящих в нее величин.

8. Дайте определение математического маятника и объясните, под действием каких сил происходят его колебания. При каком условии колебания маятника будут гармоническими? Запишите формулу периода колебаний математического маятника и объясните физический смысл входящих в нее величин.

9. Дайте определение пружинного маятника и объясните, под действием каких сил происходят его колебания. Запишите формулу периода колебаний пружинного маятника и объясните физический смысл входящих в нее величин.

10. Что такое приведенная длина физического маятника? Дайте определение центра качания физического маятника. Сформулируйте свойство взаимности.

11. Какие колебания называются затухающими? Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

12. Дайте определение логарифмического декремента затухания, времени релаксации и добротности колебательной системы.

Лабораторная работа 1.5

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ ПРИ УПРУГОМ УДАРЕ

Цель работы: проверить законы сохранения импульса и энергии при центральном упругом ударе и определить коэффициенты восстановления скорости и энергии соударяющихся тел.

Теоретическое введение

Универсальной мерой различных форм движения и взаимодействия служит физическая величина, называемая *энергией*. Энергия механической системы количественно характеризует эту систему с точки зрения возможных в ней количественных и качественных превращений движения. Эти превращения обусловлены взаимодействием тел системы как между собой, так и с внешними (по отношению к системе) телами.

Соударяющиеся тела образуют *замкнутую систему* – механическую систему тел, на которую не действуют внешние силы. *Механической системой* называется совокупность материальных точек, рассматриваемых как единое целое. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются *внутренними*. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются *внешними*.

Пусть материальная точка массой m движется со скоростью $\vec{\upsilon}$. Второй закон Ньютона для этой материальной точки имеет вид:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{\upsilon}\right)}{dt},$$

где $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ – результирующая всех сил, действующих на материальную точку.

Физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость, называется *импульсом тела* (или *количеством движения*),

$$m\vec{\upsilon} = \vec{p}\,.$$

Единица измерения в СИ – килограмм-метр на секунду $\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}\right]$.

Тогда второй закон Ньютона принимает следующий вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}\,.$$

В таком виде основной закон динамики материальной точки (поступательно движущегося тела) означает, что производная импульса материальной точки (тела) по времени равна результирующей всех сил, приложенных к этой точке.

Умножим обе части последнего равенства на *dt* и получим

$$\vec{F}dt = d\vec{p}\,.$$

Векторная величина, равная произведению вектора силы на малый промежуток времени ее действия, называется *элементарным импульсом силы*. Таким образом, изменение импульса материальной точки за элементарный промежуток времени равно элементарному импульсу силы, действующей на материальную точку, за тот же промежуток времени.

В случае замкнутой механической системы внешние силы отсутствуют. Тогда импульс системы тел равен

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i\right) = 0\,,\ \text{или}\ \ \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = \text{const}$$

– *закон сохранения импульса системы материальных точек*: импульс замкнутой системы материальных точек не изменяется с течением времени.

Полной механической энергией системы материальных точек (тел) называется сумма кинетических энергий всех материальных точек (тел) и их потенциальных энергий.

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения. *Кинетической энергией тела* называется

физическая величина, изменение которой равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на это тело:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Таким образом, кинетическая энергия есть количественная мера способности движущегося тела совершать работу. При плоском движении кинетическая энергия тела слагается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью, равной скорости центра масс, и кинетической энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс тела, т.е.

$$K = K_{\text{п}} + K_{\text{вр}} = \frac{1}{2} m \upsilon_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 ,$$

где $K_{\text{п}} = \frac{1}{2} m \upsilon_c^2$ – кинетическая энергия поступательного движения тела;

$K_{\text{вр}} = \frac{1}{2} I \omega^2$ – кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, всегда положительна и неодинакова в разных инерциальных системах отсчета.

Механическая энергия системы тел, обусловленная их взаимным расположением в пространстве и характером сил взаимодействия между ними называется *потенциальной энергией взаимодействия тел системы*. Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы и зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам. *Потенциальной энергией тела* называется физическая величина, изменение которой, взятой со знаком минус, равно работе действующей на него консервативной силы:

$$-\Delta П = П_1 - П_2 = A_{\text{конс}} .$$

Сила называется *консервативной*, если работа этой силы при перемещении тела из начальной точки в конечную, не зависит от

формы траектории, соединяющей эти точки, а зависит от положения этих точек в пространстве. Консервативными являются сила упругости, гравитационная сила и сила тяжести.

При расчете потенциальной энергии во внешнем силовом поле произвольно выбирают *нулевой уровень* – положение, в котором потенциальная энергия полагается равной нулю. Различают:

а) потенциальную энергию тела в поле силы тяжести

$$П = mgh;$$

б) потенциальную энергию упруго деформированного тела

$$П = \frac{1}{2}kx^2;$$

в) потенциальную энергию в поле сил тяготения

$$П = -G\frac{mM}{r}.$$

Полная механическая энергия системы тел, на каждое из которых действуют только консервативные силы, есть величина постоянная.

$$E = K + П = \text{const}$$

– закон сохранения механической энергии.

Под *столкновением* частиц или тел понимается их кратковременное взаимодействие. Частным случаем столкновений является удар. *Ударом* называется кратковременное взаимодействие сталкивающихся тел, приводящее к изменению скоростей на конечную величину за очень малый промежуток времени. Линия, проходящая через точку соприкосновения двух соударяющихся тел нормально к их поверхности, называется *линией удара*. Если центры масс соударяющихся тел лежат на этой линии, то удар называется *центральным*, в противном случае – *нецентральным* (рис. 24).

Различают прямой и косой удары. Удар называется *прямым*, если векторы скорости тел параллельны линии улара. Если же векто-

ры скорости тел направлены под углом к линии удара, то такой удар называется *косым*.

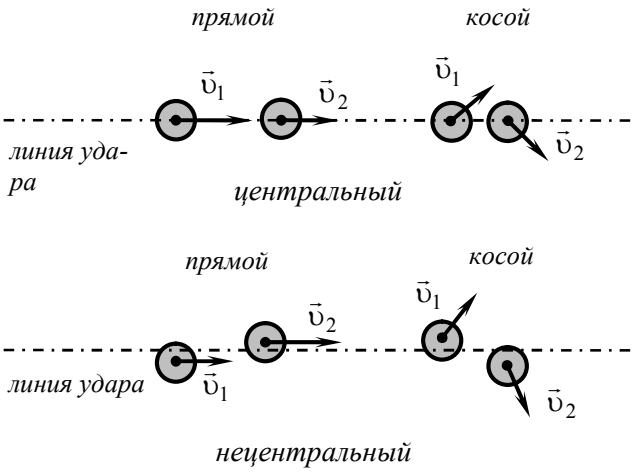

Рис. 24

По последствиям удара различают упругий и неупругий удары. Удар называется *абсолютно упругим*, если механическая энергия соударяющихся тел не превращается в другие немеханические виды энергии (например, тепловую), а форма и объем тела полностью восстанавливаются. Удар называется *абсолютно неупругим*, если возникающая при ударе деформация полностью сохраняется. Кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию.

Процесс соударения можно разделить на две фазы. *Первая фаза* длится с момента соприкосновения тел до возникновения наибольшей их деформации. С появлением деформаций на соударяющиеся тела в точке их соприкосновения начинают действовать ударные силы (силы реакции), поэтому скорости тел изменяются до тех пор, пока не станут одинаковыми. Абсолютно неупругий удар на этом и заканчивается.

При абсолютно упругом ударе с появлением деформаций возникают упругие силы, которые возрастают с увеличением деформа-

ции. При этом кинетическая энергия относительного движения тел переходит в потенциальную энергию упругой деформации.

Во *второй фазе* под действием сил упругости тела отталкивают друг друга, а их форма возвращается к первоначальному виду. При этом потенциальная энергия упругой деформации полностью превращается в кинетическую энергию и тела разлетаются.

Удары реальных тел не абсолютно упруги, так как всегда имеет место потери механической энергии на создание остаточной деформации, нагревание и др. Для учета этих потерь вводят *коэффициент восстановления кинетической энергии*, определяемый как отношение кинетической энергии системы соударяющихся тел после удара к кинетической энергии системы соударяющихся тел непосредственно перед ударом:

$$k_э = \frac{K'}{K} = \frac{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2}{m_1 \upsilon_1^2 + m_2 \upsilon_2^2},$$

где K – кинетическая энергия системы соударяющихся тел непосредственно перед ударом;

K' – кинетическая энергия системы соударяющихся тел после удара;

υ_1 и υ_2 – скорости одного и второго тел перед столкновением;

u_1 и u_2 – то же после столкновения.

Величина коэффициента восстановления кинетической энергии зависит от соотношения масс тел и их скоростей. При абсолютно упругом ударе $k_э = 1$, а при абсолютно неупругом $k_э < 1$.

Для полной характеристики удара вводят *коэффициент восстановления скорости*, определяемый для прямого удара как отношение проекций на линию удара относительных скоростей тел после столкновения и до него:

$$k_c = \frac{|u_1 - u_2|}{|\upsilon_1 - \upsilon_2|}.$$

Величина коэффициента восстановления скорости зависит от физических свойств материала соударяющихся тел. При абсолютно упругом ударе $k_c = 1$, а при абсолютно неупругом $k_c = 0$.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 25. Установка представляет укрепленный на основании штатив **1**, в верхней части которого имеется горизонтальная площадка **5**, к которой крепятся подвесы с исследуемыми металлическими шарами **2** и **3**. Углы отклонения шаров от положения равновесия измеряются по угловым шкалам **4**. Через подвесы проходят провода, подводящие напряжение к шарам, что позволяет по частотомеру **6** измерять время взаимодействия шаров при ударе.

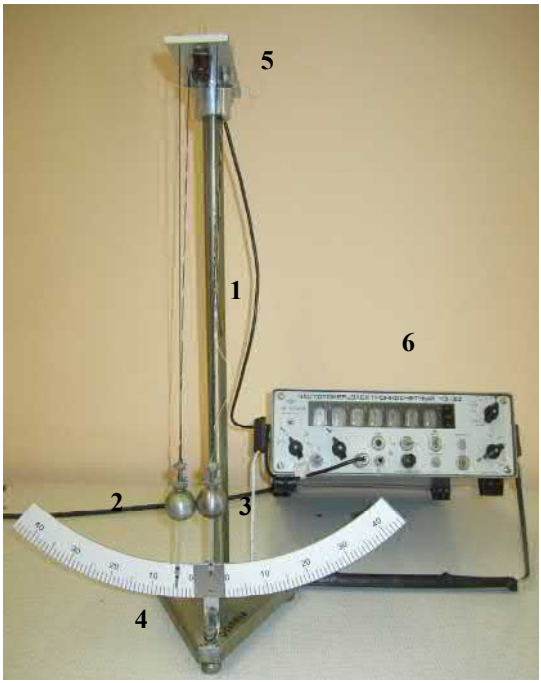

Рис. 25

Рассмотрим абсолютно упругий удар. При отклонении шара на угол α от положения равновесия (рис. 26), его центр тяжести поднимется на высоту

$$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

где l – расстояние от точки подвеса до центра шара.

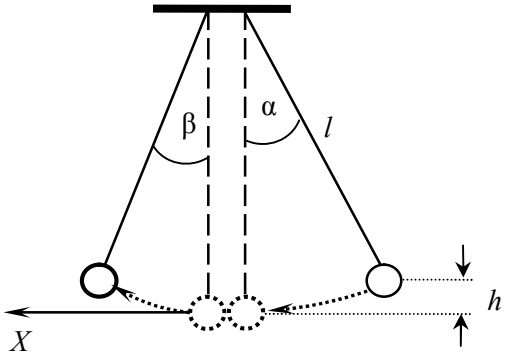

Рис. 26

Когда шар начнет двигаться к положению равновесия, его потенциальная энергия начнет уменьшаться, а кинетическая энергия – увеличиваться и достигнет максимального значения при прохождении положения равновесия. Согласно закону сохранения механической энергии потенциальная энергия отклоненного шара равна его кинетической энергии при прохождении положения равновесия при условии, что положение равновесия принято за нулевой уровень потенциальной энергии,

$$mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Отсюда следует, что скорость шара при прохождении положения равновесия

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (1.5.1)$$

Коэффициент восстановления скорости определяется как отношение относительных скоростей шаров после удара к относительной скорости до удара:

$$k_c = \frac{u_{лх} - u_{пх}}{\upsilon_{пх} - \upsilon_{лх}},$$

где $\upsilon_{пх}$ и $\upsilon_{лх}$ – скорости правого и левого шаров до удара;

$u_{пх}$ и $u_{лх}$ – скорости правого и левого шаров после удара.

Коэффициент восстановления кинетической энергии равен отношению кинетических энергий двух соударяющихся шаров после и до удара:

$$k_э = \frac{m_л u_л^2 + m_п u_п^2}{m_л \upsilon_л^2 + m_п \upsilon_п^2}.$$

Так как $\upsilon_{лх} = 0$ (левый шар находился в состоянии покоя до момента соударения с правым шаром), то коэффициент восстановления скорости равен:

$$k_c = \frac{u_{лх} - u_{пх}}{\upsilon_{пх}}, \qquad (1.5.2)$$

а коэффициент восстановления кинетической энергии

$$k_э = \frac{m_л u_л^2 + m_п u_п^2}{m_п \upsilon_п^2}. \qquad (1.5.3)$$

Среднее значение силы, которая действует на шары за время удара, находится с помощью второго закона Ньютона, записанного в проекции на ось *X*. Для левого шара получим

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_л u_{лх} - m_л \upsilon_{лх}}{\Delta t} = \frac{m_л u_{лх}}{\Delta t}. \qquad (1.5.4)$$

Если удар происходит достаточно быстро, так, что нити во время удара не успевают отклониться на заметный угол, то в направ-

лении горизонтальной оси X выполняется закон сохранения импульса в проекции на эту ось:

$$m_{\text{п}}\upsilon_{\text{п}} = m_{\text{л}}u_{\text{л}} - m_{\text{п}}u_{\text{п}}\,. \tag{1.5.5}$$

При ударе шаров, близком к абсолютно упругому удару, должен выполняться закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_{\text{п}}\upsilon_{\text{п}}^2}{2} = \frac{m_{\text{л}}u_{\text{л}}^2}{2} + \frac{m_{\text{п}}u_{\text{п}}^2}{2}\,. \tag{1.5.6}$$

Порядок выполнения работы

1. Подключите шнур питания частотомера к электрической сети, переведите тумблер «СЕТЬ» в верхнее положение.

2. Переведите тумблер, расположенный на горизонтальной площадке **5** (рис. 25) в положение «ВКЛ».

3. Отклоните правый шар таким образом, чтобы угол отклонения центра шара соответствовал $\alpha_{\text{п}} = 10^\circ - 15^\circ$.

4. Отпустите правый шар и сразу же после первого соударения определите максимальный угол отклонения левого $\beta_{\text{л}}$ и правого $\beta_{\text{п}}$ шаров по угловой шкале. Результат измерения занесите в таблицу.

Таблица

$m_{\text{п}}$ =				$m_{\text{л}}$ =			$\alpha_{\text{п}}$ =				
i	$\beta_{\text{п}}$	$\overline{\beta}_{\text{п}}$	$\beta_{\text{л}}$	$\overline{\beta}_{\text{л}}$	Δt	$\Delta\bar{t}$	$\upsilon_{\text{п}}$	$u_{\text{п}}$	$u_{\text{л}}$	κ_c	$\kappa_{\text{э}}$
1											
2											
3											
4											
5											

5. Снимите показания Δt с частотомера и занесите в таблицу.

6. Проведите еще 5 аналогичных измерений. Результаты измерений занесите в таблицу.

7. Определите по формуле (12) средние значения $\overline{\beta}_{л}$, $\overline{\beta}_{п}$, $\Delta\overline{t}$ и занесите их в таблицу.

8. По формуле (1.5.1) вычислите значения скоростей $\upsilon_{п}$, $u_{л}$, $u_{п}$ шаров, используя значения углов $\alpha_{п}$, $\overline{\beta}_{п}$, $\overline{\beta}_{л}$ соответственно.

9. По формулам (1.5.2) и (1.5.3) определите коэффициенты восстановления скорости и энергии.

10. По формуле (1.5.4) определите среднее значение силы, действующей на шары за время удара, используя средние значения $\overline{u}_{л}$ и $\Delta\overline{t}$.

11. Проверьте выполнение закона сохранения импульса по формуле (1.5.5) и энергии по формуле (1.5.6) при упругом ударе.

12. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под столкновением частиц или тел? Какое взаимодействие твердых тел называется ударом? Какая линия называется линией удара?

2. Дайте определение центрального и нецентрального, прямого и косого ударов.

3. Какие удары различаются по последствиям удара? Дайте определение каждого из них.

4. На какие фазы подразделяется процесс соударения двух тел? Поясните, что происходит на каждой фазе.

5. Какие коэффициенты вводятся для учета потерь при ударах реальных тел? Дайте определения каждого из них. Какие значения принимают эти коэффициенты при абсолютно упругом и неупругом ударах?

6. Что представляет собой механическая система? Какая механическая система называется замкнутой? Какие силы взаимодействия называются внешними, а какие – внутренними?

7. Какая физическая величина называется импульсом тела? Запишите формулу, по которой определяется импульс тела. Назовите

единицу его измерения. Какая величина называется элементарным импульсом силы?

8. Из чего состоит полная механическая энергия тела или системы тел? Какая энергия называется кинетической? От чего зависит кинетическая энергия?

9. Запишите выражение для кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Из чего слагается полная кинетическая энергия движущегося тела?

10. Что понимают под потенциальной энергией? Что понимают под нулевым уровнем потенциальной энергии?

11. Перечислите виды механической потенциальной энергии. Запишите формулы, которыми определяется каждый из видов потенциальной энергии.

12. Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии?

Лабораторная работа 1.6

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Цель работы: изучить законы упругой деформации и экспериментально определить модуль Юнга.

Теоретическое введение

В твердых телах – аморфных и кристаллических – частицы (молекулы, атомы, ионы) совершают тепловые колебания около положений равновесия, в которых энергия их взаимодействия минимальна. При увеличении расстояния между частицами возникают силы притяжения, а при уменьшении – силы отталкивания. Силы взаимодействия между частицами обусловливают механические свойства твердых тел.

Все реальные тела под действием приложенных к ним сил изменяют свои формы и размеры, т. е. *деформируются*. Деформация твердого тела является результатом изменения под действием внешних сил взаимного расположения частиц, из которых состоит тело, и расстояний между ними.

Деформации разделяют на *упругие* (обратимые) и *пластические* (необратимые). Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, то деформация называется *упругой.* При упругой деформации в твердом теле возникают внутренние силы (силы упругости), которые уравновешивают приложенные к телу внешние силы. При устранении последних, силы упругости возвращают телу первоначальную форму. Деформация твердого тела, сопровождающаяся необратимой перестройкой его кристаллической решетки и не исчезающая после прекращения вызывающей ее силы, называется *пластической*. Различают:

– *однородные деформации* – это деформации, при которых все элементы тела деформируются одинаково. К однородным деформациям относятся деформации растяжения-сжатия и сдвига;

– *неоднородные деформации*, к которым относятся деформации кручения и изгиба.

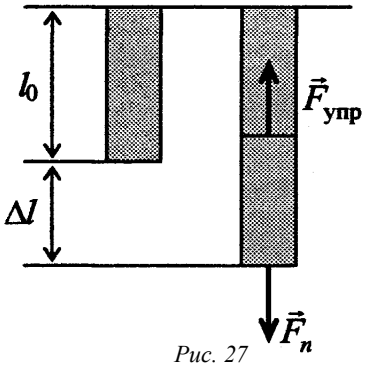

Рис. 27

Всевозможные деформации, в конечном счете, можно свести к одновременно происходящим деформациям растяжения (или сжатия) и сдвига.

Рассмотрим деформацию растяжения-сжатия (рис. 27). К концу однородного стержня длиной l_0 приложена сила $\vec{F}_n$ перпендикулярно площади поперечного сечения S стержня. В результате длина стержня изменяется на величину Δl, называемую *абсолютной деформацией*. *Абсолютная деформация* – это разность между конечной и начальной значениями величины, характеризующей размеры или форму деформируемого тела. Она выражает абсолютное изменение какого-либо линейного или углового размера.

$$\Delta l = l - l_0 .$$

В состоянии равновесия силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, возникающие в образце и уравновешивающие внешнюю силу, т. е. $\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F}_n$, распределены по поверхности S. Мерой их интенсивности является *механическое напряжение* σ – физическая величина, численно равная упругой силе, приходящейся на единицу площади сечения тела.

$$\sigma = \frac{dF_{\text{упр}}}{dS} .$$

Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом напряжение передается во все точки тела, и весь объем тела оказывается

в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, то напряжение называется *нормальным* σ_n, а если по касательной – *тангенциальным* σ_τ.

За единицу механического напряжения принято механическое напряжение, создаваемое силой упругости 1 Н при равномерном ее распределении по сечению площадью 1 м^2, расположенному перпендикулярно силе. $[\sigma]$ = Н/м^2 = Па.

Количественной мерой деформации является *относительная деформация – величина, определяемая отношением абсолютной деформации к длине недеформированного тела*,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Изменение размеров тела вдоль направления действия внешней силы сопровождается изменением его поперечных размеров (сужением или расширением). В этом случае *относительное поперечное растяжение (или сжатие)* определяется как

$$\varepsilon^* = \frac{\Delta d}{d_0},$$

где d – поперечный размер.

Из опытов вытекает, что относительная поперечная деформация прямо пропорциональна продольной деформации.

$$\varepsilon^* = -\mu\varepsilon,$$

где μ – положительный коэффициент, зависящий только от рода вещества и называемый *коэффициентом Пуассона*.

Знак минус перед коэффициентом μ отражает тот факт, что продольное растяжение сопровождается поперечным сжатием, и наоборот.

Деформация сдвига имеет место в том случае, когда плоские слои тела, параллельные некоторой плоскости, смещаются друг относительно друга под действием силы, приложенной по каса-

тельной к образцу (рис. 28). *Сдвигом* называется деформация твердого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, не искривляясь и не изменяясь в размерах, смещаются параллельно друг другу.

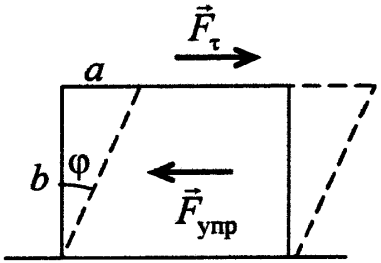

Рис. 28

В качестве характеристики деформации сдвига используется величина, называемая *относительным сдвигом* γ и равная

$$\gamma \approx tg\varphi = \frac{a}{b},$$

где a – абсолютный сдвиг;

b – расстояние между слоями тела.

Опытным путем установлено, что для малых деформаций относительная деформация и механическое напряжение связаны между собой линейной зависимостью:

– для растяжения (сжатия)

$$\sigma_n = E\varepsilon,$$

где E – коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости* и численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице.

Для случая одностороннего растяжения (сжатия) модуль упругости называется *модулем Юнга* – коэффициент, численно равный нормальному напряжению σ_n, которое необходимо приложить к телу, чтобы растянуть его в два раза;

– для сдвига

$$\sigma_\tau = G\gamma ,$$

где G – коэффициент пропорциональности называемый *модулем сдвига* и численно равный касательному напряжению σ_τ, при котором угол перекоса образца равен 45°.

Коэффициенты пропорциональности E (*модуль Юнга*) и G (*модуль сдвига*) зависят только от рода вещества и не зависят от размеров тела.

Так как относительная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES},$$

то

$$F = \frac{ES}{l_0}\Delta l = k\Delta l ,$$

где k – коэффициент жесткости образца или коэффициент упругости.

Это соотношение выражает *закон Гука*: при небольших деформациях абсолютная деформация прямо пропорциональна растягивающей силе.

Рассмотрим связь между деформацией и напряжением для металлического образца в виде диаграммы растяжения – графика зависимости механического напряжения σ, возникающего в твердом теле при одностороннем растяжении, от относительного удлинения ε (рис. 29).

Линейная зависимость (участок до точки A), установленная Гуком, выполняется в очень узких рамках до *предела пропорциональности* σ_n. По достижении предела пропорциональности (точка A) удлинение возрастает быстрее, чем напряжение. До *предела упругости* σ_y остаточные деформации не возникают. *Предел упругости* (точка B) – это максимальное напряжение, при котором еще не получаются остаточные деформации. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации, и график, который

описывает возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изображается прямой *CK*. *Предел текучести* $\sigma_т$ (точка *C*) характеризует состояние деформированного тела, после которого удлинение возрастает без увеличения действующей силы, т.е. появляется заметная остаточная деформация (≅0.2 %). Материалы, для которых область текучести (область *CD* на диаграмме) значительна, называются вязкими, а для которых эта область практически отсутствует – хрупкими. При дальнейшем растяжении (за точку *D*) происходит разрушение тела. *Предел прочности* σ_p – это напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, выдерживаемой телом при разрушении.

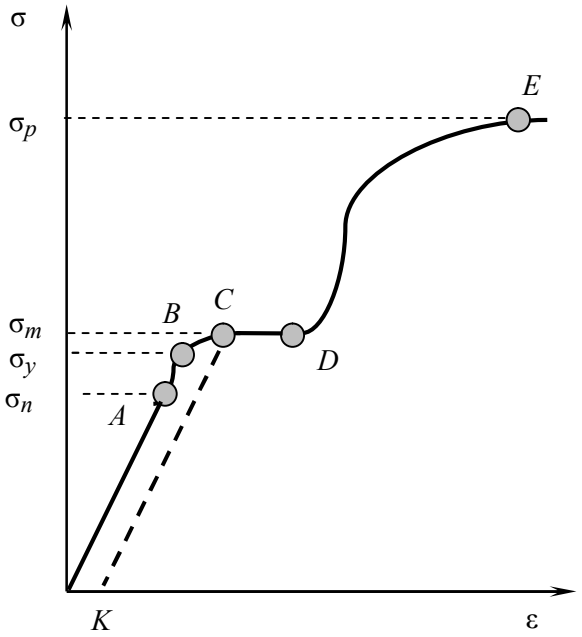

Рис. 29

На практике чаще приходится встречаться с неоднородными деформациями. Деформация кручения может быть получена, если один конец проволоки или тонкого стержня закрепить, а к другому

приложить пару сил с вращающим моментом. При этом перпендикулярные к оси сечения образца слои поворачиваются на различные углы, оставаясь при этом параллельными друг другу, а незакрепленный конец повернется на максимальный угол. В каждом малом объеме образца при кручении происходит деформация сдвига. Относительные деформации элементов, расположенных на различных расстояниях от оси проволоки, будут различаться. Закон Гука для кручения устанавливает линейную связь между вращающим моментом M и углом поворота φ:

$$M = f\varphi,$$

где f – крутильная жесткость, для цилиндрического образца равная

$$f = \frac{\pi G r^4}{2l},$$

где G – модуль сдвига;
r – радиус цилиндра;
l – его длина.

Задание 1. Определение модуля Юнга методом изгиба.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 30. Основными элементами установки являются: а) вертикальная стойка **1**, выполненная из металлической трубы, установленная на основание; б) фотодатчик **2**, предназначенный для подсчета числа периодов колебаний груза на пружине; в) призматические опоры **3**, на которых устанавливается исследуемый образец; г) микрометрический индикатор часового типа **4**; д) устройство нагружения образца с узлом подвески наборного груза **5**; ж) наборные грузы **6**; з) набор пружин растяжения **7**; к) блок электронный **8**; л) набор металлических пластин, кронштейны для крепления.

Рис. 30

Если стержень прямоугольной формы длиной l обоими концами свободно положить на опорные стальные призмы и нагрузить в середине внешней силой F, то середина стержня опустится, т.е. стержень согнется (рис. 31). При такой деформации верхние слои стержня сжимаются, нижние растягиваются, а средний слой, который называется нейтральным, сохраняет свою длину и претерпевает искривление.

Перемещение λ, которое получает средний слой стержня, называется *стрелой прогиба*. Чем больше нагрузка, тем больше стрела прогиба, которая зависит от формы и размеров стержня и от модуля его упругости.

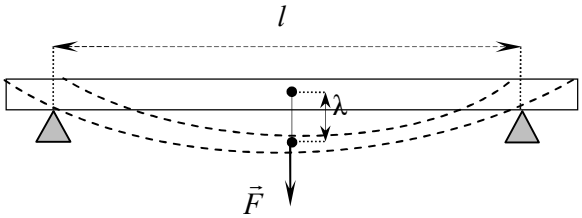

Рис. 31

Рассмотрим элемент длины стержня *dx*, который находится на расстоянии *x* от конца стержня, поперечное сечение которого характеризуется высотой *b* и шириной *a* (рис. 32).

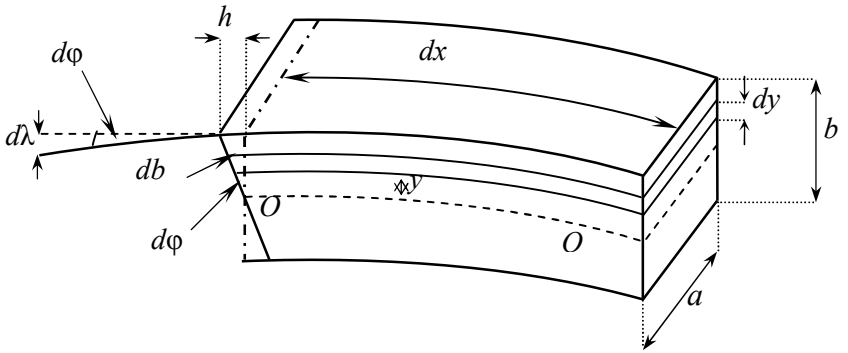

Рис. 32

Согласно закону Гука, сила *dF*, вызывающая удлинение *dl* произвольно выбранного слоя стержня высотой *dy*, равна:

$$dF = \frac{E \cdot dS \cdot dl}{dx} = \frac{2E \cdot h \cdot y \cdot a \cdot dy}{b \cdot dx},$$

где E – модуль Юнга;

$dS = a \cdot dy$ – площадь сечения растягиваемого слоя;

y – расстояние от нейтрального (среднего) слоя до слоя высотой dy;

h – величина, определяющая положение поперечного сечения стержня до и после деформации.

$$h = \frac{b}{2} d\varphi, \qquad (1.6.1)$$

где $d\varphi$ – мера изгиба.

При деформации изгиба любое сечение стержня вращается вокруг оси OO^*, проходящей через нейтральный слой. Тогда общий момент вращения, вызванный упругими силами в поперечном сечении стержня, будет равен:

$$M = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ydF = \frac{E \cdot a \cdot h \cdot b^2}{6dx}.$$

В случае равновесия этот вращающий момент равен:

$$M = \frac{E \cdot a \cdot h \cdot b^2}{6dx} = \frac{F}{2}x. \qquad (1.6.2)$$

Элемент стрелы прогиба $d\lambda$ может быть представлен как

$$d\lambda = xd\varphi. \qquad (1.6.3)$$

Подставляя величины $d\varphi$ и h из уравнений (1.6.1) и (1.6.2) в выражение (1.6.3) и интегрируя его в пределах от 0 до $\frac{l}{2}$, получим

$$\lambda = \frac{F \cdot l^3}{4E \cdot a \cdot b^3} = \frac{mgl^3}{4Eab^3},$$

откуда модуль Юнга равен:

$$E = \frac{mgl^3}{4ab^3\lambda}. \qquad (1.6.4)$$

Порядок выполнения работы

1. При помощи штангенциркуля и линейки измерьте размеры исследуемой пластины (ширину a и толщину b) в трех местах и расстояние l между призматическими опорами. Результаты измерений занесите в таблицу 1.

Таблица 1

i	a,	$\bar{a}$,	Δa,	b,	$\bar{b}$,	Δb,	l,	$\bar{l}$,	Δl,
1									
2									
3									

2. Вычислите средние значения ширины a и толщины b по формуле (12). За абсолютную погрешность примите погрешность измерительных инструментов (для линейки погрешность составляет половину цены деления).

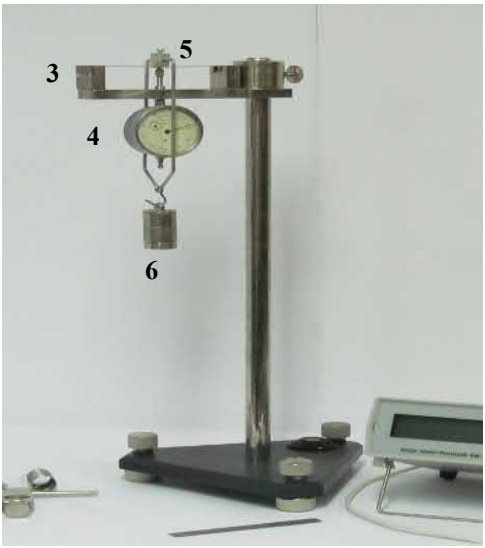

Рис. 33

3. Установите исследуемую пластину на призматические опоры **3** (см. рис. 33). Затем установите индикатор часового типа **4** таким образом, чтобы его наконечник коснулся пластины, а на циферблате часового механизма стрелка была установлена на 0.

4. Расположите устройство нагружения **5** посередине пластины. Подвесьте на скобу груз **6** массой m. По шкале индикатора (цена деления малой шкалы 1 мм, большой 0,01 мм) определите значение прогиба пластины λ_{1i}. Результаты измерений занесите в таблицу 2.

5. Увеличив нагрузку с помощью дополнительного груза, определите следующее значение прогиба пластины λ_{1i}. Всего проведите измерения для четырех значений массы. Результаты измерений занесите в таблицу 2.

6. Затем, уменьшая нагрузку (снимая по одному грузу), определите значение прогиба пластины λ_{2i} для тех же грузов.

7. Значение прогиба пластины λ при данной нагрузке определите по формуле

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Таблица 2

i	m	λ_{1i}	λ_{2i}	λ	E	$\overline{E}$	ΔE	ε_E
1								
2								
3								
4								

8. Вычислите модуль Юнга E исследуемой пластины по формуле (1.6.4), используя средние значения ширины $\overline{a}$ пластины, ее толщины $\overline{b}$ и расстояния между опорными призмами $\overline{l}$, и рассчитайте его среднее значение $\overline{E}$ по формуле (12). Результаты вычислений запишите в таблицу 2.

9. Вычислите относительную погрешность ε_E модуля Юнга по формуле

$$\varepsilon_E = \frac{\Delta E}{E} = 3\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

где за погрешность Δa, Δb и Δl примите погрешность измерительных инструментов (для линейки погрешность составляет половину цены деления).

10. Зная относительную погрешность модуля Юнга и его среднее значение, определите абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta E = \varepsilon_E \overline{E}.$$

11. Сравните теоретическое значение модуля Юнга с его экспериментальным значением. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе и запишите окончательный ответ в виде

$$E = \overline{E} \pm \Delta E.$$

Задание 2. Определение модуля сдвига с помощью пружинного маятника.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 30.

Для определения модуля сдвига используется пружинный маятник, который представляет собой тело массой m, подвешенное к винтовой пружине, жестко закрепленной верхним концом к неподвижной опоре, и способное совершать колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести. Под действием растягивающей силы, перпендикулярной виткам, длина пружины увеличивается согласно закону Гука на величину

$$\Delta x = \frac{F}{k}, \tag{1.6.5}$$

где k – жесткость пружины.

Удлинение пружины Δx складывается из деформаций сдвига по всей длине проволоки, из которой изготовлена пружина, и определяется растягивающей силой, модулем сдвига и геометрическими размерами пружины.

$$\Delta x = \frac{8FND^3}{Gd^4}, \tag{1.6.6}$$

где N – число витков;

D – диаметр витка пружины;

d – диаметр проволоки;

G – модуль сдвига.

Решая совместно (1.6.5) и (1.6.6), получим связь между модулем сдвига и жесткостью пружины:

$$G = k\frac{8ND^3}{d^4}. \tag{1.6.7}$$

Выведенное из положения равновесия тело массой m совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

Выразим жесткость пружины через период

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \qquad (1.6.8)$$

Подставив (1.6.8) в формулу (1.6.7), получим выражение для расчета модуля сдвига материала пружины:

$$G = k\frac{32\pi^2 ND^3 m}{T^2 d^4}\,. \qquad (1.6.9)$$

Порядок выполнения работы

1. При помощи штангенциркуля измерьте средний диаметр пружины D и диаметр проволоки d. Определите число витков N. Результаты измерений занесите в таблицу.

Таблица

$n =$; $D =$; $d =$; $N =$								
i	m	t	T	$\overline{T}$	G	$\overline{G}$	ΔG	ε_G
1								
2								
3								
1								
2								
3								

2. Установите и закрепите кронштейн с вертикально подвешенной пружиной **7** и фотодатчик **2** на вертикальной стойке **1** таким образом (рис. 34), чтобы наборный груз **6**, подвешенный к пружине **7**, своей нижней плоскостью совпадал с оптической осью фотодатчика (оптическая ось фотодатчика совпадает с рисками на фотодатчике).

3. Подключите фотодатчик **2** при помощи кабеля к электронному блоку **8** и нажмите на блоке кнопку «СЕТЬ». При этом включится табло индикации.

Рис. 34

4. Поднимите груз **6** немного вверх и отпустите. При этом груз начнет совершать колебательные движения на пружине. Одновременно с началом движения груза нажмите на электронном блоке **8** кнопку «ПУСК» – начнется отсчет числа колебаний n и промежутка времени t, в течение которого происходили эти колебания.

5. При значении числа колебаний, равном 20, нажмите кнопку «СТОП». Занесите значения величин n и t в таблицу.

6. Повторите пункт 4 не менее трех раз, записывая данные в таблицу.

7. Увеличив нагрузку с помощью дополнительного груза, повторите пункты 4 – 6 не менее трех раз.

8. Определите период колебаний груза по формуле

$$T = \frac{t}{n},$$

где t – время колебаний;

n – число колебаний.

9. Вычислите модуль сдвига G по формуле (1.6.9) и рассчитайте его среднее значение $\overline{G}$ по формуле (12).

10. Вычислите относительную погрешность ε_G модуля сдвига по формуле

$$\varepsilon_G = \frac{\Delta G}{G} = 2\frac{\Delta\pi}{\pi} + 3\frac{\Delta D}{D} + 2\frac{\Delta T}{T} + 4\frac{\Delta d}{d},$$

где за погрешность ΔD и Δd примите погрешность измерительных инструментов (штангенциркуля), а при подстановке значения $\pi = 3{,}14$ следует, согласно табличным данным, считать погрешность этой величины $\Delta\pi = 0{,}002$.

11. Зная относительную погрешность модуля сдвига и его среднее значение, определите абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta G = \varepsilon_G \overline{G}.$$

12. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе и запишите окончательный ответ в виде

$$G = \overline{G} \pm \Delta G.$$

Задание 3. Определение модуля сдвига методом растяжения пружины.

Порядок выполнения работы

1. Снимите кронштейн с фотодатчиком **2** с вертикальной стойки **1** (см. рис. 34). При помощи штангенциркуля и линейки измерьте средний диаметр пружины D, диаметр проволоки d и длину пружины l_0 в ненагруженном состоянии. Определите число витков N. Результаты измерений занесите в таблицу.

Таблица

$l_0 =$; $D =$; $d =$; $N =$								
i	m	Δl_{1i}	Δl_{2i}	Δl	G	$\bar{G}$	ΔG	ε_G
1								
2								
3								
4								

2. Подвесьте на пружину **7** груз **6** массой m (рис. 34). При помощи линейки определите длину пружины l_{1i} с нагрузкой.

3. Определите удлинение пружины по формуле

$$|\Delta l| = l_i - l_0 .$$

4. Увеличив нагрузку с помощью дополнительного груза, определите следующую длину пружины l_{1i} и ее удлинение Δl_{1i}. Всего проведите измерения для четырех значений массы. Результаты измерений занесите в таблицу.

5. Затем, уменьшая нагрузку (снимая по одному грузу), определите длину пружины l_{2i} и ее удлинение Δl_{2i} для тех же грузов.

6. Удлинение пружины при данной нагрузке определите по формуле

$$\Delta l = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{2} .$$

7. Вычислите модуль сдвига G по формуле

$$G = \frac{8mgND^3}{\Delta l d^4} ,$$

где N – число витков;
D – диаметр витка пружины;
d – диаметр проволоки;
G – модуль сдвига.

8. Рассчитайте его среднее значение $\bar{G}$ по формуле (12) и вычислите относительную погрешность ε_G модуля сдвига по формуле

$$\varepsilon_G = \frac{\Delta G}{G} = 3\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta(l)}{\Delta l} + 4\frac{\Delta d}{d},$$

где за погрешность ΔD и Δd примите погрешность измерительных инструментов (штангенциркуля).

9. Зная относительную погрешность модуля сдвига и его среднее значение, определите абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta G = \varepsilon_G \overline{G}\ .$$

10. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе и запишите окончательный ответ в виде

$$G = \overline{G} \pm \Delta G\ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение деформации. Классификация деформаций. В чем разница между упругими и пластическими деформациями?
2. Перечислите виды деформаций. Поясните, как смещаются отдельные элементы тела при различных деформациях.
3. По какому признаку деформации делятся на однородные и неоднородные? Дайте определение каждой из них.
4. Дайте определение механического напряжения и назовите единицу ее измерения.
5. Какая деформация называется абсолютной, а какая – относительной?
6. Сформулируйте законы Гука для однородных и неоднородных деформаций.
7. Перечислите три упругие постоянные. Какая существует между ними связь?
8. Дайте определение модуля Юнга и поясните его физический смысл. От чего зависит модуль Юнга?
9. Дайте определение модуля сдвига и поясните его физический смысл. От чего зависит модуль сдвига?
10. Дайте определение предела пропорциональности и предела упругости.

ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

Лабораторная работа 2.1

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Цель работы: изучить термодинамические процессы и законы идеального газа, определить показатель адиабаты для воздуха и газовую постоянную.

Теоретическое введение

Состояние некоторой массы газа задается *термодинамическими параметрами* (*параметрами состояния*). Обычно в качестве параметров состояния выбирают давление, объем и температуру, между которыми существует связь, описываемая *уравнением состояния* $f(p,V,T)=0$, согласно которому каждая из переменных является функцией двух других.

Термодинамическая система – это совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из термодинамических параметров, называется *термодинамическим процессом*. Простейшими термодинамическими процессами являются изобарный, изохорный и изотермический процессы.

Простейшим объектом исследований в термодинамике и статистической физике является идеальный газ. *Идеальный газ* – это газ, собственный объем молекул которого пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находятся молекулы, между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия и столкновения молекул газа между собой и стенками сосуда абсолютно упругие.

Законы, описывающие поведение идеального газа:

1. *Закон Бойля – Мариотта*: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$pV = \text{const}, \text{ при } T = \text{const} \text{ и } m = \text{const}.$$

Процесс, протекающий при постоянной температуре, называется *изотермическим*.

2. З*акон Гей – Люссака*: объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha \cdot t), \text{ при } p = \text{const} \text{ и } m = \text{const},$$

где V_0 – объем при 0 °С;

t – температура по шкале Цельсия;

α – термический коэффициент. $\alpha = \dfrac{1}{273{,}15}$ К$^{-1}$.

Процесс, протекающий при постоянном давлении, называется *изобарным*.

3. *Закон Шарля*: давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой.

$$p = p_0(1 + \alpha \cdot t), \text{ при } V = \text{const} \text{ и } m = \text{const},$$

где p_0 – давление при 0 °С;

t – температура по шкале Цельсия;

α – термический коэффициент. $\alpha = \dfrac{1}{273{,}15}$ К$^{-1}$.

Процесс, протекающий при постоянном объеме, называется *изохорным*.

4. *Закон Авогадро*: равные объемы любых газов (при одинаковых температуре и давлении) содержат равное число молекул. В одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемое *постоянной (числом) Авогадро*: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

5. *Закон Дальтона*: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n.$$

Парциальное давление – давление, которое оказывал бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

Уравнение состояния идеального газа для произвольной массы газа (*уравнение Менделеева – Клапейрона*) имеет вид

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT ,$$

где M – *молярная масса газа* – масса моля газа, равная произведению постоянной Авогадро на массу молекулы;

$R = kN_A$ – газовая постоянная;

$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$ – количество вещества однородного газа.

Число степеней свободы – это число независимых переменных (координат), которые полностью определяют положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения.

В классической механике молекула двухатомного газа рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформированной связью. Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси, которая проходит через оба атома, можно пренебречь. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы.

Трехатомная и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательные и три вращательные. Естественно, что жесткой связи между атомами не существует, поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Согласно *закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул газа*: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $\frac{1}{2}kT$, а на каждую

колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная kT. Таким образом, *средняя кинетическая энергия молекулы*

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT ,$$

где i – полное число степеней свободы, равное

$$i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2(n-1)_{\text{к}} ,$$

где n – число связей атомов в молекуле.

Всякая термодинамическая система в любом состоянии обладает *полной энергией*, которая включает в себя:

а) кинетическую энергию механического движения системы как целого или ее макроскопических частей;

б) потенциальную энергию, зависящую от положения системы во внешнем силовом поле;

в) внутреннюю энергию, зависящую только от внутреннего состояния системы.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то для произвольной массы газа *внутренняя энергия* равна:

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{i}{2} \nu RT .$$

Работа расширения газа в общем случае определяется как

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Если в процессе протекания термодинамического процесса один из термодинамических параметров не изменяется, то работа, совершаемая газом при расширении, определяется следующим образом:
при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) ;$$

при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2};$$

при изохорном процессе

$$A = 0;$$

при адиабатическом процессе

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

где γ – показатель адиабаты.

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. При любом способе перехода системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии будет одинаковым. В соответствии с законом сохранения энергии, это изменение будет равно разности между количеством теплоты, полученной системой, и работой, совершенной системой против внешних сил, т.е.

$$\Delta U = Q - A.$$

Следовательно, теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил – *первое начало термодинамики:*

$$Q = \Delta U + A.$$

В дифференциальной форме первое начало термодинамики имеет вид

$$dQ = dU + \delta A.$$

Количество теплоты при различных процессах:

1. *Изотермический процесс.*

При изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа не изменяется, т.е. $dU = 0$. Тогда из первого начала термоди-

намики следует, что *количество теплоты, получаемое газом, расходуется на совершение газом работы против внешних сил*, т.е.

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

2. *Изохорный процесс.*

При изохорном процессе газ не совершает работы, т.е. $\delta A = 0$. Поэтому из первого начала термодинамики следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на изменение его внутренней энергии, т.е.

$$Q = \Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right).$$

3. *Изобарный процесс.*

При изобарном процессе *теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил*, т.е.

$$Q = A + \Delta U = \frac{i+2}{2} \frac{m}{M} R\left(T_2 - T_1\right).$$

4. *Адиабатический процесс.*

Процесс, протекающий без теплообмена между системой и внешними телами, называется *адиабатическим*. Адиабатический процесс подчиняется условию $dQ \equiv 0$.

Из первого начала термодинамики следует, что при адиабатическом процессе *работа совершается системой за счет убыли ее внутренней энергии*, т.е.

$$\delta A = -dU .$$

Адиабатический процесс описывается тремя уравнениями:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad pV^{\gamma} = \text{const}, \quad p^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{const},$$

где величина γ является безразмерной величиной и называется *показателем адиабаты* или *коэффициентом Пуассона.*

$$\gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Теплоемкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один Кельвин:

$$C = \frac{dQ}{dT}.$$

Единица измерения в СИ – Джоуль на Кельвин [Дж/К].

Теплоемкость моля вещества называется *молярной теплоемкостью* – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного моля вещества на один Кельвин:

$$c^{\text{м}} = \frac{dQ}{\nu dT}.$$

Единица измерения в СИ – Джоуль на моль-Кельвин [Дж/моль·К].

Теплоемкость единицы массы вещества называется *удельной теплоемкостью.* Это величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания одного килограмма вещества на один Кельвин:

$$c^{\text{уд}} = \frac{dQ}{mdT}.$$

Единица измерения в СИ – Джоуль на килограмм-Кельвин [Дж/кг·К].

Молярная и удельная теплоемкости одного и того же вещества связаны соотношением

$$c^{\text{м}} = c^{\text{уд}} M,$$

где M – молярная масса вещества.

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Если нагревание происходит при постоянном объеме, то теплоемкость называется *теплоемкостью при постоянном объеме* c_V, а если при постоянном давлении – *теплоемкостью при постоянном давлении* c_p.

$$c_V^{\text{м}} = \frac{i}{2}R,\ c_p^{\text{уд}} = \frac{i+2}{2}R.$$

Теплоемкость при постоянном объеме связана с теплоемкостью при постоянном давлении соотношением

$$c_p^{\text{м}} = c_V^{\text{м}} + R$$

– *уравнение Майера*, которое показывает, что молярная теплоемкость газа при постоянном давлении $c_p^{\text{м}}$ всегда больше молярной теплоемкости при постоянном объеме $c_V^{\text{м}}$ на величину молярной газовой постоянной R.

Отношение теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме равно показателю адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

Задание 1. Определение показателя адиабаты газа методом Клемана – Дезорма.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 35. Основными элементами установки являются: а) баллон с исследуемым газом (воздухом) **1**; б) водяной манометр **2**, при помощи которого измеряется избыточное давление; в) нагнетательный насос **3**, который соединен через кран **4** с баллоном; г) кран **5,** предназначенный для выпуска воздуха из баллона.

Для экспериментального определения показателя адиабаты проводятся последовательно термодинамические процессы, представленные на рис. 36, с учетом постоянной массы газа, которая при атмосферном давлении и комнатной температуре имеет объем, равный объему баллона.

Первоначально в баллон накачивается воздух до некоторого давления p_1'. При этом газ в баллоне сжимается и нагревается. После закрытия крана **4** происходит изохорическое остывание (процесс 1' – 1), в конце которого температура газа становится равной ком-

натной T_0, а давление газ p_1 превышает атмосферное давление p_0 на величину $\Delta p = \rho g h_1$, т.е.

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \qquad (2.1.1)$$

где h_1 – разность установившихся уровней жидкости в трубках манометра;

ρ – плотность жидкости (воды).

Рис. 35

Если на короткое время открыть кран **5**, то происходит быстрый выброс части сжатого воздуха, при котором теплота от окружающей среды не успевает подводиться к воздуху в баллоне, т.е. реализуется адиабатический процесс, представленный кривой 1 – 0 (рис. 36). Оставшаяся часть воздуха расширится от объема V_1 до объема V_2, равного объему баллона. При адиабатическом расширении газ совершает работу за счет убыли внутренней энергии, поэтому его температура понизится до $T_1 < T_0$. Применив уравнение Пуассона для адиабатического процесса 1 – 0, получим

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_0 V_2^{\gamma},$$

откуда

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}, \qquad (2.1.2)$$

где γ – показатель адиабаты.

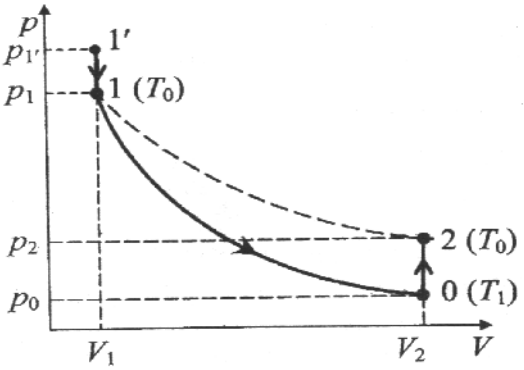

Рис. 36

В дальнейшем за счет постепенного подвода тепла к баллону температура воздуха начинает увеличиваться, что сопровождается увеличением давления при постоянном объеме (процесс 0 – 2 на рис. 36), равном объему баллона. В конечном равновесном состоянии 2 температура равна комнатной температуре T_0, а давление

$$p_2 = p_0 + \rho g h_2, \qquad (2.1.3)$$

где h_2 – разность установившихся уровней жидкости в трубках манометра.

В состояниях 1 и 2 воздух находится при одинаковой температуре T_0, поэтому для изотермического расширения, на основании закона Бойля – Мариотта, получим

$$p_1 V_1 = p_2 V_2,$$

откуда

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.1.4)$$

Подставив формулу (2.1.4) в (2.1.2) и прологарифмировав полученное уравнение, с учетом формул (2.1.1) и (2.1.3) получим

$$\frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\gamma},$$

откуда

$$\gamma = \frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1 - \ln p_2} = \frac{\ln\left(p_0 + \rho g h_1\right) - \ln p_0}{\ln\left(p_0 + \rho g h_1\right) - \ln\left(p_0 + \rho g h_2\right)}.$$

Поскольку давления p_1, p_2 и p_0 мало отличаются друг от друга, то можно показать, что отношение разности логарифмов с достаточной точностью можно заменить отношением разности самих величин, т.е.

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \qquad (2.1.5)$$

Порядок выполнения работы

1. Проверьте, чтобы кран **5** находился в закрытом положении (рукоятка крана должна быть расположена горизонтально, см. рис. 35), и откройте кран **4** (рукоятка крана в горизонтальном положении).

2. При помощи насоса **3** накачивайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней воды в манометре **2** не достигнет 30–40 см. После этого закройте кран **4** (рукоятка крана в вертикальном положении).

3. Через 1–2 мин, когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (уровни воды в манометре сначала будут сближаться, а потом остановятся), определите разность уровней h_1 и запишите в таблицу.

4. Кратковременно откройте кран **5** (рукоятку крана переведите в вертикальное положение на 1–2 секунды до момента выравнивания уровней), и быстро его закройте. После этого уровень воды в одном колене манометра будет постепенно подниматься, а в другом – постепенно опускаться, и через 1–2 минуты установится неизменная разность уровней h_2, которая заносится в таблицу.

Таблица

i	h_1	h_2	γ	$\overline{\gamma}$	$\Delta\gamma$	$\Delta\overline{\gamma}$	ε_γ
1							
2							
3							
4							
5							
6							

5. Повторите опыт не менее 6 раз.

6. Для каждой найденной пары значений h_1 и h_2 рассчитайте величину γ для каждого опыта по формуле (2.1.5).

7. Найти среднее значение величины $\overline{\gamma}$ по формуле (12), абсолютную погрешность $\Delta\gamma$ по формуле (7) и ее среднее значение $\Delta\overline{\gamma}$ по формуле (17), а также относительную погрешность ε_γ по формуле (9). Результаты вычислений занесите в таблицу.

8. Учитывая, что воздух состоит в основном из двухатомных молекул, используя связь между показателем адиабаты и числом степеней свободы молекулы, вычислите теоретическое значение показателя адиабаты $\gamma^{\text{т}}$ по формуле

$$\gamma^{\text{т}} = \frac{i+2}{i}.$$

9. Сравните вычисленное теоретическое значение показателя адиабаты $\gamma^{\text{т}}$ с его экспериментальным значением $\overline{\gamma}$. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Задание 2. Определение универсальной газовой постоянной.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 35. Пусть имеется сосуд объемом V, в котором первоначально содержится некоторое количество вещества (воздуха) ν_0 при атмосферном давлении p_0 и температуре T. В этом случае уравнение состояния идеального газа будет иметь вид

$$p_0 V = \nu_0 RT, \tag{2.1.6}$$

Путем изотермического накачивания воздуха в сосуд, увеличим давление до величины p_1. В этом случае уравнение состояния идеального газа будет иметь вид

$$p_1 V = \nu_1 RT. \tag{2.1.7}$$

Разделив уравнение (2.1.6) на уравнение (2.1.7), получим

$$\nu_1 = \frac{p_1}{p_0}\nu_0, \tag{2.1.8}$$

где p_0 – атмосферное давление ($p_0 = 101325$ Па); $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ – давление воздуха после накачивания;

h_1 – разность уровней жидкости в манометре;

$\nu_0 = \frac{V}{V_м} = \frac{10}{22{,}4} = 0{,}446$ моль – количество вещества (воздуха) в начальном состоянии.

Затем снова увеличим давление до величины p_2 путем изотермического накачивания воздуха в сосуд. Тогда уравнение состояния идеального газа будет иметь вид

$$p_2 V = \nu_2 RT. \tag{2.1.9}$$

Разделив уравнение (2.1.6) на уравнение (2.1.9), получим

$$\nu_2 = \frac{p_2}{p_0}\nu_0, \qquad (2.1.10)$$

где $p_2 = p_0 + \rho g h_2$ – давление воздуха после повторного накачивания;

h_2 – разность уровней жидкости в манометре.

Вычитая из уравнения (2.1.9) уравнение (2.1.7), получим

$$(p_2 - p_1)V = (\nu_2 - \nu_1)RT,$$

откуда

$$R = \frac{(p_2 - p_1)V}{(\nu_2 - \nu_1)T} = \frac{\left((p_0 + \rho g h_2) - (p_0 + \rho g h_1)\right)}{(\nu_2 - \nu_1)T} = \frac{(h_2 - h_1)\rho g V}{(\nu_2 - \nu_1)T}. \qquad (2.1.11)$$

Порядок выполнения работы

1. Проверьте, чтобы кран **5** находился в закрытом положении (рукоятка крана должна быть расположена горизонтально, см. рис. 35), и откройте кран **4** (рукоятка крана в горизонтальном положении).

2. При помощи насоса **3** осторожно нагнетайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней воды в манометре **2** не достигнет 100–150 мм водяного столба. После этого закройте кран **4** (рукоятка крана в вертикальном положении).

3. Через 1–2 мин, когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (уровни воды в манометре **2**, сначала будут сближаться, а потом остановятся), определите разность уровней h_1 и запишите в таблицу.

4. Затем снова откройте кран **4** и насосом осторожно нагнетайте воздух в баллон до тех пор, пока разность уровней воды в манометре **2** не достигнет 200–250 мм водяного столба. После этого закройте кран **4** (рукоятка крана в вертикальном положении).

5. Через 1–2 мин, когда воздух в баллоне охладится до комнатной температуры (уровни воды в манометре **2** сначала будут сближаться,

а потом остановятся), определите разность уровней h_2 и запишите в таблицу.

Таблица

$V = 10$ л, $p_0 = 101324$ Па, $\nu_0 = 0{,}446$ моль, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $T =$									
i	h_1	h_2	ν_1	ν_2	R	$\bar{R}$	ΔR	$\Delta\bar{R}$	ε_R
1									
2									
3									
4									
5									
6									

6. Откройте кран **5** и дождитесь, пока уровни воды в манометре **2** не совпадут. Закройте кран **5** (рукоятка крана должна быть расположена горизонтально) и откройте кран **4** (рукоятка крана в горизонтальном положении). Повторите опыт (пункты 2–5) не менее 6 раз.

7. Для каждой пары значений h_1 и h_2 рассчитайте количество вещества ν_1 и ν_2 для каждого опыта по формулам (2.1.8), (2.1.10).

8. По формуле (2.1.11) вычислите значение универсальной газовой постоянной R.

9. Рассчитайте по формулам (12), (17) и (18) среднее значение величины R, абсолютную погрешность ΔR и ее среднее значение $\Delta\bar{R}$, а также относительную погрешность измерения ε_R по формуле (9). Результаты вычислений занесите в таблицу.

10. Сравните вычисленное значение универсальной газовой постоянной с его теоретическим значением. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение термодинамической системы. Какой процесс называется термодинамическим? Приведите примеры простейших термодинамических процессов.

2. Какими термодинамическими параметрами определяется состояние некоторой массы газа? Запишите уравнение состояния, содержащее эти параметры.

3. Какой газ называется идеальным? Сформулируйте и запишите законы идеального газа.

4. Запишите уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева – Клапейрона). Поясните величины, входящие в это уравнение. Объясните физический смысл универсальной газовой постоянной.

5. Объясните, что такое число степеней свободы молекул газа? Почему одноатомные, двухатомные и многоатомные молекулы обладают различным числом степеней свободы? Как определяется полное число степеней свободы?

6. Сформулируйте закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Как определяется средняя энергия молекулы и что она в себя включает? Как определяется внутренняя энергия тела (газа, идеального газа)?

7. Сформулируйте первое начало термодинамики и объясните его физический смысл. Запишите первое начало термодинамики для изопроцессов.

8. Какой процесс называется адиабатическим? Запишите уравнения Пуассона для адиабатического процесса. Какая величина называется коэффициентом Пуассона?

9. Запишите выражения для работы по расширению газа для изопроцессов.

10. Что называется теплоемкостью вещества? Перечислите, какие теплоемкости вы знаете, и дайте определение каждой из них.

11. Запишите выражения для удельных и мольных теплоемкостей при постоянном давлении и объеме газа. Запишите уравнение Майера и поясните его.

Лабораторная работа 2.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОЙ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Цель работы: изучить распределение электронов по скоростям для электронного газа в диоде, экспериментально получить распределение Максвелла и определить наиболее вероятную скорость электронного газа.

Теоретическое введение

В молекулярной физике во многих случаях приходится иметь дело с совокупностью частиц, движущихся хаотически и независимо друг от друга. Ввиду хаотичности движения молекул и огромного их числа нельзя судить о скорости каждой молекулы в любой момент времени: у одних молекул скорости по сравнению со средней скоростью меньше, а у других больше. Можно лишь определить долю числа молекул $\frac{dN_\upsilon}{N}$, или число молекул dN_υ, скорости которых находятся в определенном интервале скоростей от υ до $\upsilon + d\upsilon$.

Возьмем в воображаемом пространстве, называемом *пространством скоростей*, прямоугольные координатные оси, по которым отложим значения проекций скоростей отдельных молекул по осям *X*, *Y*, *Z*, взятым в обычном пространстве (рис. 37). Координатами точки этого пространства являются компоненты скорости молекул $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$. Из-за столкновений положения молекул будут непрерывно меняться, но их плотность в каждом месте будет оставаться неизменной. Молекулы, величина скорости которых заключена в пределах от υ до $\upsilon + d\upsilon$, попадают в область, лежащую между сферами радиусов υ и $\upsilon + d\upsilon$. Объем этой области равен $dV = 4\pi\upsilon^2 d\upsilon$. Тогда количество молекул, попадающих в эту область, равно:

$$dN = N_\upsilon dV = N_\upsilon 4\pi\upsilon^2 d\upsilon,$$

где N_υ – концентрация молекул со скоростями от υ до $\upsilon + d\upsilon$ в единичном объеме пространства скоростей.

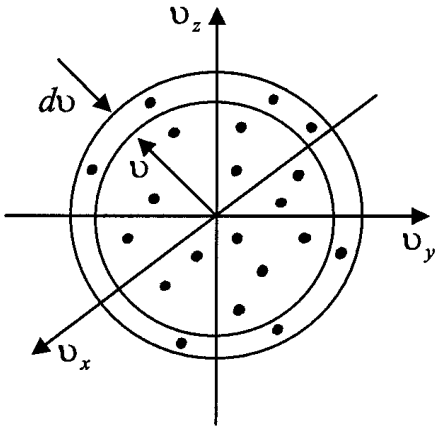

Рис. 37

Как показал Максвелл, концентрация молекул N_υ связана с количеством молекул N в объеме газа соотношением

$$N_\upsilon = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right).$$

Число молекул, скорости которых имеют значения, заключенные в пределах от υ до $\upsilon + d\upsilon$, определяется выражением (*распределение Максвелла по скоростям*)

$$dN_\upsilon = N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) 4\pi\upsilon^2 d\upsilon,$$

где m_0 – масса молекулы;
k – постоянная Больцмана;
T – абсолютная температура.

Разделив обе части на $Nd\upsilon$, получим *функцию распределения Максвелла* $f(\upsilon)$, которая характеризует распределение молекул по

скоростям и определяется отношением кинетической энергии молекулы $\frac{m_0\upsilon^2}{2}$ к средней энергии ее теплового движения kT.

$$f(\upsilon)=\frac{dN}{Nd\upsilon}=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^2.$$

График функции распределения молекул газа по скоростям представлен на рис. 38.

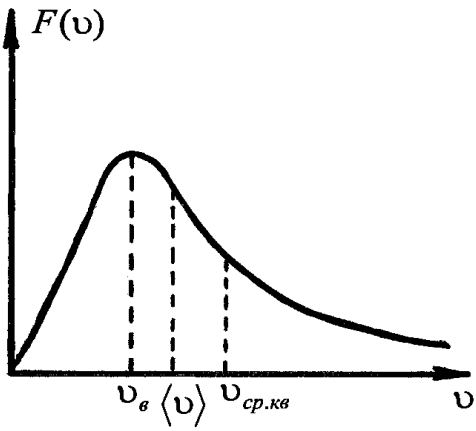

Рис. 38

Функция распределения Максвелла позволяет определить три скорости, характеризующие состояние газа:

– среднюю арифметическую скорость молекул газа;

– среднюю квадратичную скорость молекул газа;

– наиболее вероятную скорость молекул газа.

Средняя арифметическая скорость молекул газа определяется по формуле

$$\langle\upsilon\rangle=\int_o^\infty \upsilon f(\upsilon)d\upsilon=\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}4\pi\int_o^\infty \exp\left(-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right)\upsilon^3 d\upsilon=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}.$$

Средняя квадратичная скорость молекул газа равна:

$$\upsilon_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle \upsilon^2 \rangle} = \int_o^\infty \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_o^\infty \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right) \upsilon^4 d\upsilon = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

Наиболее вероятная скорость молекул газа – это скорость, отвечающая максимуму функции распределения молекул газа по скоростям.

Возьмем производную от функции распределения Максвелла по скорости $\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon}$, опустим постоянные множители и, приравняв полученное выражение к нулю, придем к уравнению

$$\exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right) \cdot \left(2 - \frac{m\upsilon^2}{kT} \right) \upsilon = 0 .$$

Значение скорости, обращающее в нуль выражение, стоящее в скобках, и равно наиболее вероятной скорости молекул газа.

$$\upsilon_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} .$$

Для разных температур кривые распределения молекул по скоростям будут иметь вид, изображенный на рис. 39.

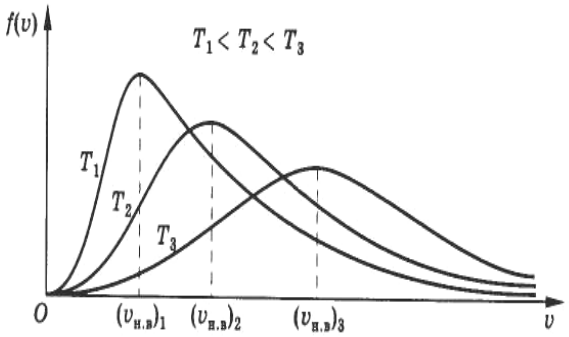

Рис. 39

С увеличением температуры газа максимум кривой смещается в сторону больших скоростей, а его абсолютная величина уменьша-

ется. Следовательно, при нагревании газа доля молекул, обладающих малыми скоростями, уменьшается, а доля молекул с большими скоростями увеличивается.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Схема лабораторной установки изображена на рис. 40. Основными элементами установки являются: а) двухэлектродная лампа (диод) **1**; б) выпрямитель **2**; в) миллиамперметр; г) вольтметр; д) реостат.

Распределение Максвелла применимо не только для молекул, но и для совокупности других хаотически движущихся одинаковых частиц. Это может быть, например, совокупность пылинок, участвующих в броуновском движении, совокупность электронов в металле либо в электровакуумном приборе (электронный газ). В работе изучается распределение частиц по скоростям для электронного газа, который образуется в двухэлектродной лампе (диоде).

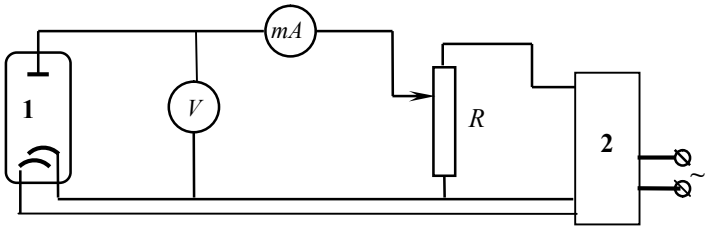

Рис. 40

Диод **1** представляет собой стеклянный баллон, откачанный до высокого вакуума, с двумя электродами – анодом и катодом. Работа диода основана на явлении *термоэлектронной эмиссии* – явлении испускания электронов нагретым катодом. При эмиссии с катода из чистого металла электроны имеют распределение, близкое к максвелловскому. Основным параметром, определяющим распределение Максвелла, является температура. В данном случае это будет температура катода, которая определяется током нити накала. Из экспериментальных измерений анодного тока в цепи, в зависимости от анодного напряжения при постоянном

токе накала, можно получить распределение электронов по скоростям. Анодный ток измеряется миллиамперметром. Анодное напряжение регулируется реостатом и измеряется вольтметром. При этом схема подключена таким образом, что на анод подается небольшой отрицательный потенциал относительно катода (задерживающий потенциал $U_з$). В этом случае до анода могут долететь только те электроны, кинетическая энергия которых достаточна для преодоления потенциального барьера задерживающего электрического поля. С увеличением абсолютной величины $|U_з|$ доля таких электронов уменьшается и, соответственно, уменьшается анодный ток I_A.

Для того чтобы уяснить сущность данного метода, схематизируем установку. Электронная лампа, используемая в установке, обладает осевой симметрией. Поэтому ее проекция на плоскость перпендикулярную оси симметрии будет иметь вид, представленный на рис. 41.

В результате термоэлектронной эмиссии пространство между управляющей сеткой и катодом заполнится электронным газом. «Молекулы» этого газа (электроны) имеют всевозможные скорости от нуля до максимальной скорости υ_{max}.

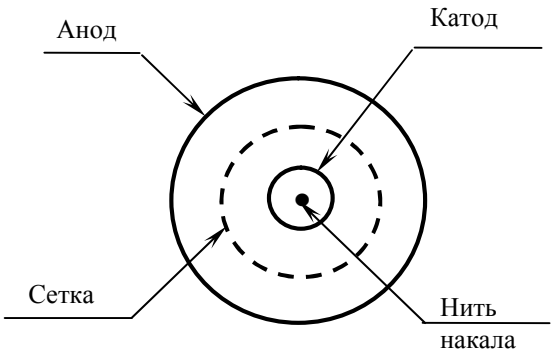

Рис. 41

Электроны, находящиеся в пространстве между сеткой и катодом при не очень больших отрицательных напряжениях на сетке

могут преодолевать потенциальный барьер, созданный отрицательным напряжением на сетке, и достигать анода. В цепи анод – катод протекает ток.

Если бы можно было поставить на пути электронов такой фильтр, который пропускал только электроны в интервале скоростей $\Delta\upsilon$, то задача экспериментального исследования зависимости распределения электронов по скоростям, т.е. какое количество электронов имеют ту или иную скорость, была бы решена. Однако, так как такой возможности не имеется, то можно создать «фильтр», который пропускает электроны из области между сеткой и катодом от некоторой минимальной скорости $\upsilon_з$ до максимальной υ_{max}. Таким своеобразным «фильтром» является управляющая сетка, на которую можно подавать различные задерживающие (отрицательные относительно катода) потенциалы $U_з$.

Минимальную скорость электронов υ_{min}, способных долететь до анода при некотором задерживающем потенциале $U_з$, определим, приравняв кинетическую энергию электрона к работе, которую совершают над электроном силы электрического поля при прохождении от катода к аноду, т.е.

$$\frac{m\upsilon^2}{2} \geq eU_з .$$

Миллиамперметр, включенный в анодную цепь лампы, регистрирует ток, созданный электронами со скоростями, лежащими в пределах $\upsilon_{min} < \upsilon < \upsilon_{max}$. Из последнего выражения выразим минимальную скорость электронов, пропускаемых управляющей сеткой.

$$\upsilon_{min} = \sqrt{\frac{2eU_з}{m}} , \qquad (2.2.1)$$

где e – элементарный заряд ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл);

m – масса электрона ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг).

Электроны же со скоростями $\upsilon < \upsilon_{min}$ управляющей сеткой не пропускаются. Число электронов ΔN, которые имеют скорость

$\upsilon \geq \upsilon_{min}$ и могут достигнуть анода, определим, используя функцию распределения Максвелла:

$$\Delta N = N \int_{\upsilon_{min}}^{\infty} f(\upsilon) d\upsilon = N \cdot F(\upsilon_{min}), \qquad (2.2.2)$$

где $F(\upsilon_{min}) = \int_{\upsilon_{min}}^{\infty} f(\upsilon) d\upsilon$;

N – общее число испущенных электронов.

Величина анодного тока прямо пропорциональна ΔN, т.е.

$$I_a = ke\Delta N,$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от характеристик диода.

С учетом (2.2.2) получим

$$I_a = keNF(\upsilon_{min}). \qquad (2.2.3)$$

Геометрический смысл величины $F(\upsilon_{min})$ – площадь заштрихованной фигуры на рис. 42. Поэтому ее можно представить как разность площади под всей кривой и площади незаштрихованной части:

$$F(\upsilon_{min}) = \int_0^{\infty} f(\upsilon) d\upsilon - \int_0^{\upsilon_{min}} f(\upsilon) d\upsilon = 1 - \int_0^{\upsilon_{min}} f(\upsilon) d\upsilon .$$

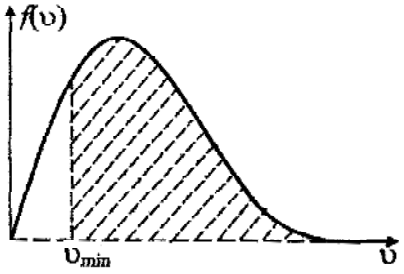

Рис. 42

Из этого уравнения следует:

$$\frac{dF}{d\upsilon_{\min}} = -\frac{d}{d\upsilon_{\min}}\left[\int_0^{\upsilon_{\min}} f(\upsilon)d\upsilon\right] = -f(\upsilon_{\min}). \qquad (2.2.4)$$

В дальнейшем для краткости записи будем полагать $\upsilon_{\min} = \upsilon$.

Если продифференцировать обе части уравнения (2.2.3) по υ, то с использованием уравнения (2.2.4) получим

$$-\frac{dI_a}{d\upsilon} = -keN\frac{dF}{d\upsilon} = -C\frac{dF}{d\upsilon} = Cf(\upsilon), \qquad (2.2.5)$$

где $C = ekN$ – постоянный множитель.

Таким образом, величина $-\frac{dI_a}{d\upsilon}$ с точностью до постоянного множителя C определяет функцию распределения электронов по скоростям.

Если функция распределения $f(\upsilon)$ при $\upsilon = \upsilon_в$ обладает максимумом, то функция $F(\upsilon)$ в этой точке имеет перегиб. Точка перегиба разделяет выпуклый и вогнутый участки графика функции. В соответствии с выражением (2.2.3) аналогичной особенностью обладает зависимость $I_a = I_a(\upsilon)$. Получив эту зависимость экспериментальным путем и определив абсциссу точки перегиба (рис. 43), получим наиболее вероятную скорость $\upsilon_в$.

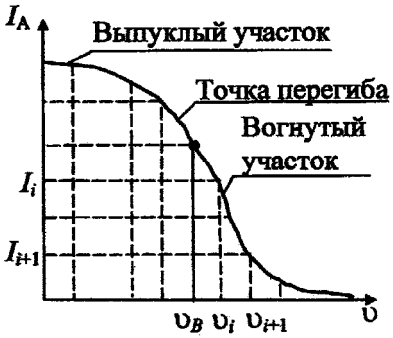

Рис. 43

Вид функции распределения электронов по скоростям можно получить, произведя графическое дифференцирование зависимости $I_a(\upsilon)$.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомьтесь с оборудованием лабораторного стенда, на котором собрана электрическая цепь по схеме, представленной на рис. 40. Определите цену деления вольтметра и миллиамперметра.

2. Вращающуюся ручку реостата R поверните против часовой стрелки до упора. Подключите лабораторный стенд к сети.

3. Спустя 5–10 минут при нулевом задерживающем потенциале $U_з = 0$ определите по миллиамперметру значение анодного тока и запишите в таблицу 1.

Таблица 1

i	$U_з$	I_a	υ

4. Затем, вращая по часовой стрелке ручку реостата R, установите задерживающее анодное напряжение 0,2–0,25 В и определите по миллиамперметру соответствующую силу анодного тока I_a. Измеренные значения запишите в таблицу 1.

5. Увеличивая задерживающее анодное напряжение с шагом 0,2 В (или 0,25 В), выполните аналогичные измерения анодного тока I_a.

6. Рассчитайте значение скорости υ для каждого значения задерживающего анодного напряжения $U_з$ по формуле (2.2.1). Результаты вычислений занесите в таблицу 1.

7. Постройте график зависимости I_a от υ и убедитесь в существовании точки перегиба на графике. Определите ориентировочное значение наиболее вероятной скорости электронов.

8. Для более точной оценки наиболее вероятной скорости $\upsilon_в$ проведите графическое дифференцирование зависимости $I_a(\upsilon)$. Для этого ось υ разбивается на равные части с шагом $\approx 0{,}1\cdot10^6$ м/с и по плавной кривой, аппроксимирующей экспериментальные значения, определяются значения анодного тока $I_1, I_2, \ldots, I_i, I_{i+1}, \ldots, I_n$, соответствующие точкам разбиения. В качестве приближенного значения производной, взятой с обратным знаком и соответствующей значению скорости $\overline{\upsilon}_i = \dfrac{\upsilon_i + \upsilon_{i+1}}{2}$, можно принять величину $-\dfrac{dI_a}{d\upsilon} \approx \dfrac{\Delta I_i}{\Delta\upsilon_i}$, где $\Delta I_i = I_i - I_{i+1}$, $\Delta\upsilon_i = \upsilon_{i+1} - \upsilon_i$. Графическое дифференцирование удобно провести путем последовательного заполнения таблицы 2.

Таблица 2

υ_i	$\Delta\upsilon_i$	I_i	ΔI_i	$\Delta I_i / \Delta\upsilon_i$	$\overline{\upsilon}_i$

9. Постройте график зависимости $\Delta I_i / \Delta\upsilon_i$ от $\overline{\upsilon}_i$, которая согласно (2.2.5) с точностью до постоянного множителя определяет функцию распределения электронов по скоростям $f(\overline{\upsilon}_i)$. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение функции распределения Максвелла по скоростям и поясните ее физический смысл.

2. Запишите выражения для наиболее вероятной, средней квадратичной и средней арифметической скоростей молекул газа. Поясните величины, входящие в эти формулы.

3. Дайте определение относительной скорости. Запишите выражение для функции распределения Максвелла в зависимости от относительной скорости.

4. При какой относительной скорости функция распределения достигает максимума? Чему равно значение функции распределения в максимуме?

5. Изобразите графически функции распределения Максвелла для двух различных температур. Чем они отличаются друг от друга?

6. Нарисуйте схему экспериментальной установки. Поясните назначение составляющих ее элементов и физическую сущность явлений, происходящих в диоде. От чего зависит температура электронного газа между сеткой и катодом?

7. Объясните сущность метода экспериментального определения распределения Максвелла.

8. Каким образом по вольт-амперной характеристике диода можно восстановить функцию распределения электронов по скоростям?

9. Объясните причину расхождения теоретической и экспериментальной зависимостей распределения Максвелла.

Лабораторная работа 2.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ДИНАМИЧЕСКОЙ ВЯЗКОСТИ

Цель работы: изучить явление вязкости газов, методы определения коэффициента вязкости и определить коэффициент динамической вязкости воздуха и жидкости.

Теоретическое введение

Нарушение равновесия в термодинамической системе может быть вызвано различными воздействиями: нагреванием различных частей системы до разных температур, созданием разных давлений (плотностей) в различных частях системы, приданием некоторым частям системы определенных скоростей дрейфа и т.д. Если термодинамические параметры изменяются в объеме системы (являются неоднородными), то в системе возникают процессы переноса, которые стремятся сгладить эти неоднородности и приблизить систему к равновесному состоянию.

Неравновесные процессы, которые приводят систему в равновесие, называются *процессами переноса*. Так, при неоднородном распределении концентрации вещества происходит процесс переноса массы, называемый *диффузией*. При неоднородности температуры идет перенос внутренней энергии – *теплопроводность*, а при неоднородности скоростей частиц среды – перенос импульса от одних точек пространства к соседним – *внутреннее трение*. Различные процессы переноса описываются во многом аналогичными закономерностями: перенос массы – *законом Фика*, перенос внутренней энергии – *законом Фурье*, перенос импульса – *законом Ньютона*. Эти законы отражают тот факт, что перенос той или другой величины идет тем интенсивней, чем больше неоднородность соответствующего параметра.

Рассмотрим процесс переноса импульса. Трение между частями сплошной среды (жидкости, газа), которые совершают движение с различными скоростями, называется *внутренним трением* или *вязкостью*.

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа или жидкости подчиняется закону Ньютона.

$$F = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dx} \right| S ,$$

где η – динамическая вязкость;

$\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости жидкости или газа в направлении *OX*, перпендикулярном к направлению движения слоев;

S – площадь поверхности, на которую действует сила.

Пусть газ находится между стенками S_1 и S_2 (рис. 44). Тогда частица газа в процессе контакта со стенкой S_1 получает направленный импульс $m\vec{\upsilon}$ и при последующем хаотическом в совокупности с направленным тепловым движением в процессе столкновений будет передавать часть направленного импульса другим частицам газа. Таким образом, в газе будет осуществляться перенос направленного импульса от S_1 к S_2. Слои газа, которые располагаются ближе к S_1, будут двигаться с большей направленной скоростью, чем более удаленные слои. Тогда в промежутке между пластинами установится некоторое распределение скорости направленного движения.

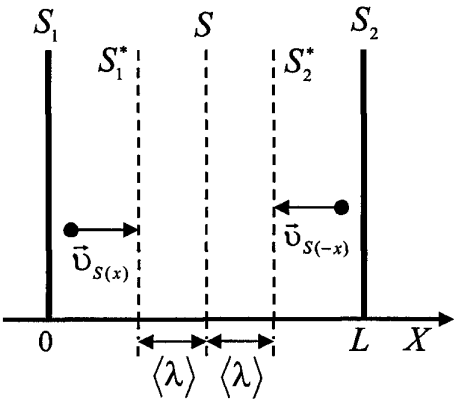

Рис. 44

Допустим, в рассматриваемой системе выполняется условие $\langle\lambda\rangle << L$. Выделим некоторую воображаемую поверхность S, а также параллельные ей и отстоящие на расстоянии, равном средней длине свободного пробега $\langle\lambda\rangle$ поверхности S_1^* и S_2^*. Пусть в какой-то момент времени слои обладают импульсами, которые не могут оставаться неизменными, так как происходит непрерывный переход молекул из одного слоя в другой. Согласно упрощенным представлениям, количество молекул, переходящих через площадку S за время Δt из одного слоя в другой, равно:

$$N = \frac{1}{6} n \langle\upsilon\rangle S \Delta t ,$$

где n – концентрация молекул газа;

$\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул газа.

Попав в другой слой, молекула претерпевает соударения с молекулами этого слоя, в результате чего она либо отдает избыток своего импульса другим молекулам, либо увеличивает свой импульс за счет других молекул. В итоге импульс более быстро движущегося слоя убывает, а более медленно движущегося – возрастает. Таким образом, слои ведут себя так, как если бы к слою (скорость которого больше) была приложена тормозящая его движение сила, а ко второму слою (скорость которого меньше) – такая же по величине ускоряющая его движение сила.

Через площадку S, лежащую на границе раздела слоев, переносится в направлении от первого слоя ко второму импульс, равный

$$p = N(m\upsilon_1 - m\upsilon_2) = \frac{1}{6} n \langle\upsilon\rangle S m (\upsilon_1 - \upsilon_2) \Delta t ,$$

где m – масса молекулы.

Считая, что каждая молекула, пролетающая через поверхность S, несет с собой импульс $m\upsilon$, определяемый значением скорости в том месте, где произошло последнее столкновение молекулы. В среднем последнее соударение происходит на расстоянии, равном длине свободного пробега молекулы. Поэтому молекулы, летящие в направлении оси OX, будут иметь значение скорости

$\upsilon_1 = \upsilon\left(x - \langle\lambda\rangle\right)$, а молекулы, летящие в противоположном направлении, значение скорости $\upsilon_2 = \upsilon\left(x + \langle\lambda\rangle\right)$.

Учитывая, что $\upsilon_1 - \upsilon_2 = \left[\upsilon\left(x - \langle\lambda\rangle\right) - \upsilon\left(x + \langle\lambda\rangle\right)\right] = -\frac{d\upsilon}{dx} 2\langle\lambda\rangle$, и приняв во внимание, что $nm = \rho$ – плотность газа, получим

$$p = \frac{1}{6} n\langle\upsilon\rangle Sm\left[\upsilon\left(x - \langle\lambda\rangle\right) - \upsilon\left(x + \langle\lambda\rangle\right)\right]\Delta t = -\frac{1}{6}\langle\upsilon\rangle\rho S \frac{d\upsilon}{dx} 2\langle\lambda\rangle\Delta t .$$

Таким образом, импульс, передаваемый от слоя к слою через поверхность *S*,

$$p = -\frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho \frac{d\upsilon}{dx} S\Delta t .$$

Согласно второму закону Ньютона взаимодействие двух слоев с силой *F* можно рассматривать как процесс передачи от одного слоя к другому за время Δt импульса, по величине равного силе, т.е.

$$p = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} S\Delta t .$$

Знак минус показывает, что импульс передается от слоя, движущегося с большей скоростью, к слою с меньшей скоростью.

Сравнивая последние две формулы, получим выражение для *коэффициента динамической вязкости*:

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho ,$$

где $\langle\lambda\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул газа;

ρ – плотность газа;

$\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул газа.

Коэффициент динамической вязкости – это физическая величина, численно равная силе трения, приходящейся на единицу площади при единичном градиенте скорости. Единица измерения в системе СИ – Паскаль-секунда [Па·с = Н·с/м^2].

Кроме динамической вязкости существует *кинематическая вязкость*, которая определяется как отношение динамической вязкости к плотности вещества и своим происхождением обязана классическим методам измерения вязкости, таким как измерение времени вытекания заданного объема жидкости через калиброванное отверстие под действием силы тяжести.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}.$$

Единица измерения в СИ – квадратный метр на секунду [м^2/с].

Средней длиной свободного пробега молекул называется среднее расстояние, которое проходит молекула, двигаясь хаотически, между двумя последовательными столкновениями.

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы.

Характер теплового движения молекул, а, следовательно, и механизмы внутреннего трения в жидкостях и газах существенно различаются. В газах расстояние между молекулами значительно превышает их размеры, что позволяет им свободно переходить из одного слоя в другой. Молекулы из быстро движущегося слоя, попадая в соседний, более медленный, отдают его молекулам при столкновениях часть своего импульса и таким образом увеличивают импульс медленно движущегося слоя.

В жидкостях межмолекулярные расстояния сравнимы с размерами самих молекул, поэтому движение каждой молекулы определяется воздействием на нее соседних молекул. Таким образом, внутреннее трение в жидкостях существенно зависит от особенностей межмолекулярного взаимодействия.

Коэффициент динамической вязкости жидкости во много раз превышает коэффициент вязкости газов и изменяется в широких пределах в зависимости от рода жидкости и ее температуры. С ростом температуры вязкость жидкостей уменьшается, в то время как вязкость газов растет. Уменьшение вязкости жидкости с ростом температуры обусловлено увеличением среднего расстояния между молекулами и ослаблением сил межмолекулярного взаимодействия.

Задание 1. Измерение коэффициента динамической вязкости воздуха.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 45. Основными элементами установки являются: а) капилляр **1** длиной 12,5 см и радиусом 0,5 мм; б) наклонный водяной манометр **2** со шкалой в мм, при помощи которого измеряется разность давлений воздуха в комнате и в сосуде; в) сосуд **3**, соединенный с атмосферой через капилляр, с кранами **4** и **5**; г) стеклянные колбы с делениями, секундомер.

Рис. 45

При закрытом кране **5** давление воздуха в сосуде и в комнате одинаково. Если открыть кран **5**, то вода из сосуда начнет выливаться, давление в нем понижается и через капилляр **1** засасывается воздух и скорость истечения воды со временем уменьшается. Вследствие внутреннего трения воздуха давления на концах капил-

ляра неодинаковы и разность этих давлений измеряется наклонным манометром **2**. Когда вода из крана **5** начинает вытекать каплями, то устанавливается равновесие: какой объем воздуха входит в сосуд через капилляр **1** за определенное время, которое измеряется секундомером, такой же объем воды вытечет через кран **5**.

Разность давлений на концах

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_{ж} g h\,, \tag{2.3.1}$$

где h – высота поднятия жидкости в манометре;

$\rho_{ж}$ – плотность воды.

Секундный объемный расход жидкости определяется по формуле Пуазейля:

$$V_{сек} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}\,,$$

где R – радиус капилляра;

l – длина капилляра;

η – коэффициент динамической вязкости.

С другой стороны, секундный объемный расход жидкости можно определить как

$$V_{сек} = \frac{V}{\Delta t}\,,$$

где V – объем вытекшей жидкости;

Δt – промежуток времени протекания жидкости.

Решая совместно эти два уравнения, получим

$$\frac{V}{\Delta t} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}\,. \tag{2.3.2}$$

Выразим из формулы (2.3.4) коэффициент динамической вязкости, и с учетом (2.3.1) получим

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8V} \cdot \frac{\Delta p \Delta t}{l} = \frac{\pi R^4}{8V} \cdot \frac{\rho_{ж} g h}{l} \Delta t\,. \tag{2.3.3}$$

Знание коэффициента вязкости воздуха дает возможность определить среднюю длину свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle$. Из кинетической теории газов известно, что коэффициент динамической вязкости определяется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3}\langle\upsilon\rangle\langle\lambda\rangle\rho\,. \tag{2.3.4}$$

Плотность газа определяется выражением, вытекающим из уравнения Менделеева – Клапейрона,

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \tag{2.3.5}$$

где R – универсальная газовая постоянная (R = 8,31 Дж/моль·К);

μ – молярная масса воздуха (μ = 29 г/моль);

T – абсолютная температура воздуха в помещении;

p – атмосферное давление в помещении, где проводился опыт.

Средняя арифметическая скорость молекул газа определяется по формуле

$$\langle\upsilon\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}\,. \tag{2.3.6}$$

Подставив (2.3.5) и (2.3.6) в формулу (2.3.4), получим

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{p}\sqrt{\frac{\pi RT}{8\mu}}\,. \tag{2.3.7}$$

Знание средней длины свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle$ дает возможность определить эффективный диаметр молекул воздуха. Средняя длина свободного пробега молекул связана с эффективным диаметром молекул d выражением

$$\langle\lambda\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \tag{2.3.8}$$

где n – концентрация молекул.

Давление газа связано с концентрацией его молекул формулой

$$n = \frac{p}{kT}, \tag{2.3.9}$$

где k – постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К).

Подставим выражение (2.3.9) в формулу (2.3.8) и, выразив эффективный диаметр молекул, получим

$$d = \sqrt{\frac{kT}{\sqrt{2}\pi p \langle \lambda \rangle}}. \tag{2.3.10}$$

Порядок выполнения работы

1. Откройте кран **5**, предварительно подставив под кран пустую емкость (см. рис. 45).

2. После того, как течение жидкости станет установившимся (вода станет выливаться каплями), а жидкость в манометре **2** будет неподвижно стоять на одном уровне, замените заполняемую емкость на проградуированную в единицах объема. Одновременно включите секундомер.

3. Сразу после включения секундомера отметьте показание манометра (длину столба жидкости L_1). Результат измерений запишите в таблицу.

4. Дождитесь, пока в проградуированную емкость наберется определенный объем воды (например, 100 мл) и снова отметьте показание манометра (длину столба жидкости L_2). Остановите секундомер и закройте кран **5**. Запишите результаты в таблицу.

5. Повторите измерения 6 раз (пункты 1–4).

6. Определите высоту поднятия жидкости в манометре по формуле

$$h = L \sin \alpha,$$

где α – угол наклона манометра к горизонту (для данной установки $\sin \alpha = 0,707$);

L – длина столба жидкости в манометре.

Таблица

$\rho_{ж} = 10^3$ кг/м^3, $R = 0,5$ мм, $l = 12,5$ см, $V =$											
i	L_1	L_2	Δt	h_1	h_2	h	Δp	η	$\overline{\eta}$	$\Delta\eta$	ε_η
1											
2											
3											
4											
5											
6											

7. Определите среднее показание манометра во время опыта по формуле

$$h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

и рассчитайте разность давления Δp по формуле (2.3.1).

8. По формуле (2.3.3) вычислите коэффициент динамической вязкости воздуха η и его среднее значение по $\overline{\eta}$ формуле (12). Результаты запишите в таблицу.

9. Вычислите относительную погрешность коэффициента динамической вязкости по формуле

$$\varepsilon_\eta = \frac{\Delta\eta}{\overline{\eta}} = 4\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta V}{V},$$

где следует считать погрешность величин $\Delta R = 0,02$ мм, $\Delta h = 0,5$ см, $\Delta t = 5$ с, $\Delta l = 0,5$ см, $\Delta V = 50$ мл.

10. Зная относительную погрешность коэффициента динамической вязкости и его среднее значение, определите абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta\eta = \overline{\eta} \cdot \varepsilon_\eta.$$

11. Вычислите среднюю длину свободного пробега молекул, используя среднее значение коэффициента динамической вязкости $\overline{\eta}$ по формуле (2.3.7).

12. Используя рассчитанную среднюю длину свободного пробега молекул $\langle\lambda\rangle$, вычислите эффективный диаметр молекул воздуха по формуле (2.3.10).

13. Сделайте вывод о том, велика ли средняя длина свободного пробега молекул по сравнению с эффективным диаметром молекул, и запишите окончательный ответ в виде

$$\eta = \overline{\eta} \pm \Delta\eta\,.$$

Задание 2. Измерение коэффициента динамической вязкости жидкости методом Стокса.

Описание лабораторной установки и метода измерений

Общий вид лабораторной установки изображен на рис. 46. Основными элементами установки являются: а) стеклянный цилиндр **1**, заполненный глицерином; б) резиновые кольца **2**, способные перемещаться вдоль цилиндра и фиксирующие заданное расстояние; в) несколько одинаковых шариков равной массы и равного диаметра; г) линейка и секундомер.

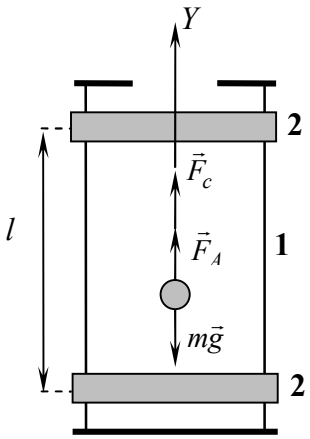

Рис. 46

Для определения коэффициента динамической вязкости жидкости используется *метод Стокса*, основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, опущенный в жидкость, плотность которой меньше плотности шарика, действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, выталкивающая сила (сила Архимеда) $\vec{F}_A$, направленная вертикально вверх и равная

$$F_A = \rho_ж g V = \frac{4}{3}\pi\rho_ж g R^3, \qquad (2.3.11)$$

где $\rho_ж$ – плотность жидкости;

V – объем шара;

R – радиус шара.

Со стороны вязкой жидкости действует сила сопротивления $\vec{F}_c$, направленная против движения шарика и определяемая по формуле Стокса.

$$F_c = 6\pi\eta R\upsilon. \qquad (2.3.12)$$

В начале движения преобладает сила тяжести, и движение будет ускоренным. С возрастанием скорости шарика, согласно формуле Стокса, сила сопротивления увеличивается, ускорение уменьшается, и движение шарика в некоторый момент времени становится равномерным, так как векторная сумма сил, действующих на шарик, становится равной нулю.

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_c = 0.$$

Спроектировав последнее равенство на ось Y, направленную противоположно направлению движения шарика, получим

$$F_A + F_c - mg = 0.$$

Подставив (2.3.11) и (2.3.12) в последнее равенство, получим

$$\frac{4}{3}\pi\rho_ж g R^3 + 6\pi\eta R\upsilon - mg = 0.$$

Выразим из этого соотношения коэффициент динамической вязкости, и заменив радиус шарика на половину его диаметра $R = \frac{d}{2}$, получим

$$\eta = \frac{\left(6m - \pi\rho_{ж} d^3\right)g}{18\pi d\upsilon}. \qquad (2.3.13)$$

Скорость шарика можно определить по времени прохождения участка l между кольцами, расположенными в области равномерного движения шарика:

$$\upsilon = \frac{l}{t}.$$

Подставив это выражение в (2.3.13), получим расчетную формулу

$$\eta = \frac{\left(6m - \pi\rho_{ж} d^3\right)gt}{18\pi ld}. \qquad (2.3.14)$$

Порядок выполнения работы

1. Установите на стеклянном цилиндре **1** на расстоянии l друг от друга метки **2** (см. рис. 46). Расстояние l задается преподавателем.

2. Измерьте это расстояние 5 раз по различным образующим цилиндра. Результаты измерений запишите в таблицу.

Таблица

d =					m =				ρ =			
i	l,	η,	Δl,	ε_η	t,	$\overline{t}$,	Δt,	$\Delta\overline{t}$,	η,	$\overline{\eta}$,	$\Delta\eta$,	ε_η
1												
2												
3												
4												
5												

3. Опустите шарик в исследуемую жидкость и измерьте время его движения от верхней кольцевой метки на цилиндре до нижней метки. Повторите измерения 5 раз и запишите результаты в таблицу.

4. Вычислите средние значения величин $\overline{l}$ и $\overline{t}$ по формуле (12) и рассчитайте абсолютные погрешности Δl и Δt и средние значения этих величин $\Delta\overline{l}$ и $\Delta\overline{t}$ по формулам (17), (18).

5. Вычислите по формуле (2.3.14) значение коэффициента динамической вязкости η и его среднее значение $\overline{\eta}$ по формуле (12).

6. Вычислите относительную погрешность коэффициента динамической вязкости по формуле

$$\varepsilon_\eta = \frac{\Delta\eta}{\overline{\eta}} = \frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}} + \frac{\Delta\bar{l}}{\bar{l}} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{mg\bar{t}}{3\pi^2\bar{l}\eta d}.$$

7. Зная относительную погрешность коэффициента динамической вязкости и его среднее значение, определите абсолютную погрешность по формуле

$$\Delta\eta = \overline{\eta}\cdot\varepsilon_\eta.$$

9. Подготовьте выводы по выполненной лабораторной работе и запишите окончательный ответ в виде

$$\eta = \overline{\eta} \pm \Delta\eta.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие процессы называются процессами переноса? Перечислите процессы переноса. Какими законами они описываются?

2. Дайте определение внутреннего трения. Сформулируйте закон Ньютона для внутреннего трения.

3. Объясните молекулярно-кинетический механизм внутреннего трения. Какие различия присутствуют в механизме возникновения внутреннего трения в жидкостях и газах?

4. Что такое коэффициент динамической вязкости, по какой формуле определяется в кинетической теории газов и в каких единицах измеряется?

5. Что такое коэффициент кинематической вязкости? Объясните физический смысл коэффициента кинематической вязкости. Как он связан с коэффициентом динамической вязкости?

6. Что такое средняя длина свободного пробега молекул и от чего она зависит? Запишите формулу, по которой определяется средняя длина свободного пробега молекул.

7. Что такое эффективный диаметр молекул и от чего он зависит? Запишите формулу, по которой определяется эффективный диаметр молекул.

8. Как зависит коэффициент внутреннего трения от температуры?

9. Выведите расчетную формулу для средней длины свободного пробега молекул, если известно значение коэффициента динамической вязкости.

10. Выведите расчетную формулу для эффективного диаметра молекул, если известно значение средней длины свободного пробега молекул.

СПРАВОЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Коэффициенты трения покоя и скольжения (приближенные значения)

	Трение покоя	*Трение скольжения* (*сухое*)
	μ_0	μ
Сталь/сталь	0,15	0,1
Металл/дерево	0,5……0,6	0,4……0,5
Дерево/дерево	0,65	0,3
Кожа/дерево	0,47	0,27

Таблица 2

Коэффициент восстановления скорости k_c при ударе (приближенные значения для скорости $\upsilon < 3$ м/с)

Вещество	k_c	*Вещество*	k_c
Дерево	1/2	Сталь	5/9
Пробка	5/9	Слоновая кость	8/9

Таблица 3

Модуль упругости *E* и модуль сдвига *G*

Вещество	*E*, 10^{10} Н/м^2	*G*, 10^{10} Н/м^2
Алюминий	7,1	2,6
Германий	8,1	3,1
Дюралюминий	7,3	2,7
Константан	16,3	6,2
Латунь	9,8	3,6
Манганин	12,4	4,6
Медь	12,3	4,55
Свинец	1,6	0,57
Сталь	20,6	8,0

Таблица 4

Динамическая вязкость η

Жидкости (при 20 °С)	η, мПа·с	*Газы* (при 20 °С и 101,3 кПа)	η, мПа·с
Вода	1,002	Азот	0,0175
Глицерин	1480	Водород	0,0088
Ртуть	1,554	Воздух	0,0182
Смола	3·1010	Двуокись углерода	0,0147
Ацетон	0,322	Кислород	0,0202

Таблица 5

Некоторые основные физические константы

Ускорение свободного падения	$g = 9{,}80665$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Газовая постоянная	$R = 8{,}31441$ Дж/(моль·К)
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}022045 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Число Лошмидта	$N_L = 2{,}686754 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$
Нормальный молярный объем	$V_\mu = 22{,}41383$ м^3/моль

Таблица 6

Буквы греческого алфавита

A	α	альфа	N	ν	ню
B	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	O	o	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
E	ε	эпсилон	P	ρ	ро
Z	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
H	η	эта	T	τ	тау
Θ	ϑ	тета	Y	υ	ипсилон
I	ι	йота	Φ	φ	фи
K	κ	каппа	X	χ	хи
Λ	λ	ламбда	Ψ	ψ	пси
M	μ	мю	Ω	ω	омега

Таблица 7

Множители и приставки

Приставка	*Краткое обозначение*	*Значение*	*Приставка*	*Краткое обозначение*	*Значение*
дека	да	10^1	деци	д	10^{-1}
гекто	г	10^2	санти	с	10^{-2}
кило	к	10^3	милли	м	10^{-3}
мега	М	10^6	микро	мк	10^{-6}
гига	Г	10^9	нано	н	10^{-9}
тера	Т	10^{12}	пико	п	10^{-12}
пета	П	10^{15}	фемто	ф	10^{-15}
экса	Э	10^{18}	атто	а	10^{-18}

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быкова, С. Л. Механика : учебно-методический комплекс по дисциплине «Физика» / С. Л. Быкова, И. Т. Неманова. – Минск : БГАТУ, 2006.

2. Ветрова, В. Т. Введение в лабораторный практикум по физике / В. Т. Ветрова, М. А. Лисенков. – Минск : Ротапринт БИМСХ, 1981.

3. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – Москва : Высшая школа, 2003.

4. Емельянов, В. А. Методы обработки результатов измерений в лаборатории физпрактикума : учебное пособие / В. А. Емельянов, Д. Л. Лин, В. Ф. Шолох. – Минск : Бестпринт, 1997.

5. Неманова, И. Т. Молекулярная физика. Термодинамика : учебно-методический комплекс по дисциплине «Физика» / И. Т. Неманова. – Минск : БГАТУ, 2006.

6. Ташлыкова-Бушкевич, И. И. Физика : учебник. В 2 ч. Ч. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Электричество и магнетизм / И. И. Ташлыкова-Бушкевич. – 2-е изд., испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2014.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Долгий Валерий Казимирович, **Неманова** Инна Тимофеевна,
Чеченина Елена Петровна, **Чернявский** Валерий Антонович

ФИЗИКА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

В трех частях

Часть 1

Механика. Молекулярная физика. Термодинамика

Учебное пособие

Ответственный за выпуск *В. А. Ковалев*
Редактор *Н. А. Антипович, Е. А. Хмельницкая*
Компьютерная верстка *Н. А. Антипович*

Подписано в печать 25.11.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд. л. 7,45. Тираж 150 экз. Заказ 711.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
№ 1/359 от 09.06.2014.
№ 2/151 от 11.06.2014.
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.