МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

В четырех частях

Часть 3

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по аграрному техническому образованию в качестве учебно-методического комплекса для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 74 06 Агроинженерия, 1-36 12 01 Проектирование и производство сельскохозяйственной техники

Минск
БГАТУ
2014

УДК 51(07)
ББК 22.1я7
М34

Рекомендовано научно-методическим советом факультета предпринимательства и управления БГАТУ. Протокол № 6 от 23 мая 2013 г.

Составители:
кандидат физико-математических наук, доцент *А. А. Тиунчик*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Л. А. Хвощинская*,
кандидат физико-математических наук, доцент *Н. С. Нипарко*,
ассистент *О. В. Рыкова*

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики БГУ
В. М. Котов;
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси
П. И. Соболевский

Математика : учебно-методический комплекс. В 4 ч.
М34 Ч. 3 / сост. : А. А. Тиунчик [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2014. – 236 с.
ISBN 978-985-519-644-1.

Издание представляет собой третью часть учебно-методического комплекса по дисциплине «Математика». Содержит четыре модуля: модуль 10 «Числовые и функциональные ряды»; модуль 11 «Кратные интегралы»; модуль 12 «Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы»; модуль 13 «Элементы теории поля». Каждый модуль представляет собой логически завершенную единицу и состоит из следующих разделов: комплексная цель; базовые проблемы модуля; учебно-информационная модель; основной научно-теоретический материал; дополнительный научно-теоретический материал; материалы к лекциям; материалы для управляемой самостоятельной работы студентов; материалы к практическим занятиям; образец контрольного задания для проверки результатов обучения.

Предназначено для студентов дневной формы обучения инженерных специальностей сельскохозяйственных высших учебных заведений.

УДК 51(07)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-519-644-1 (ч. 3)
ISBN 978-985-519-371-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание – это третья из четырех частей учебно-методического комплекса, каждая из которых содержит учебный материал, излагаемый в соответствующем семестре. Третья часть данного комплекса содержит перечень основных вопросов учебной программы дисциплины «Математика» 3 семестра, учебные материалы по теме: «Числовые и функциональные ряды», «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы», «Элементы теории поля». УМК составлен в соответствии с типовой программой дисциплины «Математика», разработанной по модульной технологии обучения. Каждый модуль содержит теоретический материал, соответствующий темам лекций, задачи для аудиторных занятий, задачи для самостоятельной работы студентов и индивидуальные домашние задания. Задачи для управляемой самостоятельной работы, образцы итоговых тестовых заданий и контрольных работ разделены на различные уровни (задания репродуктивного уровня отмечены знаком ^{0}, а задания творческого уровня отмечены знаком *).

В результате изучения дисциплины «Математика» в третьем семестре студент должен ***знать:***

– основы высшей математики в предлагаемом объёме, которые являются базой для дальнейшего образования инженера.

***уметь*:**

– использовать математический аппарат и математические методы при решении конкретных задач;

– формулировать в математических терминах конкретные инженерные задачи и находить алгоритмы их решения;

– самостоятельно изучать математическую и техническую литературу с целью повышения квалификации.

ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» (3 СЕМЕСТР)

Модуль 10
Числовые и функциональные ряды

Определение числового ряда, его сходимость, расходимость, сумма. Функциональные ряды, области их сходимости и расходимости. Тригонометрические ряды Фурье, их сходимость для кусочно-монотонных функций. Разложение в ряд Фурье периодических функций с периодом 2π, $2l$. Ряды Фурье для чётных, нечётных, непериодических функций. Приложения рядов Фурье в электротехнике, механике колебательных процессов. Понятие о практическом гармоническом анализе.

Модуль 11
Кратные интегралы

Определение двойного интеграла, его основные свойства. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах и его вычисление. Приложения двойных интегралов. Вычисление площади плоской пластинки, объёма и площади поверхности тела, массы, центра масс и моментов инерции неоднородных пластин. Определение тройного интеграла, его основные свойства. Вычисление тройного интеграла в прямоугольных декартовых координатах. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах, его вычисление. Приложения тройных интегралов. Вычисление объёмов тел, массы неоднородного тела, координат его центра масс, моментов инерции неоднородных тел.

Модуль 12
Криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы

Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги): определение, вычисление в декартовых координатах, в параметрическом случае, в полярных координатах, свойства. Приложения криволинейных интегралов по длине дуги: вычисление длин дуг, массы, координат центра масс, моментов инерции материальной неоднородной дуги, площади цилиндрической поверхности. Криволинейные интегралы второго рода (по координатам): определение, вычисление в декартовых координатах, в параметрическом случае, в полярных координатах, свойства. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Приложения криволинейных интегралов по координатам: вычисление работы силы на криволинейном пути, площади плоской фигуры, нахождение функции по её полному дифференциалу. Поверхностные интегралы первого рода: определение, свойства, связь с двойным интегралом, вычисление. Приложения поверхностных интегралов первого рода к вычислению массы, центра тяжести, моментов инерции материальной неоднородной поверхности. Поверхностные интегралы второго рода: определение, свойства, связь с тройным интегралом (формула Остроградского-Гаусса), связь с криволинейным интегралом (формула Стокса), вычисление.

Модуль 13
Элементы теории поля

Векторная функция скалярного аргумента. Годограф. Производная векторной функции по скалярному аргументу. Уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к годографу. Скалярные и векторные поля. Геометрические характеристики полей: поверхности уровня (эквипотенциальные поверхности), векторные линии. Операторы теории поля: градиент, дивергенция, ротор, оператор Лапласа. Дифференциальные операторы 2-го порядка. Поток векторного поля, его физический смысл и вычисление потока векторного поля. Циркуляция векторного поля и её физический смысл. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса в теории поля, электротехнике. Физический смысл дивергенции и ротора. Простейшие векторные поля: соленоидальное, потенциальное, гармоническое; их свойства.

МОДУЛЬ 10
ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) знать а) *понятия и определения*: Числовой ряд и его сумма. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости. Достаточные признаки расходимости и сходимости. Признаки сравнения, Даламбера, радикальный Коши; интегральный признак Коши сходимости числового ряда. Знакочередующийся ряд, признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов; функционального и степенного ряда; теорему Абеля, радиус и интервал сходимости степенного ряда; формулы Тейлора и Маклорена; условие разложимости функций в степенные ряды; разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$ в степенные ряды; тригонометрический ряд, ряд Фурье, теорема о разложимости периодической функции в ряд Фурье; **б)** *характеризовать* числовые ряды; функциональные ряды; формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье для функций с периодом $T = 2l$, $T = 2\pi$; **в)** *моделировать* задачи геометрии, механики и физики при помощи теории рядов; задачи о разложении синусоидального электрического тока в ряд Фурье;

2) уметь находить сумму ряда; применять степенные ряды к приближенному вычислению значений функций, неопределенных и определенных интегралов, решению ДУ; находить коэффициенты ряда Фурье, разлагать в ряд Фурье функции, заданные на отрезке.

§ 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение. Пусть $(a_n) = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *числовым рядом*, числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ – членами ряда, а число a_n – n-м членом ряда. Таким образом, ряд – бесконечная сумма слагаемых.

Например, числовыми рядами являются следующие выражения:

$$1 + 3 + 9 + ... + 3^{n-1} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Определение. Сумма конечного числа n первых членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *n-й частичной суммой* данного ряда.

Таким образом,

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Определение. Если существует конечный предел последовательности (S_n) частичных сумм ряда

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S – *суммой* данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если предел последовательности (S_n) не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

Выражение вида

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

представляющее собой числовой ряд, называется *n-ым остатком ряда.* Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n.$$

Поскольку для сходящегося числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Пример 10.1. Ряд $b + bq + bq^2 + \ldots + bq^n + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} bq^n$ является сходящимся при $|q| < 1$.

Решение. Действительно, данный ряд представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии с первым членом b и знаменателем q. Из школьного курса известно, что такая сумма является конечным числом, которое может быть найдено по формуле $S = \dfrac{b}{1-q}$.

Пример 10.2. Ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ является расходящимся.

Решение. Для доказательства этого факта выпишем несколько первых членов этого ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \ldots$$

Сгруппируем и заменим отдельные члены ряда на меньшие (сумма при этом может только уменьшиться):

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{17}+\ldots\leq$$

$$\leq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{32}+\ldots$$

Очевидно, после такой группировки и замены сумма каждой группы слагаемых будет равна $\frac{1}{2}$, а вся сумма будет стремиться к бесконечности:

$$1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+16\cdot\frac{1}{32}+32\cdot\frac{1}{64}+64\cdot\frac{1}{128}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\to\infty$$

Так как полученная сумма стремится к бесконечности, а члены исходного ряда не меньше членов этого расходящегося ряда, следовательно, исходный ряд тоже расходится.

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ называется *гармоническим*.

§ 2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и его n-ю частичную сумму

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n\text{, т. е. } a_n=S_n-S_{n-1}.$$

Если ряд сходится, то существует конечный предел $S=\lim_{n\to\infty}S_n$.

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (т. е. предел общего члена сходящегося ряда при $n\to\infty$ равен нулю).

Следствие ***(достаточный признак расходимости ряда).*** Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Из выполнения условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не обязательно следует сходимость ряда, т.е. оно не является достаточным признаком сходимости ряда.

Например, если рассмотреть гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

то очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, однако гармонический ряд расходится.

Пример 10.3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$.

Решение. Данный ряд расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7 \neq 0.$$

Здесь мы использовали второй замечательный предел и достаточный признак расходимости ряда.

§ 3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

1. Перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость).

2. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = S_a + S_b.$$

3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Aa_k$ также сходится и $\sum_{k=1}^{\infty} Aa_k = AS$, где A – const.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} Aa_k$ называется произведением ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ на число A.

Замечание. Операции суммирования рядов и умножения ряда на число называются линейными операциями над рядами. Из данных определений вытекает, что линейные операции над рядами реализуются с помощью линейных операций над их членами.

Отметим также, что разность двух сходящихся рядов является сходящимся рядом. Сумма сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом. Сумма двух расходящихся рядов может быть как расходящимся, так и сходящимся рядом.

§ 4. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Рассмотрим числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами, т. е. $a_n \geq 0$.

Признак сравнения. Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ справедливо неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ для $\forall n \geq n_0$, то:

1) из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Пример 10.4. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{2^n + n} + \ldots .$$

Решение. Применим признак сравнения.

Так как $\frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$ для $\forall n \geq 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$, то сходится и заданный ряд.

Предельный признак сравнения. Если для членов рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0,$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n,\ b_n > 0,$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,\ \ 0 < L < \infty,$$

то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

В частности, если $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$ то удобно воспользоваться знаком эквивалентности и писать $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty$.

Например, многочлен степени k

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \sim\ a_k n^k,$$

т.е. многочлен эквивалентен своей старшей степени при $n \to \infty$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_k(n)}{a_k n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{a_k n^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_{k-1}}{a_k n} + \ldots + \frac{a_1}{a_k n^{k-1}} + \frac{a_0}{a_k n^k} \right) = 1 + 0 + \ldots + 0 + 0 = 1.$$

При применении признаков сравнения для исследования сходимости числовых рядов удобно сравнивать с *обобщенным гармоническим рядом* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. При $p = 1$ получаем *гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Пример 10.5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$.

Решение. Применим признак сравнения. Так как $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ как обобщенный гармонический с показателем $p = \frac{3}{2} > 1$ сходится, то исходный ряд также сходится.

Здесь можно применить и предельный признак сравнения. Поскольку $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ при $n \to \infty$, то исходный ряд сходится.

Пример 10.6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Решение. Попробуем применить признак сравнения: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является гармоническим и расходится. Поэтому признак сравнения в данном случае не решает вопрос о сходимости ряда.

Применим предельный признак сравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n} \text{ при } n \to \infty .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится как гармонический, а значит исходный ряд также расходится.

Пример 10.7. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\cdot(n^2-n+1)} .$$

Решение. Применим предельный признак сравнения:

$$\frac{n+2}{(n+1)\cdot(n^2-n+1)} \sim \frac{n}{n\cdot n^2} = \frac{1}{n^2} \text{ при } n \to \infty .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд с показателем $p = 2 > 1$. Следовательно, исходный ряд также сходится.

Признак Д'Аламбера. Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, существует предел $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Тогда:

1) при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится;

3) при $L = 1$ признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Пример 10.8. Исследовать сходимость ряда

$$2 + \frac{2^2}{2^4} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^4}{4^4} + \ldots + \frac{2^n}{n^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}.$$

Решение. Применим признак Д'Аламбера. Запишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$a_n = \frac{2^n}{n^4}, \quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} : \frac{2^n}{n^4} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^4 = 2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4} = 2.$$

Так как $L = 2 > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 10.9. Исследовать сходимость ряда

$$3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}.$$

($n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ и называется «эн-факториал»).

Решение. Применим признак Д'Аламбера. Запишем n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$a_n=\frac{3^n}{n!},\quad a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 3^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\cdot 3\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1))\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0.$$

Поскольку $L=0<1$, то данный ряд сходится.

Радикальный признак Коши. Пусть для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $a_n\geq 0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. Тогда:

1) при $L<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) при $L>1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится;

3) при $L=1$ радикальный признак Коши неприменим.

Пример 10.10. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{2n+3}\right)^n$.

Решение. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n}{2n+3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+3}=\lim\frac{5}{2+\frac{3}{n}}=\frac{5}{2}>1,$$

то данный ряд расходится по радикальному признаку Коши.

Интегральный признак Коши. Если функция $f(x)$ на промежутке $[1;+\infty)$ монотонно убывает и неотрицательна, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 10.11. Исследовать сходимость *обобщенного гармонического ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Решение.

1) Если $p \le 0$, то $\frac{1}{n^p} \ge 1$ для $\forall n \in \mathbf{N}$, а $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^{-p} = \infty$.

Так как нарушается необходимое условие сходимости ряда, то в этом случае ряд расходится.

2) Пусть $p > 0$.

Обозначим $f(n) = \frac{1}{n^p}$ и рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ монотонно убывает и положительна на промежутке $[1;+\infty)$. Вычислим несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Если $p = 1$, то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\ln|b| - \ln 1\right) = \infty,$$

то есть несобственный интеграл расходится.

Если $p > 0$ и $p \ne 1$, то

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_1^b=\frac{1}{1-p}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-p}-1\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, & p>1,\\ \infty, & 0<p<1.\end{cases}$$

Следовательно, обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

§ 5. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, который имеет бесконечное число положительных членов и бесконечное число отрицательных членов, называется *знакопеременным.*

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, который является знакоположительным.

Теорема 10. 1. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

В этой теореме сформулирован достаточный признак сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Определение. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся*.

Определение. *Знакочередующимся* называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad (10.1)$$

где a_n, $n = 1, 2, \ldots$, – числа одного знака.

При исследовании сходимости знакочередующихся рядов применяют признак Лейбница.

Признак Лейбница. Если члены знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ удовлетворяют условиям: **1)** $a_n \geq a_{n+1}$ для $\forall n \in \mathbf{N}$,

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

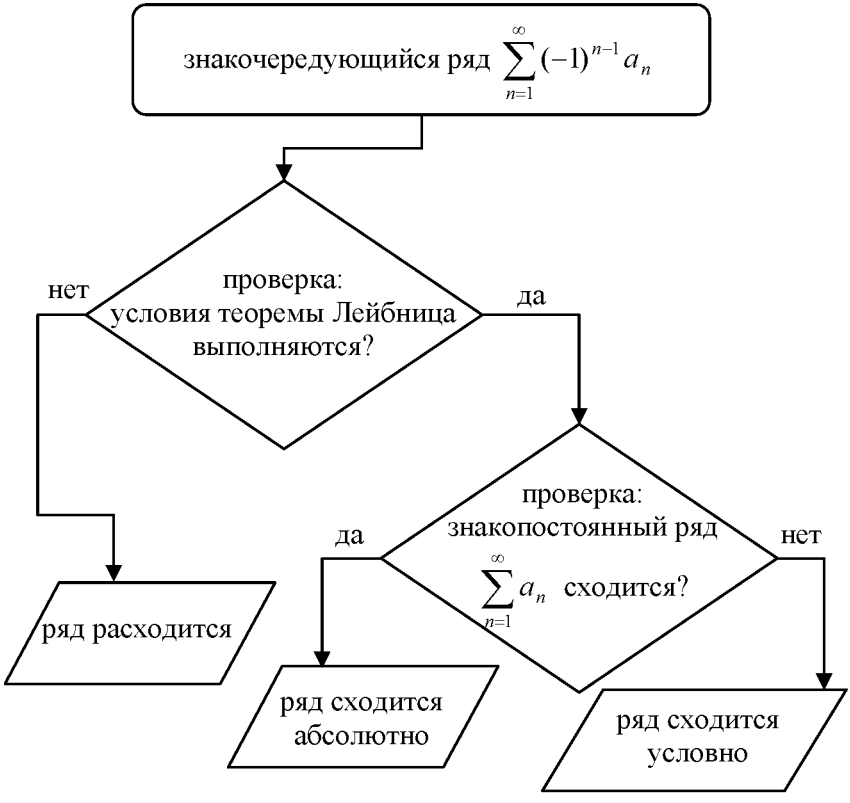
то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т.е. $S \leq a_1$.

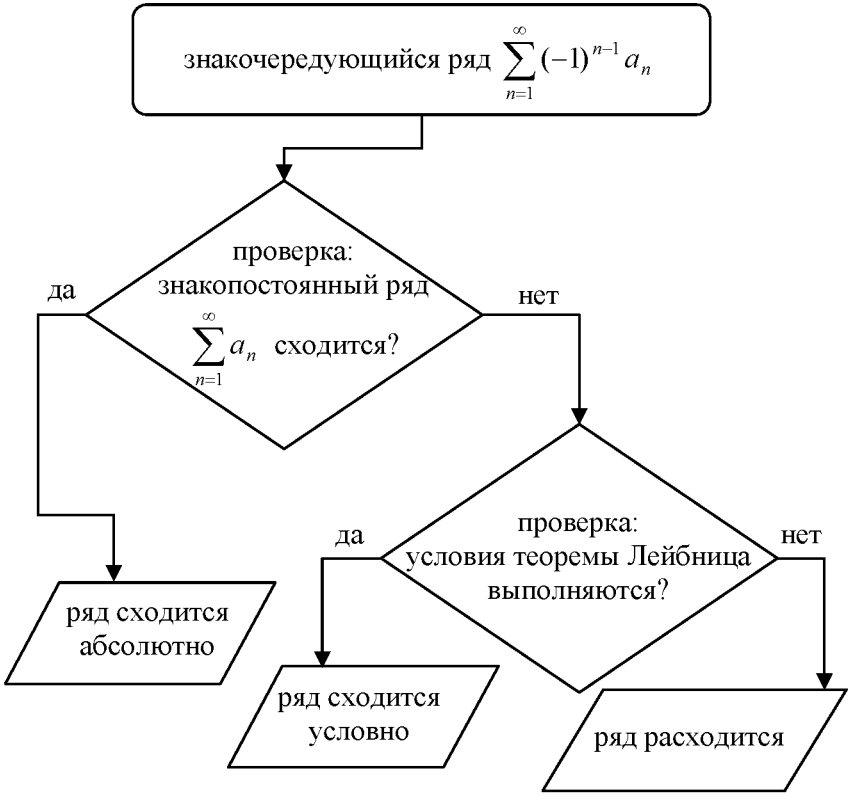
Следствие: Остаток r_n знакочередующегося ряда удовлетворяет неравенству $|r_n| < a_{n+1}$.

Таким образом, знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ сходится, если общий член этого ряда a_n монотонно убывает и стремится к нулю ($a_n \downarrow$ и $a_n \to 0$ при $n \to \infty$).

Так как знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных, то при формулировке условия абсолютной сходимости вместо выражения «общий член ряда a_n» иногда используют выражение «абсолютная величина общего члена ряда a_n» или «модуль общего члена ряда a_n», особо подчеркивая неотрицательный характер a_n.

Отметим, что при решении задач на исследование сходимости знакочередующихся рядов можно использовать две стратегии, представленные ниже в виде блок-схем. Первая стратегия оказывается более эффективной, если исследуемый ряд расходится, а вторая – если он сходится абсолютно.


знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$
проверка:
условия теоремы Лейбница
выполняются?
нет
да
ряд расходится
проверка:
знакопостоянный ряд
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится?
да
нет
ряд сходится
абсолютно
ряд сходится
условно



Пример 10.12. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$ для $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$ (т. е. $\frac{1}{n^2}$ монотонно убывая, стремится к нулю при $n \to \infty$), то данный ряд сходится по признаку Лейбница. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 10.13. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – это расходящийся гармонический ряд.

Исследуем ряд на условную сходимость. Поскольку $\frac{1}{n}$ монотонно убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$, то по признаку Лейбница ряд сходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

§ 6. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Рассмотрим теперь бесконечную последовательность функций

$$U_1(x),\ U_2(x),\ldots,U_n(x),\ldots$$

Определение. Выражение вида

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$$

называется *функциональным рядом*, а сумма первых n слагаемых

$$S_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)$$

n-ной частичной суммой функционального ряда.

Функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

(если предел существует и конечен) *называется суммой функционального ряда.*

Определение. Множество всех значений x, для которых ряд сходится, называется *областью сходимости функционального ряда.*

Например, ряд $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ при $|x|<1$ является суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

и, следовательно, сходится, причем сумма ряда $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является интервал (– 1; 1).

Определение. Ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \qquad (10.2)$$

где a_n $(n\in\mathbf{N})$, x_0 – действительные числа, называется *степенным рядом* по степеням $x-x_0$, а числа a_n – коэффициентами степенного ряда.

При $x_0=0$ получаем степенной ряд по степеням x

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

Поскольку заменой $x-x_0=X$ ряд (10.2) можно свести к последнему ряду, то ограничимся рассмотрением таких рядов.

Степенной ряд всегда сходится в точке $x=0$. При $x\neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для степенных рядов справедлива следующая теорема.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится в точке $x_1\neq 0$, то он сходится абсолютно для любых x таких, что $|x|<|x_1|$.

Следствие. Если в точке x_2 степенной ряд расходится, то он расходится для любых x таких, что $|x|>|x_2|$.

Из теоремы Абеля и следствия вытекает, что если степенной ряд сходится хотя бы в одной точке $x\neq 0$, то всегда существует число $R>0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $|x|<R$ и расходится для всех $|x|>R$. При $x=\pm R$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Определение. Неотрицательное число R такое, что степенной ряд сходится при $|x|<R$ и расходится при $|x|>R$, называют *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R;R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Если ряд сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех действительных x, то $R = \infty$.

Для определения радиуса сходимости степенного ряда используют формулы:

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{10.3}$$

Пример 10.14. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

Решение. Запишем n-й и $(n + 1)$-й коэффициенты ряда

$$a_n = n!, \quad a_{n+1} = (n+1)!$$

Радиус сходимости найдем по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

т.е. ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

Пример 10.15. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n}}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \quad \text{где } a_n = \frac{1}{2^n \sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{n+1}}$$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{2^n \sqrt{n}} : \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1} \sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n}} = \lim_{n \to \infty} 2 \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Как видно, ряд будет сходиться для тех значений x, для которых

$$|x - 1| < 2, \text{ или } -2 < x - 1 < 2, \text{ или } -1 < x < 3.$$

Таким образом, мы нашли интервал сходимости степенного ряда: $-1 < x < 3$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1-1)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Полученный ряд является знакочередующимся, его общий член по абсолютному значению монотонно убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$. По признаку Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов заключаем, что ряд сходится. Следовательно, значение $x=-1$ принадлежит области сходимости данного ряда.

При $x=3$ получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-1)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Это обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, где $p=\frac{1}{2}<1$, который расходится. Следовательно, значение $x=3$ не принадлежит области сходимости данного ряда.

Таким образом, $-1\le x<3$ – область сходимости исследуемого ряда.

§ 7. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ сходится и его сумма $S(x)=f(x)$, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам:

$$a_0=f(x_0),\quad a_1=f'(x_0),\quad a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Степенной ряд вида

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется *рядом Маклорена*.

По определению полагаем $0! = 1$.

Если для произвольной бесконечно дифференцируемой функции формально составить ряд Тейлора, то он может и не совпадать с самой функцией $f(x)$. Поэтому важно определить, когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен.

Теорема 10.2. Если на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ функция $f(x)$ и все ее производные ограничены в совокупности одной и той же константой M, то ее ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ на интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$.

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

1. Запишем разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = e^x$.

Так как $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$, то

$$f'(0) = 1, \ f''(0) = 1, \ \ldots, \ f^{(n)}(0) = 1.$$

Таким образом, получаем следующее разложение:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Поскольку $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$, радиус сходимости данного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 = \infty,$$

то есть ряд сходится при любых $x \in (-\infty; +\infty)$.

Аналогично можно получить разложения других функций в ряды Маклорена.

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$,

$x \in (-\infty; +\infty)$.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$x \in (-\infty; +\infty)$.

4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\quad x \in (-1;\ 1)$.

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots +$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1;\ 1).$$

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\quad x \in (-1;\ 1)$.

Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена используется, например, при вычислении приближенных значений функций, определенных интегралов, решении дифференциальных уравнений и др.

Пример 10.16. Функцию $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$ разложить в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

в которой заменим x на $\left(-2x^2\right)$.

Получим следующее разложение в ряд Маклорена

$$e^{-2x^2} = 1 + \left(-2x^2\right) + \frac{\left(-2x^2\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(-2x^2\right)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2^2 x^4}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{n!},$$

$$-\infty < x < +\infty .$$

Пример 10.17. Вычислить $\ln 1{,}2$ с точностью $\delta = 0{,}001$.

Решение. Воспользуемся разложением

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1 \qquad (10.4)$$

Так как $\ln 1{,}2 = \ln(1 + 0{,}2)$, и $-1 < 0{,}2 < 1$, то полагая в формуле (10.4) $x = 0{,}2$ находим

$$\ln 1{,}2 = 0{,}2 - \frac{(0{,}2)^2}{2} + \frac{(0{,}2)^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{(0{,}2)^n}{n} + \ldots =$$

$$= 0{,}2 - \frac{0{,}04}{2} + \frac{0{,}008}{3} - \frac{0{,}0016}{4} + \ldots = 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00266 - 0{,}0004 + \ldots$$

Так как четвертый член ряда $0{,}0004 < 0{,}001$, ограничимся первыми слагаемыми. Значит,

$$\ln 1{,}2 \approx 0{,}2 - 0{,}02 + 0{,}00266 \approx 0{,}223 .$$

§ 9. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Рассмотрим нахождение решения задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Искомую функцию $y(x)$ будем представлять в виде ряда Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Так как значения $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$ известны, то из условия можно сразу найти $y''(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0)$. Дальнейшие коэффициенты ряда могут быть найдены путем последовательного нахождения производных более высокого порядка от выражения $y'' = f(x, y, y')$ с последующей подстановкой в них уже известных значений производных меньшего порядка.

Пример 10.18. Решить уравнение $y'' - xy = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Решение. Так как $x_0 = 0$, то решение дифференциального уравнения будем искать в виде разложения искомой функции в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Подставим начальные условия $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ в исходное дифференциальное уравнение. Получаем $y''(0) - 0 = 0$, то есть $y''(0) = 0$.

Запишем теперь исходное дифференциальное уравнение в виде $y'' = xy$ и будем последовательно дифференцировать его по x.

$y''' = y + xy'$ $\qquad$ $y'''(0) = 1;$

$y^{IV} = y' + y' + xy''$ $\qquad$ $y^{IV}(0) = 0;$

$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''$ $\qquad$ $y^{V}(0) = 0;$

$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}$ $\qquad$ $y^{VI}(0) = 4.$

Подставляем полученные значения и находим, что

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \ldots$$

§ 10. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В электротехнике широкое применение нашли функциональные ряды Фурье.

Определение. *Тригонометрическим рядом* называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+$$
$$+b_n\sin nx+\ldots=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx. \qquad (10.5)$$

Многие периодические функции можно представить в виде суммы ряда (10.5).

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом T = 2π интегрируема на отрезке [– π; π].

Определение. *Рядом Фурье* функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \qquad (10.6)$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad (10.7)$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом T = $2l$ интегрируема на отрезке [– l; l].

Определение. *Рядом Фурье* функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad (10.8)$$

где

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x, \qquad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\mathrm{d}x,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\mathrm{d}x. \qquad (10.9)$$

Теорема о разложимости периодической функции в ряд Фурье

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $T = 2l$ на отрезке $[-l; l]$

1) кусочно-монотонна,

2) имеет конечное число точек разрыва 1-го рода,

то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится для всех действительных x. При этом сумма ряда $S(x) = f(x)$ в точках её непрерывности и $S(x)=\frac{1}{2}\left(f(x-0)+f(x+0)\right)$ в точках разрыва.

Пример 10.18. Разложить периодическую с периодом $T = 2\pi$ функцию $f(x)=\begin{cases}0 & при\ \ -\pi\le x<0,\\ \pi-x & при\ \ 0\le x<\pi,\end{cases}$ в ряд Фурье.

Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$.

Решение. Найдём коэффициенты ряда Фурье по формулам (10.9):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}0\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x.$$

При вычислении последнего интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям $\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u$, положив $u=\pi-x$, $\mathrm{d}v=\cos nx\mathrm{d}x$. Тогда $\mathrm{d}u=(\pi-x)'\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x$, $v=\int\cos nx\mathrm{d}x=$ $=\frac{1}{n}\int\cos nx\mathrm{d}(nx)=\frac{1}{n}\sin nx.$

Следовательно,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left((\pi-x)\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-0-\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi-\cos 0)=-\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right)=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Аналогично находим коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \pi - x, & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x, & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\left(-(\pi - x)\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. -\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\mathrm{d}x \right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{n}\cos 0 - \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{n}.$$

Подставив найденные значения a_0, a_n, b_n в формулу (10.8), запишем разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx \right).$$

Графики функции $f(x)$ и суммы ряда $S(x)$ изображены на рис.10.1 и рис. 10.2.

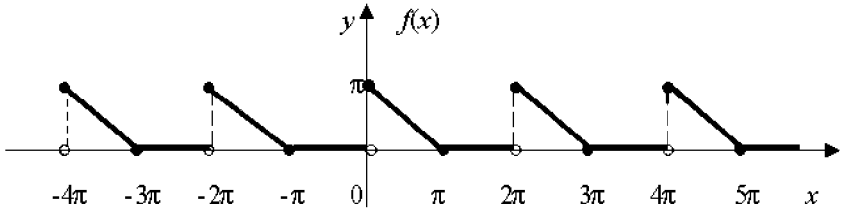


Рис. 10.1

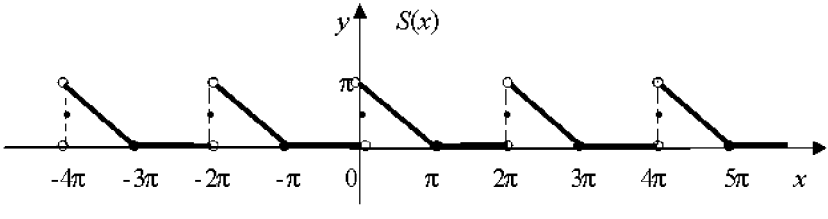


Рис. 10.2

Заметим, что в точках разрыва 0, ±2π, ±4π,… функция $S(x)$ принимает значения, равные полусумме значений функции $f(x)$ слева и справа от этих точек.

§ 11. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим периодическую функцию $f(x)$, интегрируемую на отрезке $[-l; l]$.

Если функция $f(x)$ – *чётная* на интервале $(-l; l)$, т. е. $f(-x) = f(x)$, то в формуле (10.6) коэффициенты $b_n = 0$ и ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad (10.10)$$

где $$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\mathrm{d}x \qquad (10.11)$$

Если функция $f(x)$ – *нечётная* на интервале $(-l; l)$, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то в формуле (10.9) коэффициенты $a_0 = 0$, $a_n = 0$ и ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (10.12)$$

где $$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\mathrm{d}x. \qquad (10.13)$$

Пример 10.19. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию $f(x) = |x|$, $-2 \le x \le 2$. Записать сумму первых пяти (ненулевых) членов этого ряда.

Решение. Поскольку $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ для любых $x \in (-2; 2)$, то функция $f(x)$ является чётной. При разложении её в ряд Фурье воспользуемся формулами (10.10), (10.11), где полагаем $l = 2$.

Так как $f(x) = x$ на промежутке $[0; 2)$, то

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=2,\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=$$

$$=\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx, & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{matrix}\right|=x\cdot\left.\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2-$$

$$-\int_0^2\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}dx=0+\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2\cos\left.\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2=$$

$$=\left(\frac{2}{\pi n}\right)^2(\cos\pi n-\cos 0)=\frac{4}{\pi^2 n^2}((-1)^n-1).$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x)\sim 1+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}, \qquad (10.14)$$

Придавая в формуле (10.14) индексу n значения n = 1,2,3,…,7,…, запишем сумму первых пяти ненулевых членов ряда (или сумму первых пяти гармоник ряда).

Обозначив в формуле (10.14)

$$A_n=\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

находим

$$A_1=\frac{-1-1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{2}=-2\cos\frac{\pi x}{2},\qquad A_2=\frac{(-1)^2-1}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{2}=0,$$

$$A_3=\frac{(-1)^3-1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}=-\frac{2}{9}\cos\frac{3\pi x}{2},\qquad A_4=0,$$

$$A_5=\frac{(-1)^5-1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}=-\frac{2}{25}\cos\frac{5\pi x}{2},\qquad A_6=0,$$

$$A_7=\frac{(-1)^7-1}{7^2}\cos\frac{7\pi x}{2}=-\frac{2}{49}\cos\frac{7\pi x}{2}.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2} + \frac{1}{49}\cos\frac{7\pi x}{2} + \ldots\right).$$

Если функция $f(x)$ не является периодической и задана на отрезке $[0; l]$, то доопределяем её на интервал $(-l; 0)$ чётным или нечётным образом и далее периодически на всю действительную ось. Полученную таким образом функцию $\tilde{f}(x)$ разлагаем в ряд Фурье, который будет совпадать с рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0; l]$.

Пример 10.20. Функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0; 2]$, разложить в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Доопределяем функцию $f(x)$ чётным образом на интервал $(-2; 0)$ и далее периодически на всю действительную ось, как это указано на рис.10.3.

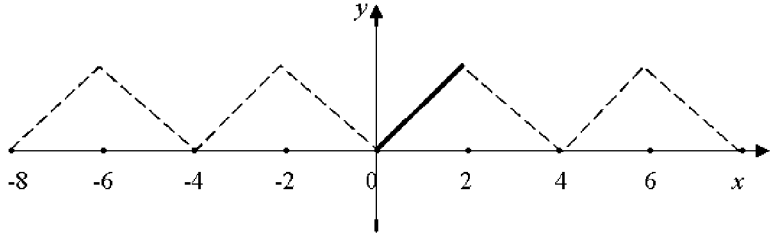


Рис. 10.3

Разложение в ряд Фурье построенной таким образом периодической функции было получено в примере 10.13 и имеет вид (10.14).

Пример 10.21. Разложить функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, \pi]$. Записать сумму первых трех ненулевых членов ряда.

Решение. Так как по условию ряд должен содержать только синусы, продолжим функцию $f(x)$ на промежутке $(0, \pi)$ нечетным образом и далее периодически на всю действительную ось, как указано на рис. (10.4)

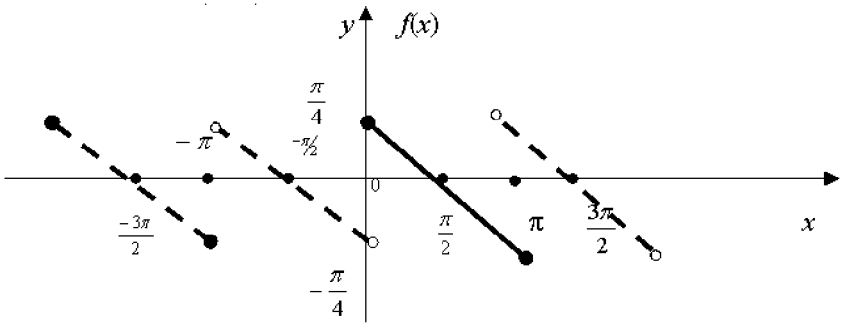


Рис. 10.4

Построенная таким образом функция является нечетной на отрезке [-π, π], поэтому ее разложение имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $b_n = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2} \right) \sin nx dx =$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin x dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Для вычисления интеграла применим формулу интегрирования по частям, полагая

$u = \dfrac{\pi}{2} - x, dv = \sin nx dx.$ Отсюда $du = -dx, \quad v = -\dfrac{1}{n} \cos nx$.

Следовательно,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int\limits_0^{\pi} \cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos 0}{n} - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{\cos n\pi}{2n} + \frac{1}{2n} - 0 = \frac{1 + \cos n\pi}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом, разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \sim \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos\pi n}{n}\cdot\sin n x .$$

Для того, чтобы записать сумму первых трех гармоник ряда Фурье, найдем 3 первых ненулевых коэффициента этого ряда. Для этого в формуле $b_n=\dfrac{1+\cos n\pi}{2n}$ последовательно придаем значения $n=1, 2, 3 \ldots$

$$b_1=\frac{1+\cos\pi}{2}=\frac{1-1}{2}=0,$$

$$b_2=\frac{1+\cos 2\pi}{2\cdot 2}=\frac{1+1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\neq 0,\ b_3=\frac{1+\cos 3\pi}{2\cdot 3}=\frac{1-1}{2\cdot 3}=0,$$

$$b_4=\frac{1+\cos 4\pi}{2\cdot 4}=\frac{2}{2\cdot 4}=\frac{1}{4}\neq 0,\ b_5=\frac{1+\cos 5\pi}{2\cdot 5}=\frac{1-1}{2\cdot 5}=0,$$

$$b_6=\frac{1+\cos 6\pi}{2\cdot 6}=\frac{1+1}{2\cdot 6}=\frac{1}{6}\neq 0.$$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \sim \frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 6x}{6}+\ldots$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Исследовать сходимость ряда.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{1+n^2}}$. **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^3-3}}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$. **4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+1}}$. **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$. **7.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

Выяснить, сходится ли данный ряд абсолютно, условно или расходится.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$. **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

Найти область сходимости данного ряда.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n^2}$. **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 5^n}$.

Разложить данную функцию в ряд Маклорена и указать область сходимости полученного ряда.

12. $f(x)=\frac{1}{x+8}$. **13.** $f(x)=\ln(1-2x)$.

14. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения $y'=2e^x-y^3$, удовлетворяющего начальному условию $y(0)=0$.

15. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $T = 4$ функцию

$$f(x)=\begin{cases}-\pi, & -2<x<0,\\ x, & 0\le x\le 2.\end{cases}$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{8 \cdot n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+3}{7n^2-5} \right)^n$.

2. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \cdot n}$.

3. Разложите в ряд Маклорена степенную функцию $y = e^{3x}$.

Вариант 2

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n^2+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 \cdot n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2+3}{2n^2+5} \right)^n$.

2. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \cdot n}$.

3. Разложите в ряд Маклорена степенную функцию $y = e^{-5x}$.

Домашнее задание

1. Исследовать ряд на сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2-4}{6n^2+7} \right)^n$.

2. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{12^n}$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 10

1⁰. Какое выражение является числовым рядом?

а) 1, 2, 3, ..., 408,... ; **б)** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 408 \cdot \ldots$;

в) $1 - 2 + 3 + \ldots - 408 + \ldots$; **г)** $1 + x + 2 \cdot x^2 + \ldots + n \cdot x^n + \ldots$.

2⁰. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если:

а) сходится последовательность частичных сумм; **б)** $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

в) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$; **г)** остаток ряда при $n \to \infty$ стремится к $a > 0$.

3. Укажите числовой ряд, для которого не выполняется необходимый признак сходимости

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2}$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12^n}$.

4. Если для числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \geq 0)$ $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{5}$, то ряд

а) сходится; **б)** монотонно убывает;

в) расходится; **г)** условно сходится.

5. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n$ равен $R = 3$, то интервалом сходимости этого ряда является интервал

а) $(-3; 3)$; **б)** $(-1; 5)$; **в)** $(-5; 1)$; **г)** $(-2; 2)$.

6*. Какой ряд сходится по признаку Лейбница?

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^n$; **б)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$; **в)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$; **г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^{2n}$.

7*. Если периодическая с периодом $T = 10$ функция $f(x)$ является нечетной, то ее ряд Фурье имеет вид:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{10}$, где $a_n = \frac{1}{10}\int_{-10}^{10} f(x)\cos\frac{\pi n x}{10}dx$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \pi n x$, где $b_n = \frac{2}{5}\int_{0}^{5} f(x)\sin \pi n x dx$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{5}$, где $a_n = \frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\cos\frac{\pi n x}{5}dx$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{5}$, где $b_n = \frac{2}{5}\int_0^5 f(x)\sin\frac{\pi n x}{5}dx$.

ИДЗ 10

Вариант 1

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{n^2+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n\sqrt{n}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(2n+3)}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n\cdot(x-5)^n}{5^n(n+2)}$.

8. Разложить функцию $y = e^{5x}$ в ряд Маклорена.

9[э]. Функцию $f(x) = 2 - x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 2

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{2n^2+3}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)\ln^2(3n-1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(n+2)3^n}$.

8. Разложить функцию $y = \cos(2x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 3

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2n^3 - 3}{n^2 + 1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n + 1}{n^2}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n (2n + 1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n + 3}{3n + 2} \right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1)\ln(2n + 1)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n + 1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7^n \cdot x^n}{2^n \cdot \sqrt[6]{n + 1}}$.

8. Разложить функцию $y = x\sin(5x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x) = 1 - x$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 4

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 4}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n - 1}{n^2 + 3}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n + 1)}{(2n - 1)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^2 + 3}{n^2 + 2} \right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + 2)\ln^3(n + 2)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 7}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n \cdot x^n}{6^n \cdot (n^2 + 1)}$.

8. Разложить функцию $y = x^2 e^{2x}$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x) = x - 2$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 5

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2-n}{1-n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+4}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n(n+3)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+5}{5n+3}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$.

8. Разложить функцию $y=\ln(1+3x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x)=2x-1$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 6

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+2}{8n+3}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)\ln^3(n+5)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$.

8. Разложить функцию $y=x^3\sin(2x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x)=2-x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 7

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3-2}{n^2+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-3}{n^2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+3)}{5^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{8n^3+3}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)\ln(2n+5)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{7^n\cdot(n+1)^2}$.

8. Разложить функцию $y=e^{-x}$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=x-1$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 8

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-3}{2n^3+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^4+2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(3n+2)}{n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-1}{2n^2+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln(3n)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 5^n}$.

8. Разложить функцию $y=x^2\ln(1+x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=3-x$, заданную на отрезке $[0,3]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 9

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+9}{n-1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^3+n-1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(n+5)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+2)^n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+6)\ln^2(n+6)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{9+n^2}$.

8. Разложить функцию $y=x^4\sin(3x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x)=\pi x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 10

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^5+1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^2\cdot 3^n}$.

4. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{3n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(7n+2)\ln^2(7n+2)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+3)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt[5]{4n+1}}$.

8. Разложить функцию $y=x\ln(1+2x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x)=1-x$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 11

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-n^2}{2-n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2\sqrt{n}}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(3n+1)}{(n+2)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n+2}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^3(2n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+8}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{n+1}$.

8. Разложить функцию $y=x^2\cos x$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=2x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 12

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+5}{2n^2+1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n(2n+1)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+2)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+7}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{9^n\cdot\sqrt{n+2}}$.

8. Разложить функцию $y=x\sin(4x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 13

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5-2n^3}{n^2+3}$. 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n-3}{3n^2}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n(n+3)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+9}{3n+1}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+3)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{7^n\cdot(n+1)^3}$.

8. Разложить функцию $y=x^2e^x$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=3-x$, заданную на отрезке $[0,3]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 14

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+3}{n^3+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^2+4}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2+1}{6n^2+5}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln^2(3n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+5}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+3)^2}$.

8. Разложить функцию $y=x^2\sin(3x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=\pi x$, заданную на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 15

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2n}{3n+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5n^3+1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{5^n(n+1)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^3(2n+3)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n^3+3}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n\cdot x^n}{3^n\cdot\sqrt[6]{2n+1}}$

8. Разложить функцию $y=x\ln(1+4x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 16

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5}{3n^2+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n^2-1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+7)}{3n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+2}{9n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^2(n+4)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{n}$.

8. Разложить функцию $y = x\cos(4x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=\pi x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 17

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-n^3}{2-n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n^2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(n+1)}{4^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+2}{n^3+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+5)\ln(2n+5)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4+n^2}$.

8. Разложить функцию $y = xe^{3x}$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=x-1$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 18

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3+1}{n^3+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+3}{2n^4+1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+3)}{2\cdot n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+3}{5n^2+2}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln(3n)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9n+2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n\cdot(n+1)^3}$.

8. Разложить функцию $y = x\ln(1+3x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x) = \pi - x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 19

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n}+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n^3+n+2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n(n+2)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(3n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n\cdot x^n}{5^n\cdot\sqrt[3]{3n+1}}$.

8. Разложить функцию $y = x^2\sin x$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 20

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{3n+2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^4-2}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^3\cdot 4^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{9n-2}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln^3(n+4)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+5)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4}$.

8. Разложить функцию $y = x^2\ln(1+4x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=1-2x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 21

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{2+7n^2}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3n^4}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(2n+1)}{(n+2)!}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n+3)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8n+5}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot(x-3)^n}{3^n(n+1)}$.

8. Разложить функцию $y=xe^{2x}$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=\pi x$, заданную на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 22

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{2+n^2}$. 2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{5}{n(n-1)}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!(3n-1)}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{2n+5}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(n+5)7^n}$.

8. Разложить функцию $y=x^2\cos(4x)$ в ряд Маклорена.

9°. Функцию $f(x)=2x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 23

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+3}{2n^2+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2n^2+n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4^n(2n+3)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)\ln(n+4)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(8n+1)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n\cdot x^n}{4^n\cdot\sqrt[6]{n}}$.

8. Разложить функцию $y=x\cos(3x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x)=x$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 24

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}+1}{3\sqrt{n}-5}$. 2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{2n^2+n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(3n-1)}{(2n)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2-1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)\ln(2n+2)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9n+1}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n\cdot x^n}{(n^2+3)}$.

8. Разложить функцию $y=xe^{4x}$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x)=2x-1$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 25

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{2+5n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^3+3n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(2n+1)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+9}{n+7}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n^3+2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+2)\cdot 5^n}$.

8. Разложить функцию $y = x^2\ln(1+2x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x) = \pi - x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 26

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2-3n^2}{5-2n^2}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^2+1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(3n-2)}{(n+2)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+6}{6n+1}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(5n)^2}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cdot x^n}{(n+3)\cdot 5^n}$.

8. Разложить функцию $y = x^2\cos(3x)$ в ряд Маклорена.

9э. Функцию $f(x) = x - 1$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 27

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+1}{2n^2-3}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2n^2+n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(3n+5)}{2^n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3+5}{9n^3+2}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^3(n+3)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n \cdot x^n}{(n+1)^3}$.

8. Разложить функцию $y = x^2 e^{3x}$ в ряд Маклорена.

9*. Функцию $f(x) = \pi - x$, заданную на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 28

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^4}{n^3+3}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n-1}{n^5+1}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(2n+1)}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+8}{4n^2+3}\right)^n$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8n+9}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+3)\cdot 3^n}$.

8. Разложить функцию $y = x^2 \sin(4x)$ в ряд Маклорена.

9*. Функцию $f(x) = x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 29

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+7}{n+1}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{4^n(2n+3)}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{(2n+3)^n}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+3)}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+5)\cdot x^n}{n^2+1}$.

8. Разложить функцию $y = x^2\cos(2x)$ в ряд Маклорена.

9^{э}. Функцию $f(x) = 1 - 2x$, заданную на отрезке $[0,1]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Вариант 30

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-5n}{n+5}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{5n^3+1}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^3\cdot 5^n}$.

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+9}\right)^n$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln(3n+2)}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(3n+4)}$.

7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7^n\cdot x^n}{2^n\cdot\sqrt[3]{n+3}}$.

8. Разложить функцию $y = x\sin(3x)$ в ряд Маклорена.

9^{э}. Функцию $f(x) = \pi x$, заданную на отрезке $[0,\pi]$, разложить в ряд Фурье по косинусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+2n^2}{3n^2-5}$.

Решение. Воспользуемся достаточным признаком расходимости ряда: если предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не равен нулю или не существует, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится. Найдем предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

$$a_n = \frac{3+2n^2}{3n^2-5}; \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3+2n^2}{3n^2-5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2}+2}{3-\frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+2n^2}{3n^2-5}$ не равен нулю, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+2n^2}{3n^2-5}$ расходится.

Задание 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n^2-n+2}{2n^3+3}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения. Известно, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится. Исследуем предел отношения членов рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n^2-n+2}{2n^3+3}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-n+2}{2n^3+3}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-n+2}{2n^3+3}\cdot n=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^3-n^2+2n}{2n^3+3}=\frac{7}{2}.$$

Отличное от нуля конечное число $\dfrac{7}{2}$ показывает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7n^2-n+2}{2n^3+3}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, то есть расходится.

Задание 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{(7n+3)\cdot 6^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком Д'Аламбера.

$$a_n=\frac{(n+1)!}{(7n+3)\cdot 6^n};\qquad a_{n+1}=\frac{((n+1)+1)!}{(7(n+1)+3)\cdot 6^{n+1}}=\frac{(n+2)!}{(7n+10)\cdot 6^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(7n+10)\cdot 6^{n+1}}:\frac{(n+1)!}{(7n+3)\cdot 6^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(7n+10)\cdot 6^{n+1}}\cdot\frac{(7n+3)\cdot 6^n}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(n+2)}{(7n+10)\cdot 6^n\cdot 6}\cdot\frac{(7n+3)\cdot 6^n}{(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(7n+3)}{(7n+10)\cdot 6}=\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2+17n+6}{(7n+10)\cdot 6}=\infty.$$

Так как предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(7n+3)\cdot 6^n}$. расходится.

Задание 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5n+3}{9n+10}\right)^n$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+3}{9n+10}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+3}{9n+10}\right)=\frac{5}{9}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{5}{9}<1$, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{5n+3}{9n+10}\right)^n$ сходится.

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+7)\ln^2(3n+7)}.$$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(3x+7)\ln^2(3x+7)}=\lim_{B\to\infty}\int_1^{B}\frac{dx}{(3x+7)\ln^2(3x+7)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{B\to\infty}\int_1^{B}\frac{d(\ln(3x+7))}{\ln^2(3x+7)}=-\frac{1}{3}\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(3x+7)}\right)\Bigg|_1^B=$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{B\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(3B+7)}-\frac{1}{\ln(3+7)}\right)=0-\frac{1}{\ln 10}=-\frac{1}{\ln 10}.$$

Так как несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(3x+7)\ln^2(3x+7)}$ сходится, то

сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+7)\ln^2(3n+7)}$.

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(7n+9)}$.

Решение. Этот ряд является знакочередующимся. Проверим его на абсолютную сходимость. Рассмотрим сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(7n+9)}$. Применим предельный признак сравнения в отношении исследуемого ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(7n+9)}$ и сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Вычислим предел отношения общих членов этих рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(7n+9)}:\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{7n^2+9n}=\frac{1}{7}.$$

Отличное от нуля конечное число $\frac{1}{7}$ показывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(7n+9)}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то есть сходится. Таким образом, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(7n+9)}$ является абсолютно сходящимся.

Задание 7. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n\sqrt{x}}$.

Решение. Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\,\frac{2^n\sqrt{n}}{3^n x^n}\right|=\frac{3}{2}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=\frac{3}{2}|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}=\frac{3}{2}|x|.$$

Как видно, ряд будет сходиться для тех значений x, для которых $\frac{3}{2}|x|<1$, или $|x|<\frac{2}{3}$, или $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$.

Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала.

Рассмотрим $x=-\frac{2}{3}$. Ряд принимает вид

$$-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\ldots \qquad (5)$$

Полученный ряд является знакочередующимся; его общий член монотонно убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$. По признаку Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов заключаем, что ряд сходится.

Следовательно, значение $x=-\frac{2}{3}$ принадлежит области данного ряда.

Рассмотрим $x=\frac{2}{3}$. Подставив $x=\frac{2}{3}$ в (4), получим

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots \qquad (6)$$

Это обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p=\frac{1}{2}<1$. Значит ряд (6) расходится и значение $x=\frac{2}{3}$ не принадлежит области сходимости данного ряда.

Таким образом, $-\frac{2}{3}\le x<\frac{2}{3}$ – область сходимости исследуемого ряда.

Задание 8. Разложить функцию $y=x^2e^{4x}$ в ряд Маклорена.

Решение. Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $y=e^x$:

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty<x<+\infty,$$

и заменим в ней x на $4x$.

Получим следующее разложение в ряд Маклорена

$$\mathrm{e}^{4x}=1+4x+\frac{(4x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(4x)^n}{n!}+\ldots=$$

$$=1+4x+\frac{16x^2}{2!}+\ldots+\frac{4^n x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!},$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

Умножим члены полученного ряда на x^2. Получим

$$x^2e^{4x}=x^2\left(1+4x+\frac{(4x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(4x)^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$=x^2+4x^3+\frac{16x^4}{2!}+\ldots+\frac{4^n x^{n+2}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{n+2}}{n!},$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

Задание 9. Функцию $f(x)=2-x$, заданную на отрезке $[0,2]$, разложить в ряд Фурье по синусам. Построить график полученной периодической функции и график суммы $S(x)$ её ряда Фурье.

Решение. Доопределим функцию $f(x)$ нечетным образом на интервале $[-2,0]$ и далее по периоду на всю действительную ось (рис. 10.5)

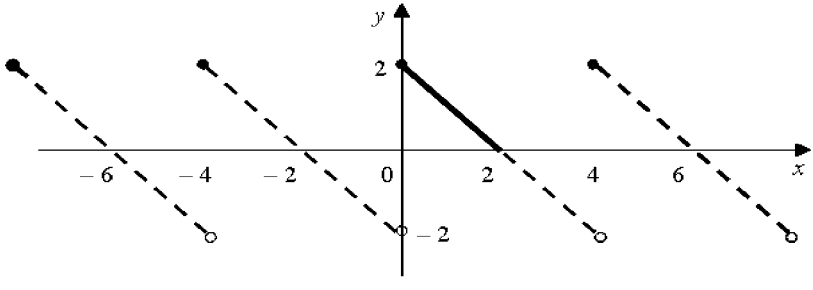


Рис. 10.5

Ряд Фурье полученной таким образом периодической функции на отрезке [0, 2] совпадает с функцией $f(x)$ и имеет вид

$$f(x)\ \sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{2},$$

где $b_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{2}\int\limits_0^2(2-x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2 - x; & du = (2-x)'dx = -dx \\ dv = \sin\dfrac{\pi n x}{2}dx; & v = \int \sin\dfrac{\pi n x}{2}dx = -\dfrac{2}{\pi n}\cos\dfrac{\pi n x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= (2-x)\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2} =$$

$$= 0 + \frac{4}{\pi n}\cos\pi n - \frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{\pi n}(-1)^n - \frac{4}{\pi^2 n^2}(\sin\pi n - \sin 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi n}(-1)^n.$$

Следовательно, ряд Фурье для функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}.$$

Построим график суммы ряда Фурье (рис. 10.6):

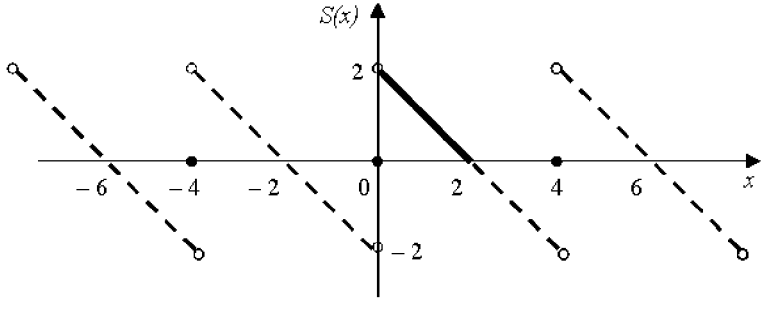


Рис.10.6

МОДУЛЬ 11
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) знать а) *понятия и определения:* цилиндрическое тело, диаметр области, двойной интеграл, порядок интегрирования, тройной интеграл, порядок интегрирования; **б)** *характеризовать* методы вычисления двойных интегралов в декартовой и полярной системах координат, методы вычисления тройных интегралов в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат; **в)** *моделировать и аналитически описывать* простейшие задачи геометрии и физики, приводящие к задачам нахождения двойных интегралов, простейшие задачи геометрии и физики, приводящие к задачам нахождения тройных интегралов.

2) уметь расставлять пределы интегрирования по области, менять порядок интегрирования, вычислять в декартовой и полярной системах координат, находить площади, массу и центр масс плоской фигуры, объем цилиндрического тела, расставлять пределы интегрирования по области, менять порядок интегрирования, вычислять интегралы в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат, находить объем, массу и центр масс тела.

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой замкнутой области D плоскости xOy. Разобьём область D произвольным образом на n частей $s_1, s_2, \ldots, s_n$ с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$. Внутри

каждой элементарной области s_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$ и найдём значение функции $f(x_i, y_i)$ в этой точке. Составим сумму:

$$I_n = f(P_1)\cdot\Delta s_1 + f(P_2)\cdot\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta s_n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta s_i$$

Эта сумма называется *n-й интегральной суммой* для функции $f(x, y)$ по области D.

Диаметром области s_i назовём наибольшее из расстояний между точками границы этой области и обозначим d_i.

Определение. Если существует конечный предел последовательности интегральных сумм I_n при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей s_i, не зависящий ни от способа разбиения области D, ни от выбора точек P_i, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}s$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}s = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta s_i .$$

Теорема существования. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области.

Свойства двойного интеграла

1. $\iint\limits_D cf(x, y)\mathrm{d}s = c\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}s, \quad c = const.$

2. $\iint\limits_D (f_1(x, y) + f_2(x, y))\mathrm{d}s = \iint\limits_D f_1(x, y)\mathrm{d}s + \iint\limits_D f_2(x, y)\mathrm{d}s$.

3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}s .$$

4. Если функции $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ интегрируемы в области D и $f(x,y) \le \varphi(x,y)$ для всех точек $(x,y) \in D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s \le \iint\limits_D \varphi(x,y)\mathrm{d}s .$$

5. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, тогда найдется хотя бы одна точка $C(\overline{x},\overline{y}) \in D$, такая, что выполняется равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s = f(\overline{x},\overline{y}) \cdot S_D ,$$

где S_D – площадь области D (*теорема о среднем для двойного интеграла*).

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

В прямоугольной системе координат элемент площади $\mathrm{d}s$ можно записать в виде произведения $\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}s = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Определение. Область D называется *правильной в направлении оси* Ox (или Oy), если любая прямая, проходящая параллельно этой оси, пересекает границу области D не более, чем в двух точках.

Например, область D на рис. 11.1 является правильной в направлении оси Oy и неправильной в направлении оси Ox (прямая MN пересекает границу области D в четырех точках).

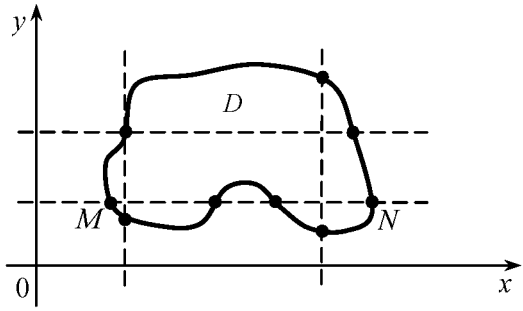


Рис. 11.1

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим образом

1) Пусть область D является правильной в направлении оси Oy и ограничена линиями: $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x), x=a, y=b$, причем $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $a<b$ (рис. 11.2).

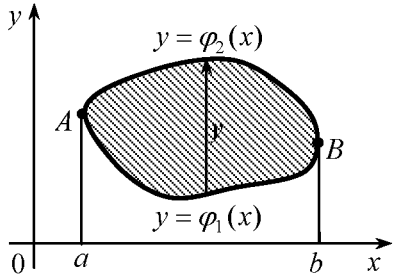


Рис. 11.2

При выборе внешнего интегрирования по переменной x (из рис.11.2 видно $a\le x\le b$) для определения внутренних пределов интегрирования по переменной y по области интегрирования проводим прямую, параллельную оси Oy снизу вверх. Прямая сначала пресекает кривую $y=\varphi_1(x)$, которую назовем *линией входа*. При выходе из области интегрирования прямая пересечет кривую $y=\varphi_2(x)$, которую назовем *линией выхода*. То есть значение переменной y в области D меняется в пределах $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \ . \qquad (11.1)$$

Правая часть формулы называется *повторным интегралом*.

Таким образом, вычисление двойного интеграла свелось к вычислению повторного (двух определенных интегралов) интеграла вида

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right] dx \ .$$

При вычислении «внутреннего интеграла» (записанного в квадратных скобках) x считается постоянным.

2) Пусть область D является правильной в направлении оси Ox и ограничена линиями: $x=\psi_1(y), x=\psi_2(y), y=c, y=d$, причем $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, $c<d$ (рис. 11.3).

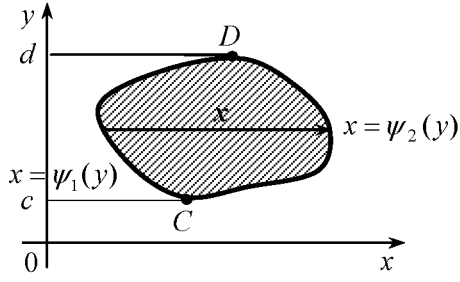


Рис. 11.3

При выборе внешнего интегрирования по переменной y (из рис.11.3 видно, что $c \le y \le d$) для определения внутренних пределов интегрирования по переменной x по области интегрирования проводим прямую, параллельную оси Ox слева направо. Прямая сначала пресекает кривую $x=\psi_1(y)$, которую назовем *линией входа*. При выходе из области интегрирования прямая пересечет кривую $x=\psi_2(y)$, которую назовем *линией*

выхода. То есть значение переменной x в области D меняется в пределах $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x . \qquad (11.2)$$

При вычислении «внутреннего интеграла» y считается постоянным. Из (11.1) и (11.2) следует, что

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x . \qquad (11.3)$$

Переход от левой части равенства (11.3) к правой и наоборот называется *изменением порядка интегрирования*.

Если область интегрирования является неправильной, то ее можно представить как объединение правильных областей. Тогда двойной интеграл равен сумме двойных интегралов по этим областям.

Пример 11.1. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ расставить пределы интегрирования двумя способами, если область D ограничена линиями $y = x^2$, $x + y = 2$, $x \ge 0$.

Решение. Построим область D (рис. 11.4). Найдем точки пересечения линий $y = x^2$, $x + y = 2$, решая систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \quad x + x^2 = 2,\ x^2 + x - 2 = 0,\ D = 1 + 8 = 9,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2 .$$

Таким образом, парабола и прямая пересекаются в точке $A(1,1)$ (рис. 11.4).

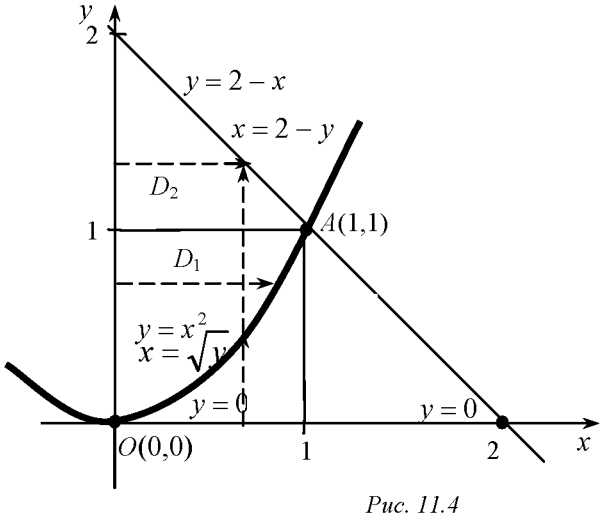


Рис. 11.4

Внешнее интегрирование по переменной x

Область интегрирования D расположена между прямыми $x = 0$, $x = 1$, а переменная y изменяется в данной области при каждом фиксированном значении x от точек параболы $y = x^2$ до точек прямой $y = 2 - x$ (рис. 11.4). Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x, y)dy .$$

Внешнее интегрирование по переменной y

Так как правый участок границы области D задан двумя линиями, то прямая $y = 1$ разбивает область D на области D_1: $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le \sqrt{y}$ и D_2: $1 \le y \le 2$, $0 \le x \le 2 - y$. В результате получаем сумму двух повторных интегралов:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x, y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x, y)dx .$$

Пример 11.2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x\,dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $y = -x$, $y = 2 - x^2$.

Решение. Построим область D (рис. 11.5).

Найдем точки пересечения линий из системы уравнений

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \quad -x = 2 - x^2,\ x^2 - x - 2 = 0,\ D = 1 + 8 = 9,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2,\ x_2 = -1.$$

Таким образом, $A(-1;1)$ – точка пересечения линий в рассматри-ваемой области.

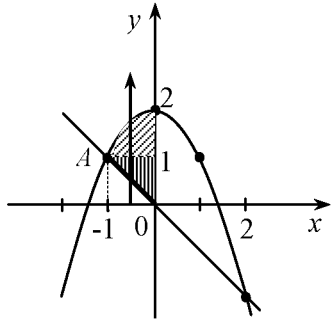


Рис. 11.5

Область интегрирования D расположена между прямыми $x = -1$, $x = 0$, снизу ограничена прямой $y = -x$, сверху – параболой $y = 2 - x^2$ (рис. 11.5). Следовательно,

$$\iint\limits_D x\,dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{2-x^2} x\,dy = \int\limits_{-1}^{0} xy\Big|_{-x}^{2-x^2} dx = \int\limits_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 - (-x)\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} x\left(2 - x^2 + x\right)dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(2x - x^3 + x^2\right)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left((-1)^2 - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right) = -\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\left(1 - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{7}{12}\right) = -\frac{5}{12}.$$

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Если в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ область интегрирования представляет собой круг или часть круга, то при вычислении интеграла удобно перейти от декартовых к *полярным координатам* по формулам:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$
$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Вычисление последнего интеграла, как правило, упрощается.

Пример 11.3. Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{16-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где область D ограничена окружностью $x^2+y^2-4x=0$ и осью Ox $(y \ge 0)$.

Решение. Приведём уравнение окружности к каноническому виду

$$x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow (x^2-2\cdot 2x+4)-4+y^2=0 \quad \Rightarrow$$

$(x-2)^2+y^2=4$. Это окружность с центром в точке $C(2,0)$ и радиусом $R=2$. Построим область D (рис. 11.6).

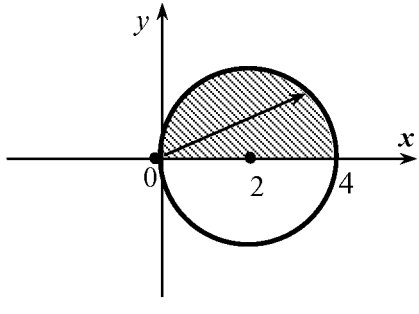


Рис. 11.6

Так область D представляет собой криволинейный сектор, перейдём к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$

Запишим уравнение окружности в полярных координатах:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0 \ \Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 4r\cos\varphi = 0 \ \Rightarrow$$

$$r^2 = 4r\cos\varphi,\ \Rightarrow\ \ r = 4\cos\varphi \ \text{(т.к. } r \neq 0\text{)}.$$

Прямые $y = 0$ и $x = 0$, ограничивающие сектор, представляют собой лучи с уравнениями $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, область D преобразуется в область D^*, задаваемую неравенствами $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 4\cos\varphi$.

Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{16 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi, & 0 \le r \le 4\cos\varphi \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_{D^*} \sqrt{16 - r^2}\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \sqrt{16 - r^2}\, r\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^{4\cos\phi} (16 - r^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(16 - r^2) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \frac{(16 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^{4\cos\phi} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \left[(16 - 16\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}} \right] = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi((16\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - 4^3) =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (64 - 64\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi - \frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi =$$

$$=\frac{64}{3}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}(-\cos\varphi)=\frac{64}{3}\left(\frac{\pi}{2}+\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2}-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right)=$$

$$=\frac{64}{3}(\frac{\pi}{2}+0-1-0+\frac{1}{3})=\frac{64}{3}(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})=\frac{32}{9}(3\pi-4).$$

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

1. *Площадь плоской фигуры*, занимающей область D, вычисляется по формуле

$$S=\iint_D dxdy\,.$$

2. *Объем V тела,* ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу – плоскостью $z=0$ и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz (рис. 11.7), можно найти по формуле

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy\,.$$

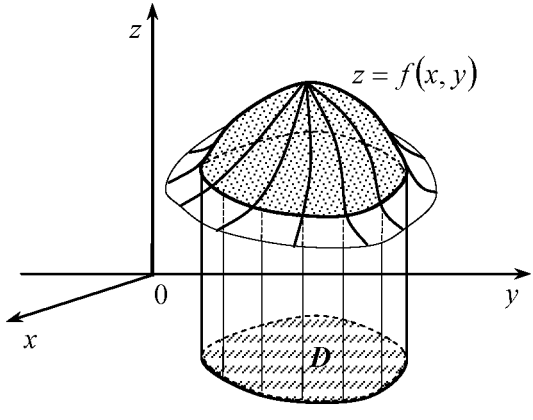


Рис. 11.7

3. *Площадь поверхности* $z = f(x, y)$, которая проектируется на область D плоскости xOy, вычисляется по формуле

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy .$$

4. *Масса пластинки* с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, занимающей область D плоскости xOy, вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy .$$

5. *Статические моменты относительно осей* Ox и Oy плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \rho(x, y)dxdy, \qquad M_y = \iint\limits_D x \cdot \rho(x, y)dxdy .$$

6. *Координаты центра масс плоской* пластинки D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \rho(x, y)dxdy}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y \cdot \rho(x, y)dxdy}{m},$$

где M_x, M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно, m – масса пластинки.

7. *Моменты инерции плоской пластины* плоской пластинки D относительно начала координат и осей координат с поверхностной плотностью $\rho = \rho(x, y)$, вычисляются по формулам:

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x, y)dxdy ,$$

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \cdot \rho(x, y)dxdy , \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 \cdot \rho(x, y)dxdy .$$

Пример 11.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$.

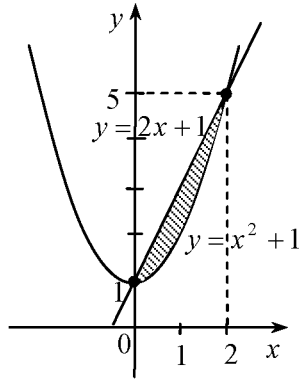


Рис. 11.8

Решение. Найдем точки пересечения линий: $2x+1=x^2+1$, $2x-x^2=0$ из системы уравнений

$$\begin{cases} y=2x+1, \\ y=x^2+1, \end{cases} \qquad x(2-x)=0 \Rightarrow x_1=0,\, x_2=2.$$

Построим область интегрирования D (рис. 11.8). Из рисунка видно, что область D задается неравенствами

$$0 \le x \le 2, \quad x^2+1 \le y \le 2x-1.$$

Тогда

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2+1}^{2x+1} dy=\int\limits_0^2 dx \cdot y\Big|_{x^2+1}^{2x+1}=\int\limits_0^2 \left(2x+1-x^2-1\right)dx=$$

$$=2\int\limits_0^2 xdx-\int\limits_0^2 x^2dx=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Пример 11.5. Найти координаты центра масс плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=2y$, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $x=0$, $y=2$.

Решение. Построим область интегрирования (рис. 11.9).
Массу пластинки найдем по формуле

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy=\iint\limits_D 2y\,dxdy,$$

а координаты центра масс по формулам:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x \cdot \rho(x, y) dxdy}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y \cdot \rho(x, y) dxdy}{m}$$

Область D задается неравенствами: $0 \le x \le 4$, $\sqrt{x} \le y \le 2$.

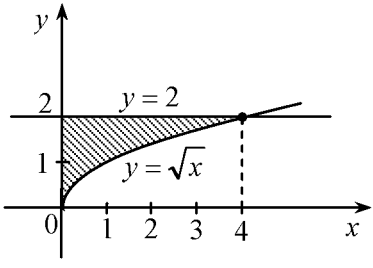


Рис. 11.9

Следовательно,

$$m = \iint\limits_D 2y\, dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 2y\, dy = \int_0^4 dx\, y^2 \Big|_{\sqrt{x}}^2 = \int_0^4 dx \left(4 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right) =$$

$$\int_0^4 (4 - x) dx = \int_0^4 4dx - \int_0^4 xdx = \left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 16 - 8 = 8.$$

$$M_y = \iint\limits_D x \cdot 2y dxdy = \int_0^4 xdx \int_{\sqrt{x}}^2 2y\, dy = \int_0^4 xdx\, y^2 \Big|_{\sqrt{x}}^2 = \int_0^4 xdx \left(4 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right) =$$

$$= \int_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \int_0^4 4xdx - \int_0^4 x^2 dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 32 - 21{,}3 = 10{,}7.$$

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot 2y dxdy = 2\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 y^2\, dy = 2\int_0^4 dx \frac{y^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{x}}^2 = 2\int_0^4 dx \left(\frac{8}{3} - \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}\right) =$$

$$= 2\int_0^4 \left(\frac{8}{3} - \frac{\sqrt{x^3}}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\int_0^4 (8 - \sqrt{x^3}) dx = \frac{16}{3}\int_0^4 dx - \frac{2}{3}\int_0^4 \sqrt{x^3}\, dx =$$

$$= \left(\frac{16}{3}x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3} \cdot 4 - \frac{4}{15}\sqrt{4^5} = 21{,}3 - 8{,}5 = 12{,}8.$$

Тогда $x_c = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{10{,}7}{8} = 1{,}3,\ \ y_c = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{12{,}8}{8} = 1{,}6.$

Таким образом, $C(1{,}3;1{,}6)$ – координаты центр масс.

Пример 11.6. Вычислить массу плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, ограниченной линиями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$, $y=0\ (y \ge 0)$.

Решение. Построим область D (рис. 11.10). Так область D представляет собой полукольцо, перейдем к полярным координатам по формулам $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$

Запишем уравнения окружностей в полярных координатах:

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow r = 1.$$

$$x^2+y^2=9 \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3.$$

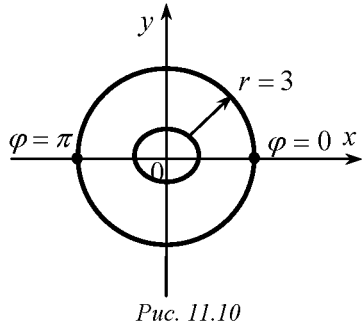


Рис. 11.10

Длина радиус-вектора меняется от 1 до 3, при движении конца радиус-вектора угол поворота изменяется от 0 до π.

Таким образом, область D преобразуется в область D^*, задаваемую неравенствами $0 \le \varphi \le \pi$, $1 \le r \le 3$.

Следовательно,

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le \varphi \le \pi \\ dxdy = rdrd\varphi, & 1 \le r \le 3 \end{array} \right| = \iint\limits_{D^*} \sqrt{r^2}\,rdrd\varphi =$$

$$\int_0^{\pi} d\varphi \int_1^3 r^2 dr = \int_0^{\pi} d\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_1^3 = \int_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3}\int_0^{\pi} d\varphi = \frac{26}{3}\varphi\Bigg|_0^{\pi} = \frac{26}{3}\pi .$$

Пример 11.7. Вычислить объем тела V, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Данное тело V ограничено параболическим цилиндром $z = 4 - x^2$ с образующей, параллельной оси Oy и плоскостями $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 11.11).

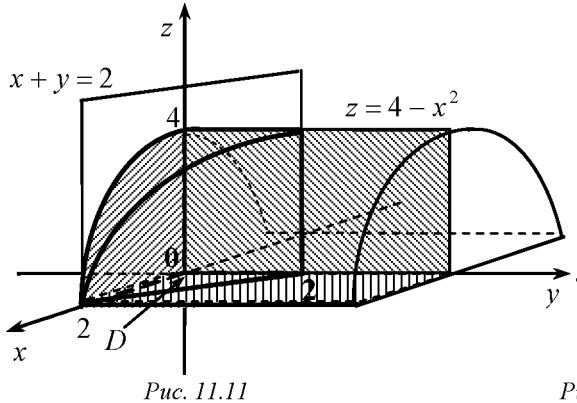


Рис. 11.11

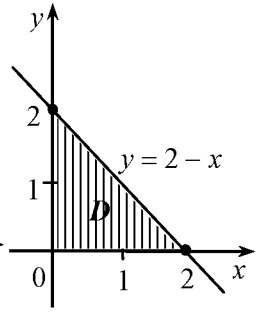


Рис. 11.12

Проекцией тела V на плоскости xOy является треугольник (рис.11.12). Область интегрирования D задается неравенствами: $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 2 - x$.

Тогда

$$V = \iint_D z dxdy = \iint_D \left(4 - x^2\right) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \cdot \left(4 - x^2\right) = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \cdot y\Bigg|_0^{2-x} =$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2\right)(2 - x) dx = \int_0^2 \left(8 - 2x^2 - 4x + x^3\right) dx = \left(8x - 2\cdot\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 16 - 2\cdot\frac{8}{3} - 4\cdot 2 + 4 = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}.$$

§ 5. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Аналогично двойному интегралу вводится понятие *тройного интеграла*. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в некоторой замкнутой области V пространства. Разобьем область V произвольным образом на n элементарных областей $V_1,\ldots,V_n$ с объёмами $\Delta V_1,\ldots,\Delta V_n$. Внутри каждой элементарной области V_i выберем произвольную точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i \ .$$

Диаметром области V_i назовём наибольшее из расстояний между точками границы этой области и обозначим d_i.

Определение. Предел последовательности интегральных сумм I_n, когда наибольший из диаметров элементарных областей $d_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области V, ни от выбора точек P_i, называется *тройным интегралом* от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot \Delta V_i \ .$$

Свойства тройного интеграла

1. $\iiint\limits_V cf(x,y,z)\mathrm{d}V = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V, \quad c = const.$

2. $\iiint\limits_V (f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z))\mathrm{d}V = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\mathrm{d}V + \iiint\limits_V f_2(x,y,z)\mathrm{d}V \ .$

3. Если область интегрирования V разбить на две области V_1 и V_2 без общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}V + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\mathrm{d}V \ .$$

4. Если функции $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ интегрируемы в области V и $f(x,y,z) \le \varphi(x,y,z)$ для всех точек $(x,y,z) \in V$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V \le \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)\mathrm{d}V \ .$$

5. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области V, тогда найдется хотя бы одна точка $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \in V$, такая, что выполняется равенство

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \cdot \nu \ ,$$

где ν – объем области V (*теорема о среднем для тройного интеграла*).

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторных интегралов следующим образом

Пусть область V ограничена поверхностями $z = \psi_1(x,y)$ – снизу, $z = \psi_2(x,y)$ – сверху и проектируется на область D плоскости xOy (рис. 11.13).

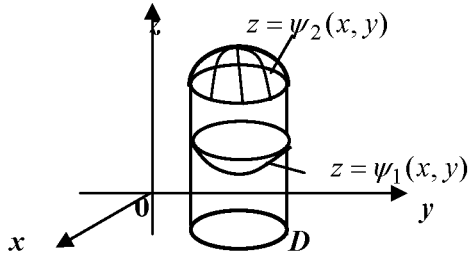


Рис. 11.13

Если область D ограничена кривыми $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$, $(\varphi_1(x)\le\varphi_2(x))$, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (рис. 11.14), то

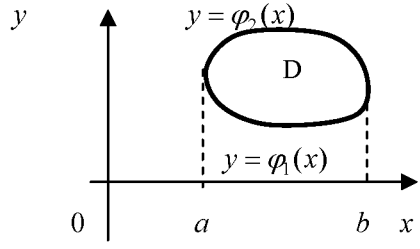


Рис. 11.14

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_a^b \mathrm{d}x\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\mathrm{d}y\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\,.$$

Покажем, как найти объём тела из примера 11.7 с помощью тройного интеграла.

Проекцией тела V на плоскости xOy является треугольник (рис.11.12). Область интегрирования задаётся неравенствами:

$$0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 2-x,\quad 0\le z\le 4-x^2\,.$$

Вычислим объём тела с помощью тройного интеграла

$$V=\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int\limits_0^2\mathrm{d}x\int\limits_0^{2-x}\mathrm{d}y\int\limits_0^{4-x^2}\mathrm{d}z=\int\limits_0^2\mathrm{d}x\int\limits_0^{2-x}\mathrm{d}y\cdot z\Big|_0^{4-x^2}=$$

$$=\int\limits_0^2\mathrm{d}x\int\limits_0^{2-x}\mathrm{d}y\cdot(4-x^2)=\int\limits_0^2(4-x^2)\mathrm{d}x\cdot y\Big|_0^{2-x}=\int\limits_0^2(4-x^2)(2-x)\mathrm{d}x=$$

$$=\int\limits_0^2(8-2x^2-4x+x^3)dx=\left(8x-2\cdot\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=16-2\cdot\frac{8}{3}-4\cdot 2+4=12-\frac{16}{3}=\frac{20}{3}.$$

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

1. Цилиндрические координаты

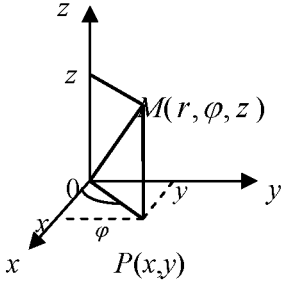


Рис. 11.15

В системе цилиндрических координат положение т. M в пространстве определяется тремя числами r, φ, z, где z – аппликата точки M, а r, φ – полярные координаты проекции точки M на плоскость $x0y$.

Из рис.11.15 видно $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

Можно показать, что

$$dxdydz = r\,dr\,d\varphi\,dz\ .$$

Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,dr\,d\varphi dz\ .$$

Пример 11.8. Вычислить $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$ по области V, ограниченной параболоидом $x^2 + y^2 = 2 - z$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

Решение. Построим тело V и его проекцию на плоскость xOy (рис. 11.16 и рис. 11.17).

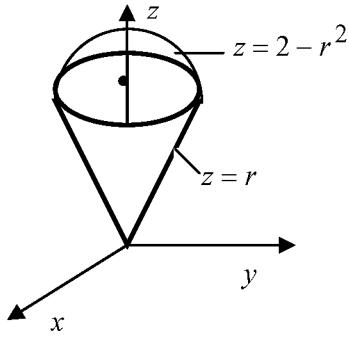


Рис. 11.16

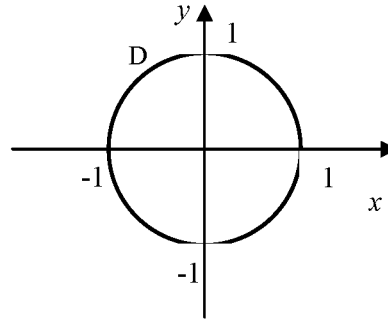


Рис. 11.17

Так как проекция на плоскость xOy есть окружность, перейдем к цилиндрическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \qquad dxdydz = r\,dr\,d\varphi dz\ ,$$

Запишем уравнения поверхностей в цилиндрических координатах:

$$z = 2 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad z = 2 - r^2,$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad z = r.$$

Найдем радиус окружности, полученной при пресечении поверхностей из системы уравнений

$$\begin{cases} z = 2 - r^2, \\ z = r, \end{cases} \Rightarrow \quad 2 - r^2 = r \quad \Rightarrow \quad r^2 + r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1 = -2, \quad r_2 = 1.$$

Так как по определению $r \geq 0$, то радиус окружности $r = 1$.

Расставим пределы интегрирования по области V в цилиндрических координатах:

$$V^*: \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \leq r \leq 1; \\ r \leq z \leq 2 - r^2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \iiint\limits_{V^*} r^2\cos^2\varphi\cdot rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 r^3 dr\int\limits_r^{2-r^2} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi\int\limits_0^1 r^3(2-r^2-r)dr = 2\pi\cdot\left(2\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}-\frac{r^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right) = 2\pi\frac{15-5-6}{30} = \frac{4\pi}{15}.$$

2. Сферические координаты

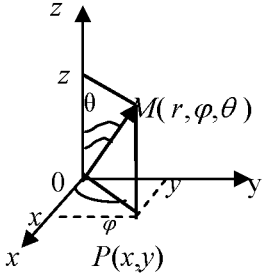


Рис. 11.18

В системе сферических координат положение т. M в пространстве определяется тремя числами r,φ,θ.

Из рис.11.18 видно $\begin{cases} x = OP\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = OP\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$

Можно показать, что $dxdydz = r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi d\theta$.

Поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi d\theta.$$

Пример 11.9. Вычислить $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, если область V ограничена сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостями $x=0, y=0, z=0$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$.

Решение. Построим тело V и его проекцию на плоскость xOy (рис. 11.19 и рис. 11.20).

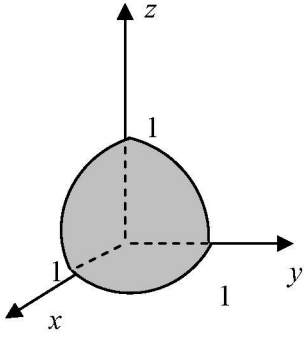


Рис. 11.19

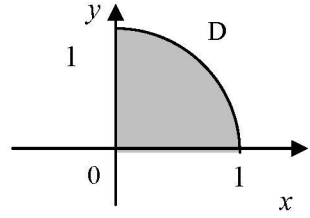


Рис. 11.20

Расставим пределы интегрирования по области V в сферических координатах:

$$V^*: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_V xyzdxdydz = \iiint\limits_{V^*} r\sin\theta\cos\varphi \cdot r\sin\theta\sin\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^1 r^5 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta d\theta = \left.\frac{r^6}{6}\right|_0^1 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{12}\left.\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\sin^4\theta}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{24}(-1-1)\frac{1}{4} = \frac{1}{48}.$$

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

1. *Объём тела*, занимающего область V пространства, находится по формуле

$$V = \iiint\limits_V dxdydz .$$

2. *Масса* m *тела* с объёмной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ находится по формуле

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)dxdydz .$$

3. *Статические моменты тела* V *относительно координатных плоскостей* с объёмной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ вычисляются по формулам

$$M_x = \iint\limits_D x \cdot \rho(x, y, z)dxdydz , \qquad M_y = \iint\limits_D y \cdot \rho(x, y, z)dxdydz ,$$

$$M_z = \iint\limits_D z \cdot \rho(x, y, z)dxdydz .$$

4. *Координаты центра масс* тела с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{M_x}{m}, \quad y_c = \frac{M_y}{m}, \quad z_c = \frac{M_z}{m},$$

где M_x, M_y, M_z – статические моменты тела относительно координатных плоскостей, m – масса тела.

5. *Моменты инерции тела* с объемной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ вычисляются по формулам:

относительно начала координат:

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz, \; I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

относительно координатных плоскостей:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 \cdot \rho(x, y, z) dxdydz, \; I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 \cdot \rho(x, y, z) dxdydz,$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 \cdot \rho(x, y, z) dxdydz.$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычислить следующие повторные интегралы

а) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_1^2 xydy$; **б)** $\int\limits_1^e dx \int\limits_4^6 \frac{y}{x} dy$;

в) $\int\limits_3^5 dx \int\limits_0^{2x} (x+y)dy$; **г)** $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^1 e^{x-y} dx$.

2. Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если известно, что область интегрирования D:

а) ограничена параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$;

б) является треугольником с вершинами $A(-2;1), B(2;4)$, $C(3;1)$;

в) ограничена линиями $y = 2 - x^2$, $y = x^2$.

3. Изменить порядок интегрирования в данных повторных интегралах:

а) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$; **б)** $\int\limits_{-2}^1 dx \int\limits_{x-2}^{x^2} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy$; **г)** $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{6-y} f(x,y)dx$.

4. Вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D xdxdy$, где область D ограничена линиями: $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$;

б) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$, где область D ограничена линиями: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1, x = 2$.

5. Перейти к полярным координатам в следующих интегралах:

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{\sqrt{3}x} f(x,y)dy$; **б)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y)dy$.

6. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D r^2 dr d\varphi$, если область D задается неравенствами: $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$, $2 \le r \le 4$.

7. Используя систему полярных координат, вычислить двойные интегралы:

а) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=9$.

б) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, если область D ограничена окружностями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$;

в) $\iint\limits_D xdxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=4y$.

8. Вычислить площадь фигуры, ограниченную линиями:

а) $y=x^2$, $x+y=6$, $y=0$; **б)** $y^2=4-x$, $y^2=2x+1$;

в) $y^2=4x$, $2x-y+2=0$, $y=-2$, $y=2$.

9. Найти площадь фигуры с помощью двойного интеграла в полярной системе координат

$$x^2+y^2=4, \quad x^2+y^2=9, \quad y=x, \quad y=\sqrt{3}x, \ x \ge 0.$$

10. Найти массу пластинки, ограниченную линиями

$$x^2+y^2=16, \ y=\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y=\sqrt{3}x, \ x \ge 0,$$

с поверхностной плотностью $\rho=\sqrt{1+x^2+y^2}$.

11. Найти координаты центра масс плоской однородной пластины, ограниченной линиями $x^2=2y$, $x+y=4$.

12. С помощью двойного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $x+z=2,\ x=0,\quad z=1,\ y=0,\ y=3;$

б) $z=4-x^2-y^2,\quad z=0.$

13. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=2-x^2, y=0,\quad y=2,\quad z=1,\quad x=0\,(x\geq 0);$

б) $y=x^2+z^2,\quad y=2.$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле $\int\limits_{-4}^{2}dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy^2dxdy$, если область D ограничена линиями: $y=x^2,\quad y=1$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+1,\quad y=x-1$.

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x=y^2+z^2,\quad x=4$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}f(x,y)dy$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^3ydxdy$, если область D ограничена линиями: $y=x^2,\quad y=4$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2, \quad y=x-2.$

4. С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2, \quad z=4.$

Домашнее задание

1. Вычислить следующие повторные интегралы:

а) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 (x+y)dy$; **б)** $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{x+1}^2 (2x-y)dx$.

2. Изменить порядок интегрирования в данных повторных интегралах:

а) $\int\limits_{-3}^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy$; **б)** $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3x} f(x,y)dy$.

3. Используя систему полярных координат, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=16.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}, \quad y=2\sqrt{x}, \quad x=4.$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=3, \quad x+y=4.$

6. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0, \; z=x+y+5.$

7. Найти координаты центра масс плоской однородной пластины, ограниченной линиями $x-3y=0, \quad x+y=8, \quad x=3.$

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 11

1⁰. Какая из формул справедлива для двойного интеграла?

а) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$; **б)** $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_D f(x)dx \int\limits_D f(y)dy$;

в) $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx \int\limits_a^b dy$; **г)** $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$.

2⁰. Масса плоской пластинки D с поверхностной плотностью $\rho(x,y)$ находится по формуле:

а) $m = \iint\limits_D xy\,dxdy$; **б)** $m = \iint\limits_D dxdy$; **в)** $m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$; **г)** $m = \frac{1}{S}\iint\limits_D dxdy.$

3. Вычислить $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} xy\,dy.$

4. Если $c = const$, то для двойного интеграла справедлива формула:

а) $\iint\limits_D cf(x,y)ds = \frac{1}{c}\iint\limits_D f(x,y)ds$; **б)** $\iint\limits_D cf(x,y)ds = c\iint\limits_D f(x,y)ds$;

в) $\iint\limits_D cf(x,y)ds = c^2\iint\limits_D f(x,y)ds$; **г)** $\iint\limits_D cf(x,y)ds = \iint\limits_D cds \cdot \iint\limits_D f(x,y)ds$.

5. Площадь пластинки, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ ($x \geq 0$), можно найти по формуле

а) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^4 dy$; **б)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{x^2} dy$; **в)** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^4 dy$; **г)** $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{x^2} dx$.

6. Найти площадь пластинки из задания №5.

7*. Если в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x} f(x,y)dy$ изменить порядок интегрирования, то он равен:

а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{2x}^0 f(x,y)dx$; **б)** $\int\limits_1^0 dy \int\limits_{2x}^0 f(x,y)dx$; **в)** $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^1 f(x,y)dx$; **г)** $\int\limits_1^0 dx \int\limits_{2x}^0 f(x,y)dy$.

8*. Если в двойном интеграле $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, где D - внутренность круга $x^2+y^2 \le 4$, перейти к полярным координатам, то он равен:

а) 2π; **б)** 4π; **в)** 8π; **г)** π.

ИДЗ 11

Вариант 1

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{-x}^{x} xdy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$y = x+2,\ \ y^2 = 4-x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ y=0\ \ (y \ge 0)$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 9-x^2-y^2$ и плоскостями $z=0,\ y=0\ \ (y \ge 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = 2-x^2, z = x, x = 0, y = 0, y = 2$, с объемной плотностью $\rho(x,y,z) = y$.

Вариант 2

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{3x} xdy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 4x = 0,\ y = x,\ y = 0 .$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями

$$y = x,\ y^2 = 2 - x, y = 0\ (y \geq 0),$$

с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = 2y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $z = 0,\ y + z = 2$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2, z = 4$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 3

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{4x} 3xdy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$y = x^2,\ y = 2 - x^2 .$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0\ (x \leq 0),$$

с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x^2$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0,\ y = 0\ (y \geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2, z = 2 - x, x = 0, y = 0, y = 4$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

Вариант 4

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x^2}^{x} 2xydy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями:

$$D: y^2 + x^2 - 4y = 0,\ y^2 + x^2 - 2y = 0,\ y = x,\ y = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x^2$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $x = y^2$ и плоскостями $z = 0,\ x + z = 9$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $x = y^2 + z^2, x = 1$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Вариант 5

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2}^{2x} xydy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$y = 1 - x^2,\ y = x - 1.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 16,\ x^2 + y^2 = 9,\ y = x,\ y = \sqrt{3}x, (x \geq 0)$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного конусом $x^2 + y^2 = z^2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и

плоскостью $z = 0\ (z \geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 9,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = z$.

Вариант 6

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{x}} 2xydy.$

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y^2 + x^2 - 6x = 0,\ \ y = \sqrt{3}x,\ y = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x},\ \ y = 0,\ \ x = 1$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y^3$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $x + y = 1,\ x = 0,\ z = 0$ и параболическим цилиндром $z = y^2$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y = x^2 + z^2,\ y = 9$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Вариант 7

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{x} 3xydy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$y = \sqrt{x},\ \ y = 1,\ \ x = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 9,\ \ y = x,\ \ x = 0\ \ (x \geq 0)$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостью $z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $x = y^2, z = 0,\ x + z = 9$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = x$.

Вариант 8

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x/2}^{x/2} 5x^2 y dy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 2x = 0,\ y = x,\ y = -x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = \sqrt{x},\ y = \dfrac{x}{2}$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $x + y = 2, x = 0, y = 0,\ z = 0$ и параболическим цилиндром $z = 8 - x^2$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $z = 2 - x^2 - y^2$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = z$.

Вариант 9

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} \dfrac{y}{x} dy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$y = 2 - x^2,\ y = x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1,\ y=0,\ x=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0)$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z=4-x^2-y^2$ и плоскостями $z=0,\ x=0\ \ (x\ge 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y=x^2$, $z=0,\ y+z=2$, с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=y$.

Вариант 10

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^y xydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y^2+x^2-4y=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=0\left(y\ge 0\right).$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y=x^2, y=x+2, x=0\,(x\ge 0)$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $x+y=3,\ x=0, y=0,\ \ z=0$ и параболическим цилиндром $z=x^2+1$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями:

$$z=x^2+y^2, z=3-x^2-y^2, x^2+y^2=1,$$

с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=z$.

Вариант 11

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{-y}^{y} y^2 dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 2.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 4x = 0,\ y = x,\ y = 0,$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = \pi$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0,\ y = 0\ (y \geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $x + y = 1,\ x = 0,\ z = 0,\ z = y^2$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = x$.

Вариант 12

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y}^{4-y} 3y dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 6y = 0,\ y = x,\ x = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = x + 2, x = 2, x = 0, y = 0$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $x = 3,\ y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ и параболическим цилиндром $z = y^2 + 2$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = 1 + x^2 + y^2$, $z = 2$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Вариант 13

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y 2xydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = x^3,\ y = 4x\ (x \geq 0).$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2 + x^2 - 4y = 0,\ y^2 + x^2 - 2y = 0,\ y = x,\ y = 0$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 4 - x^2 - y^2$ и плоскостями $z = 0,\ x = 0\ (x \geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями:

$$x + y = 2, x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0, z = 8 - x^2,$$

с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

Вариант 14

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{2y} xydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y^2 + x^2 - 4x = 0,\ y^2 + x^2 - 2x = 0,\ y = -x,\ y = x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = 2x, y = -x, x = 2$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x^2$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $y = x^2$ и плоскостями $y = 4,\ z = y,\ z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = 1 - x^2 - y^2,\ z = 2 + x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = 1$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = \pi$.

Вариант 15

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^2 2xydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = \sqrt{x},\ y = 2 - x,\ y = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2 + x^2 - 6x = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ y = 0$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2 + 2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $y = 0, z = 0\ (y \geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y = x^2, y = 4,\ z = y,\ z = 0$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

Вариант 16

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} 3xydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 2y = 0,\ y = x,\ y = -x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y=2\sqrt{x}$, $y=2$, $x=0$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $x+y=3$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ и параболическим цилиндром $z=y^2+1$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z=x^2+y^2$, $z=9$, $x=0\ (x\geq 0)$, с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=x$.

Вариант 17

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y/2} 5xy^2 dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y=x^2,\ y=2-x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2+x^2-4y=0$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $y=0$, $(y\geq 0)$ с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z=12-x^2-y^2$, круговым цилиндром $x^2+y^2=9$ и плоскостью $z=0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z=2-x^2$, $z=x$, $x=0$, $y=0$, $y=3$, с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=y$.

Вариант 18

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2y} \dfrac{x}{y} dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 6x = 0,\ y = x,\ x = 0\,.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = 2 - x^2, y = x, x = 0\,(x \geq 0)$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $4x + 3y = 12$, $x = 0$, $z = 0$ и параболическим цилиндром $z = y^2$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $x = y^2 + z^2$, $x = 4$, $y = 0\ (y \geq 0)$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

Вариант 19

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} x dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = \frac{x^2}{2},\ y = 4 - x,\ x = 0\ (x \geq 0)\,.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2 + x^2 - 4x = 0,\ y^2 + x^2 - 2x = 0,\ y = -x,\ y = x;$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = x^2 + y^2$, круговым цилиндром $x^2 + y^2 = 16$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$ $(y \geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2, z = 2 - x, x = 0, y = 0, y = 2,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = x$.

Вариант 20

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{y+2} 3ydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 2y = 0,\ y = -x,\ y = x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 4,$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = y$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного плоскостями $x + y = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\ z = 0$ и эллиптическим параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y = x^2 + z^2,\ y = 1,\ x = 0\ (x \geq 0)$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = x$.

Вариант 21

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{3y} ydx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = 3 - x^2,\ y = x + 1.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2 + x^2 - 2y = 0,\ y^2 + x^2 - 6y = 0,\ y = 0,\ y = x,$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $z = 4 - y^2$ и плоскостями $x = 0,\quad x = 2,\ z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y = x,\ y = 2 - x^2,\ x = 0,\ z = 0,\ z = 2,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = x$.

Вариант 22

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^y y^2 dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 8x = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = x^2 + 1, x = 0, x = 2, y = 0,$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 9$ и плоскостями $z = 0,\ x + z = 3$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z^2 = x^2 + y^2,\ z = 1,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = z$.

Вариант 23

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{y/2} y^2 dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y^2 = x,\ y = 2 - x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2 + x^2 - 4x = 0,\ y^2 + x^2 - 4y = 0,\ y = 0$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $z = y^2$ и плоскостями

$x=0,\ \ x+y=4,\ z=0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y=x^2,\ y=2-x,\ x=0,\ z=0,\ z=1,$ с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=y$.

Вариант 24

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 10ydy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2+y^2-2x=0,\ x^2+y^2-4x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{3}x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y=x^2, y=-x, x=2,$ с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=y$ и $z=0$ $(z\geq 0)$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=2,$ с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=z$.

Вариант 25

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2/2}^{2} 20x^2ydy$.

2. Найти площадь области D ограниченной линиями

$$D: y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0, (x\geq 0).$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2+y^2=4, x^2+y^2-2y=0, x=0, y=0$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $y = 4 - x^2$ и плоскостями $z = y,\ z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y = x,\ y = 2 - x,\ x = 0,\ z = 0,\ z = 4,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = z$.

Вариант 26

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} 2xdy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 - 2y = 0,\ x^2 + y^2 - 6y = 0,\ y = 0,\ y = x.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = 2x^2, y = 2, x = 0\,(x \geq 0),$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $y + z = 2$ и $z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2,\ z = 1,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = z$.

Вариант 27

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} 6xydy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = \frac{1}{x},\ y = x,\ y = 2.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y^2+x^2-4y=0,\ y=\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y=0\ (y\ge 0)$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $y=4-x^2$ и плоскостями $y=0,\ z=0, y+z=4$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y=x,\ y=2-x,\ y=0,\ z=0,\ z=2,$ с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=x^2$.

Вариант 28

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\displaystyle\int_0^4 dx\int_x^{2x}\frac{y}{x}dy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2+y^2-4x=0,\ x^2+y^2-4y=0,\ y=0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y=x^2-1,\ y=1-x, x=0\ (x\ge 0),$ с поверхностной плотностью $\rho(x,y)=2x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $x+y+z=2$, $z=0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $x=y^2+z^2,\ x=4,$ с объемной плотностью $\rho(x,y,z)=x$.

Вариант 29

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y 5y^3 dx$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: y = x^2 + 1,\ y = 3 - x,\ x = 0\ (x \geq 0).$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $x^2 + y^2 - 2x = 0,\ y = x,\ y = -x,$ с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного параболическим цилиндром $z = 4 - x^2$ и плоскостями $x = y, y = 1,\ z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $z = x^2,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 4,$ с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

Вариант 30

1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} 6xy dy$.

2. Найти площадь области D, ограниченной линиями

$$D: x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 - 2y = 0,\ x = 0,\ y = 0.$$

3. Найти массу пластинки D, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x},\ y = x,\ x = 2,\ y = 0,$ с поверхностной плотностью $\rho(x,y) = x$.

4. С помощью двойного интеграла найти объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$, цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостью $z = 0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями: $y = x^2 + z^2$, $y = 4$, с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Изменить порядок интегрирования в данном повторном интеграле и вычислить двойной интеграл: $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} 3xydy$.

Решение. Из условия, следует D: $\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le \dfrac{x^2}{2}, \end{cases}$ т.е. область интегрирования D расположена между прямыми $x = 0$ и $x = 2$, ограничена снизу прямой $y = 0$, сверху параболой $y = \dfrac{x^2}{2}$ (рис.1).

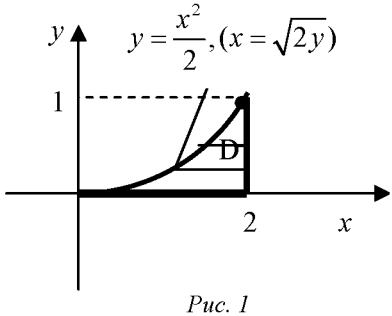


Рис. 1

С другой стороны, область интегрирования D расположена между прямыми $y = 0$ и $y = 1$, а при каждом фиксированном значении y переменная x изменяется от точек параболы $x = \sqrt{2y}$ до точек прямой $x = 2$, т.е.

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{2y} \le x \le 2. \end{cases}$$

Таким образом, $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} 3xydy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{2y}}^1 3xydx.$

Вычислим двойной интеграл:

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\frac{x^2}{2}} 3xydy = \int\limits_0^2 3x\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{x^2}{2}} = \int\limits_0^2 3x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx = \int\limits_0^2 3x\cdot\frac{x^4}{8}dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int\limits_0^2 x^5 dx = \frac{3}{8}\frac{x^6}{6}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{8}\cdot\frac{64}{2} = 4.$$

Задание 2. Найти площадь области D, ограниченной кривыми $x^2 + y^2 - 2y = 0,\ x = 0,\ y = x.$

Решение. Кривая $x^2 + y^2 - 2y = 0$ представляет собой окружность со сдвинутым центром. Для того, чтобы ее построить, приведем уравнение кривой к каноническому виду, выделив полный квадрат с переменной y:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + (y^2 - 2y + 1) - 1 = 0, \quad x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Получили уравнения окружности с центром $C(0,1)$ и радиусом $R = 1$. Область D представляет собой криволинейный сектор, который изображен на рис. 2.

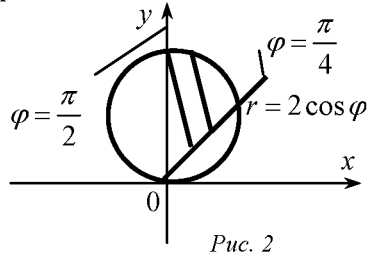


Рис. 2

Запишем уравнение окружности в полярных координатах:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 - 2r\sin\varphi = 0,$$

$$r^2 - 2r\sin\phi = 0, \quad r = 2\sin\varphi.$$

Область D преобразуется в область D^*, задаваемую неравенствами: $\frac{\pi}{4} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\sin\varphi$

Следовательно,

$$S = \iint\limits_D dxdy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ y = r\sin\varphi, & \\ dxdy = rdrd\varphi, & 0 \le r \le 2\sin\varphi \end{array} \right| = \iint\limits_{D^*} rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} rdr = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2\sin\varphi} d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\varphi d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\varphi) d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi = \varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot (\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cdot (0-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\pi+2}{8}.$$

Задание 3. Найти массу плоской пластинки, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2} + 1$ и прямыми $y = 5 - x$, $x = 0$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y) = x^2$.

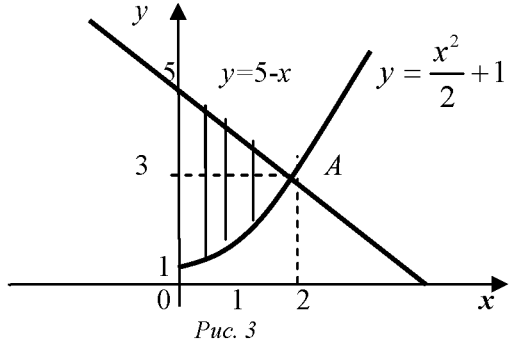


Рис. 3

Решение. Массу пластинки найдем по формуле $m=\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, где $\rho(x,y)$ - поверхностная плотность, D – плоская область, занимаемая пластинкой.

Найдем точки пересечения прямой и параболы из системы уравнений $\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}+1 \\ y=5-x \end{cases}$, откуда находим: $\dfrac{x^2}{2}+1=5-x$, $x^2+2x-8=0 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=2$.

Таким образом, парабола и прямая $y=5-x$ пересекаются в точках, одна из которых $A(2;\ 3)$ (рис. 3) . Поэтому

$$m=\iint\limits_D x^2dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}+1}^{5-x} x^2dy=\int\limits_0^2 x^2y\Bigg|_{\frac{x^2}{2}+1}^{5-x}dx=\int\limits_0^2 x^2\left(4-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(4x^2-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^2=\frac{52}{15}.$$

Задание 4. Вычислить объём тела V, ограниченного эллиптическим параболоидом $z=3-x^2-y^2$, цилиндром $x^2+y^2=4$, плоскостью $z=0$. Данное тело и область интегрирования изобразить на чертеже.

Решение. Данное тело V ограничено сверху параболоидом $z=3-x^2-y^2$, сбоку цилиндром $x^2+y^2=4$ с образующей параллельной оси Oz и снизу плоскостью $z=0$ (рис. 4). Проекция этого тела на плоскость xOy представляет собой круг D с центром в начале координат и радиусом 2 (рис. 5)

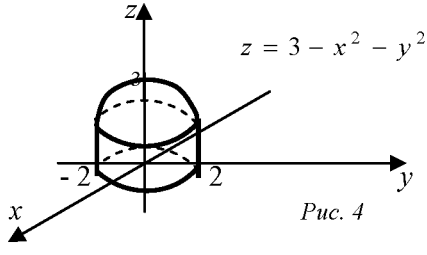


Рис. 4

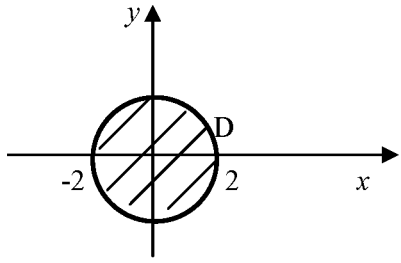


Рис. 5

Объём тела вычислим с помощью двойного интеграла:

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(3 - x^2 - y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Так как областью интегрирования D является круг, перейдём к полярным координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

В полярной системе координат уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$ записывается в виде $r = 2$. Таким образом, область интегрирования D переходит в область D^*, которая задается неравенствами $0 \le r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$. Тогда

$$V = \iint\limits_D (3 - r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^2 (3r - r^3)\mathrm{d}r = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi}(3 \cdot 2 - 4) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

Задание 5. С помощью тройного интеграла найти массу тела V, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $y + z = 1$, $z = 0$, если плотность $\rho(x, y, z) = 2z$.

Решение. Данное тело ограничено параболическим цилиндром $y = x^2$ с образующей, параллельной оси Oz, и плоскостями $z = 1 - y$ сверху и $z = 0$ снизу (рис. 6). Построим это тело и его проекцию D на плоскости xOy (рис. 7).

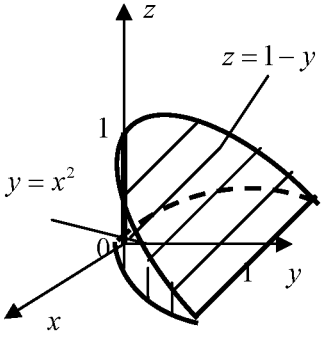


Рис. 6

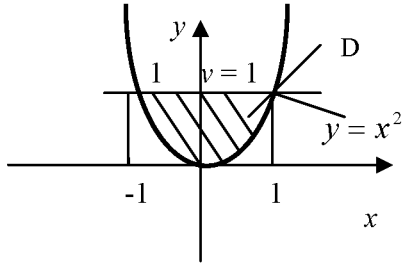


Рис. 7

Расставим пределы интегрирования по области V :

$$-1 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le y-1.$$

Найдем массу тела по формуле:

$$m = \iiint\limits_V \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V 2zdxdydz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{0}^{1-y} 2zdz =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \left(z^2\right)\Big|_0^{1-y} = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (1-y)^2 dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (1-2y+y^2)dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \left(y - 2\cdot\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{x^2}^{1} = \int\limits_{-1}^{1} dx \left[\left(1-1+\frac{1}{3}\right) - \left(x^2 - x^4 + \frac{x^6}{3}\right) \right] =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3} - x^2 + x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{1}{3}x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{3\cdot 7} \right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{21} \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{21} \right) = \frac{2}{5} - \frac{2}{21} = \frac{32}{105}.$$

МОДУЛЬ 12
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В результате изучения модуля студенты должны:

1) знать а) *понятия и определения*: гладкая, ориентированная дуга кривой, криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода), криволинейный интеграл по координатам (второго рода), формула Грина, полный дифференциал, сторона и ориентация поверхности, нормаль к поверхности, поверхностный интеграл первого и второго рода, теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса; **б)** *характеризовать* интегралы первого и второго рода, методы вычисления поверхностных интегралов; **в)** *моделировать* прикладные задачи, приводящие к криволинейным интегралам, *описывать* решения различных геометрических и физических задач, приводящих к поверхностным интегралам;

2) уметь вычислять криволинейные интегралы первого и второго рода, находить длину и массу материальной дуги, устанавливать независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования, находить работу переменной силы и функцию по ее полному дифференциалу, вычислять поверхностные интегралы первого и второго рода.

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ДЛИНЕ ДУГИ (ПЕРВОГО РОДА)

Пусть в пространстве задана дуга L некоторой гладкой кривой (т.е. в каждой точке дуги существует касательная). Предположим, что в каждой точке дуги L определена непрерывная функция $f = f(x, y, z)$.

Разобьем L на n элементарных дуг $l_1, l_2, \ldots, l_n$, длины которых обозначим $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$. На каждой элементарной дуге l_k выберем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ (рис. 12.1) и составим сумму произведений: $I_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta l_k$,

которая называется n-ой *интегральной суммой от функции* $f(x, y, z)$ по дуге L.

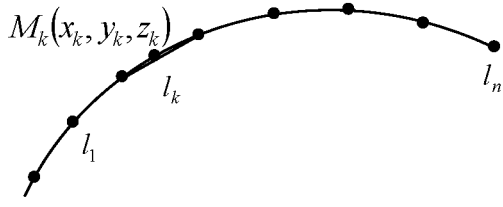


Рис.12.1

Определение. Предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что наибольшая из длин элементарных дуг $\max \Delta l_k \to 0$, называется *криволинейным интегралом по длине дуги (первого рода или КРИ 1)* и обозначается

$$\int_L f(x, y, z) \cdot dl = \lim_{\max \Delta l_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta l_k .$$

Из определения следует, что

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} f(x, y, z) \cdot dl = \int_{\overset{\cup}{BA}} f(x, y, z) \cdot dl ,$$

т.е. *при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл первого рода не меняет знак.*

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИ 1

Вычисление КРИ 1 сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла следующим образом.

1) Если пространственная дуга L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt \text{ и}$$

$$\int_L f(x,y,z)\cdot dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

2) В частности, если плоская дуга L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

$$\int_L f(x,y)\cdot dl = \int_\alpha^\beta f(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx.$$

Пример 12.1. Вычислить $\int_L (x - 2y)dl$, если L – отрезок прямой, проходящий через точки $A(4, 0)$ и $B(0, 2)$.

Решение. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-4}{0-4} = \frac{y-0}{2-0}; \quad \frac{x-4}{-4} = \frac{y}{2}; \quad y = 2 - \frac{x}{2}.$$

Следовательно,

$$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2}dx,\ 0 \le x \le 4,$$

$$\int_L (x - 2y)dl = \int_0^4 \left(x - 2\left(2 - \frac{x}{2}\right)\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx = \int_0^4 (x - 4 + x)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^4 (2x - 4)dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2x^2}{2} - 4x\right)\Bigg|_0^4 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(4^2 - 4\cdot 4\right) = 0.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИ 1 К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ И МЕХАНИКИ

1. *Длина дуги* L находится по формуле

$$l = \int_L dl \,. \qquad (12.1)$$

2. *Масса материальной дуги* с линейной плотностью $\rho = \rho(x, y, z)$ находится по формуле

$$m = \int_L \rho(x, y, z) dl \,. \qquad (12.2)$$

3. *Координаты центра масс* материальной дуги L, имеющей линейную плотность $\rho = \rho(x, y, z)$, находятся по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m}\int_L x\rho(x, y, z) dl \,; \qquad y_C = \frac{1}{m}\int_L y\rho(x, y, z) dl \,;$$

$$z_C = \frac{1}{m}\int_L z\rho(x, y, z) dl \,.$$

Пример 12.2. Найти массу дуги линии $x = t, y = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3$ от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{3}\right)$, если плотность $\rho(x, y, z) = \sqrt{2y}$.

Решение. Из условия следует, что $0 \le t \le 1$. При вычислении массы материальной дуги воспользуемся формулой (12.2). Следовательно,

$$m = \int_L \sqrt{2y} dl = \left| dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}t\right)^2 + \left(t^2\right)^2} dt = \right.$$

$$= \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} dt = \sqrt{\left(1 + t^2\right)^2} dt = \left(1 + t^2\right) dt \Bigg| = \sqrt[4]{2}\int_0^1 t\left(1 + t^2\right) dt =$$

$$=\sqrt[4]{2}\int_0^1\left(t+t^3\right)dt=\sqrt[4]{2}\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}\sqrt[4]{2}\,.$$

§ 4. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ (ВТОРОГО РОДА)

Рассмотрим на плоскости xOy ориентированную гладкую дугу L (т.е. на дуге L указано направление). Пусть на L определена и непрерывна вектор-функция $\overline{a}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$.

Разобьем дугу L на n элементарных дуг $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и построим векторы $\Delta\vec{l}_k=\Delta x_k\vec{i}+\Delta y_k\vec{j}$, направленные из начала в конец дуги l_k. На каждой элементарной дуге l_k выберем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ (рис. 12.2) и составим сумму скалярных произведений $\vec{a}(x_k, y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k$:

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\vec{a}(x_k,y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k=\sum_{k=1}^{n}\left(P(x_k,y_k)\Delta x_k+Q(x_k,y_k)\Delta y_k\right),$$

которая называется n-ой *интегральной суммой от вектор-функции* $\overline{a}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ по дуге L.

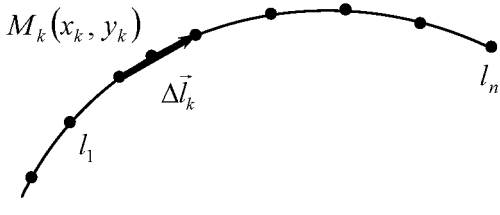


Рис. 12.2

Определение. Предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max\left|\Delta\vec{l}_k\right|\to 0$, называется *криволинейным*

интегралом по координатам (второго рода или КРИ 2) и обозначается

$$\int_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\max|\Delta\vec{l}_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{a}(x_k,y_k)\cdot\Delta\vec{l}_k .$$

Аналогично вводится определение криволинейного интеграла от вектор-функции $\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ по пространственной дуге L:

$$\int_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \lim_{\max|\Delta\vec{l}_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\vec{a}(x_k,y_k,z_k)\cdot\Delta\vec{l}_k .$$

Свойства КРИ 2 аналогичны свойствам определенного интеграла. В частности, из определения следует, что

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} \vec{a}\cdot d\vec{l} = -\int_{\overset{\smile}{BA}} \vec{a}\cdot d\vec{l} ,$$

т.е. при изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

Механический смысл КРИ 2

Пусть тело под действием переменной силы

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\vec{i} + F_y(x,y,z)\vec{j} + F_z(x,y,z)\vec{k}$$

движется по дуге кривой L. Тогда работа A этой силы может быть найдена по формуле

$$A = \int_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_L F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz .$$

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИ 2

Вычисление КРИ 2 сводится к вычислению соответствующего определенного интеграла следующим образом.

1) Если пространственная дуга L задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]dt.$$

2) В частности, если плоская дуга L задана уравнением

$y = y(x)$, $x \in [a,b]$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x,y(x)) + Q(x,y(x)) \cdot y'(x)]dx.$$

Пример 12.3. Вычислить $\int_L xydx + (x^2 + y)dy$, если L **1)** дуга параболы $y = \frac{x^2}{2} + 1$, расположенная между точками $A(0,1)$ и $B(2,3)$; **2)** отрезок прямой AB.

Решение. 1) Сведем вычисление криволинейного интеграла к определенному, полагая $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $dy = \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)' dx = xdx$, $0 \le x \le 2$.

Тогда $\int_L xydx + (x^2 + y)dy = \int_0^2 \left[x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)dx + \left(x^2 + \frac{x^2}{2} + 1\right)xdx \right] =$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{2} + x + \frac{3}{2}x^3 + x\right)dx = \int_0^2 (2x^3 + 2x)dx = \left(2\frac{x^4}{4} + x^2\right)\Bigg|_0^2 = 8 + 4 = 12.$$

2) Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A и B:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 1}{3 - 1}; \quad \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{2}; \quad y = x + 1.$$

Следовательно,

$$\int_L xydx + (x^2 + y)dy = \left| y = x + 1, \quad dy = dx, \quad 0 \le x \le 2 \right| =$$

$$= \int_0^2 [x(x+1)dx + (x^2 + x + 1)dx] = \int_0^2 (2x^2 + 2x + 1)dx =$$

$$=\left(2\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Bigg|_0^2=\frac{16}{3}+4+2=\frac{34}{3}.$$

Пример 12.4. Вычислить работу силового поля $\overline{F}=y^2\vec{i}+2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль контура окружности $x^2+y^2=4$, пробегаемой против часовой стрелки.

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности: $x=2\cos t,\quad y=2\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$ (т.к. обход окружности ведется против часовой стрелки). Работу A силы $\vec{F}=\left(F_x,F_y\right)=(y^2,-2x)$ найдем по формуле:

$$A=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{l}=\int_L F_x dx+F_y dy=\int_L y^2dx+2xdy=$$

$$=\left|\begin{array}{lll} x=2\cos t, & dx=-2\sin tdt, & 0\le t\le 2\pi \\ y=2\sin t, & dy=2\cos tdt, & \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[(2\sin t)^2(-2\sin t)dt+2\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt\right]=8\int_0^{2\pi}\sin^2 td\cos t+8\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt=$$

$$=8\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 t)d\cos t+8\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\left(8\cos t-\frac{8}{3}\cos^3 t+4t+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=8(1-1)-\frac{8}{3}(1-1)+4\cdot 2\pi+0=8\pi.$$

§ 6. ФОРМУЛА ГРИНА

Формула Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру и двойным интегралом по области, ограниченной этим контуром.

Односвязной будем называть область, ограниченную одной замкнутой кривой.

Теорема 12.1. Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой замкнутой односвязной области D с границей L, то справедлива следующая *формула Грина*:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (12.3)$$

где замкнутый контур L обходится против часовой стрелки.

Доказательство:

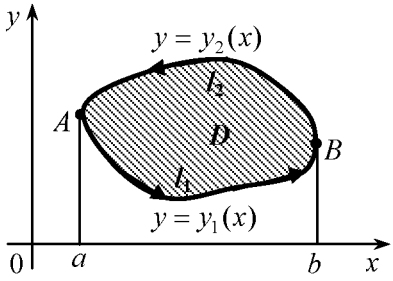


Рис. 12.3

Предположим, что область D является правильной как в направлении оси Ox, так и оси Oy. Пусть D ограничена снизу кривой $l_1 : y = y_1(x)$, а сверху − кривой $l_2 : y = y_2(x)$, $y_1(x) \le y_2(x)$, $a \le x \le b$ (рис. 12.3).

Имеем

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = \int_a^b P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = -\int_a^b P(x, y_1(x))dx - \int_b^a P(x, y_2(x))dx =$$

$$= -\int_{l_1} P(x,y)dx - \int_{l_2} P(x,y)dx = -\oint_L P(x,y)dx. \qquad (12.4)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy. \qquad (12.5)$$

Вычитая из (12.5) формулу (12.4), получим формулу (12.3).

При доказательстве мы предполагали, что область D − правильная. Однако, теорема верна и для неправильной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.

Следствие. Из формулы Грина следует, что

$$\oint_L -ydx + xdy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right] dxdy = \iint_D (1+1)dxdy = 2\iint_D dxdy,$$

т.е. площадь фигуры, ограниченной кривой L, можно найти по формуле

$$S = \oint_L xdy - ydx.$$

Пример 12.5. Вычислить $\oint_L (2xy - y)dx + x^2 dy$, где L – контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(0, 1)$ (рис. 12.4).

Решение. Поскольку контур является замкнутым, применим формулу Грина. В нашем случае

$$P(x, y) = 2xy - y,\ \ Q(x, y) = x^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x.$$

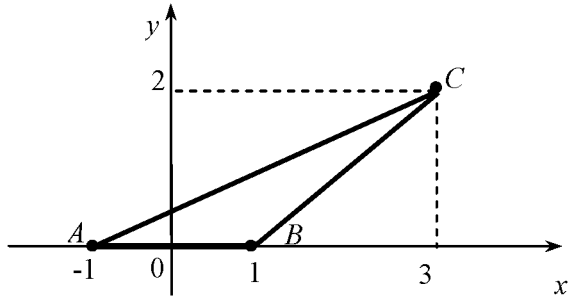


Рис. 12.4

Следовательно,

$$\oint_L (2xy - y)dx + x^2 dy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy =$$

$$= \iint_\Delta (2x - 2x + 1)dxdy = \iint_\Delta dxdy = S_\Delta = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4.$$

§ 7. НЕЗАВИСИМОСТЬ КРИ 2 ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Выясним, при каких условиях криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точек этого пути.

Лемма. Для того, чтобы криволинейный интеграл $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру $L \in D$, был равен нулю.

Теорема 12.2. Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не зависел от пути интегрирования, целиком лежащем в области D, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой области выполнялось равенство $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$.

Если криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования, то часто в качестве контура интегрирования берут ломанную со звеньями, параллельными осям координат.

Пример 12.6. Найти криволинейный интеграл $\oint\limits_L 2xydx + x^2dy$, где L – отрезок прямой, заключенный между точками $A(1, 0)$ и $B(3, 5)$ (рис. 12.5).

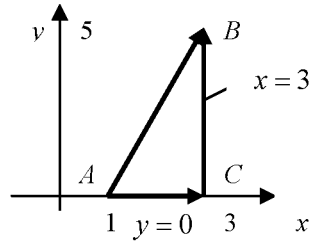


Рис. 12.5

Решение. Покажем, что криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования. В нашем случае $P(x,y)=2xy$, а $Q(x,y)=x^2$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$ и выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, значит, интеграл не зависит от пути интегрирования.

Следовательно,

$$\int_{AB} 2xydx+x^2dy=\int_{AC} 2xydx+x^2dy+\int_{CB} 2xydx+x^2dy=$$

$$=\left|\begin{matrix} AC: & y=0, dy=0; & BC: & x=3, dx=0; \\ & 1\le x\le 3; & & 0\le y\le 5; \end{matrix}\right| =\int_1^3 0dx+\int_0^5 3^2dy=$$

$$=0+9y\Big|_0^5=45.$$

§ 8. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Определение. Дифференциальное выражение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (12.6)$$

называется *полным дифференциалом*, если существует такая функция $u(x,y)$, полный дифференциал которой равен данному выражению, т.е.

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,. \qquad (12.7)$$

С другой стороны

$$du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \quad . \qquad (12.8)$$

Сравнивая формулы (12.7) и (12.8), получаем

$$P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Далее находим $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$, откуда заключаем, что $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ в силу равенства смешанных производных.

Таким образом, справедлива

Теорема 12.3. Для того, чтобы выражение (12.6) было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При выполнении условий теоремы криволинейный интеграл

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

не зависит от пути интегрирования, а лишь от начальной и конечной точек. Выбираем в качестве начальной точки некоторую точку $M_0(x_0,y_0)$ плоскости, а в качестве конечной − произвольную точку $M(x,y)$. Тогда в качестве контура интегрирования можно взять ломанные M_0M_1M или M_0M_2M со звеньями, параллельными осям координат (рис. 12.6).

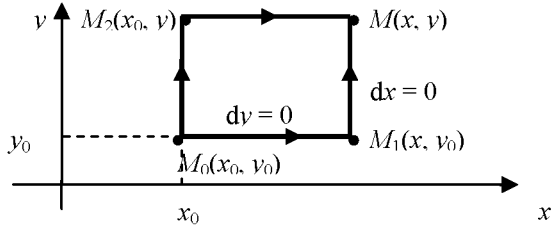


Рис. 12.6

В результате получаем две формулы для нахождения функции $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу:

$$u(x,y)=\begin{cases}\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C,\\ \int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C.\end{cases} \qquad (12.9)$$

где C – произвольная постоянная.

Начальную точку $M_0(x_0, y_0)$ следует выбирать так, чтобы подынтегральные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были определены в этой точке (удобно выбирать одну из точек $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ и т.д.).

Пример 12.7. Проверить, что выражение

$$du(x,y)=\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y\right)dx+\frac{x}{y}dy$$

является полным дифференциалом и найти функцию $u(x, y)$.

Решение. Обозначим $P(x,y)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x}+\ln y$, $Q(x,y)=\dfrac{x}{y}$. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0-0+\frac{1}{y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{y}.$$

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то данное выражение является полным дифференциалом. Найдем функцию $u(x, y)$. Воспользуемся первой из формул (12.9), выбрав за начальную точку $M_0(1;\ 1)$. Такой выбор вызван тем, что при $x_0=0,\ y_0=0$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не определены. Получим

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln y_0\right)dx+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{x}{y}dy+C=\left|x_0=1,\ y_0=1\right|=$$

$$=\int\limits_{1}^{x}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}+\ln 1\right)dx+\int\limits_{1}^{y}\frac{x}{y}dy+C=(\mathrm{arctg}x-\ln x)\Big|_1^x+x\ln y\Big|_1^y+C=$$

$$= \operatorname{arctg} x - \ln x - \operatorname{arctg} 1 + x \ln y + C.$$

Поскольку $C - \operatorname{arctg} 1$ также является постоянной, то окончательный ответ можно записать в виде

$$u(x, y) = \operatorname{arctg} x - \ln x + x \ln y + C.$$

§ 9. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна в каждой точке некоторой поверхности S. Разобьем S произвольным образом на n элементарных частей $S_1, \ldots, S_n$ с площадями $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$. На каждой элементарной поверхности S_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i$.

Определение. Предел последовательности интегральных сумм I_n, когда наибольший из диаметров элементарных областей $d(S_i) \to 0$, называется *поверхностным интегралом первого рода* (ПОВИ 1) от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается

$$\iint_S f(x, y, z) \mathrm{d}S = \lim_{\max d(S_i) \to 0} \sum f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Из определения следует, что *ПОВИ 1 не зависит от выбора стороны поверхности* S.

Вычисление ПОВИ 1 сводится к вычислению двойного интеграла следующим образом.

1) Если поверхность S однозначно проектируется на область D_{xy} плоскости xOy, то её уравнение можно записать в виде $S: \quad z = z(x, y)$ и

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

где D_{xy} – проекция поверхности S на плоскость xOy.

2) Если уравнение поверхности S можно записать в виде $S: \quad y = y(x,z)$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz,$$

где D_{xz} – проекция поверхности S на плоскость xOz.

3) Если уравнение поверхности S можно записать в виде $S: \quad x = x(y,z)$, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz,$$

где D_{yz} – проекция поверхности S на плоскость yOz.

С помощью ПОВИ 1 находят

1. *Площадь Q поверхности S* (геометрический смысл ПОВИ 1):

$$Q = \iint\limits_S dS.$$

2. *Массу m части S поверхности с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$* (механический смысл ПОВИ 1):

$$m = \iint\limits_S \rho(x,y,z)dS.$$

Пример 12.8. Вычислить $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, где S – часть конуса $z^2 = x^2+y^2$, заключенная между плоскостями $z=0, z=2$.

Решение.

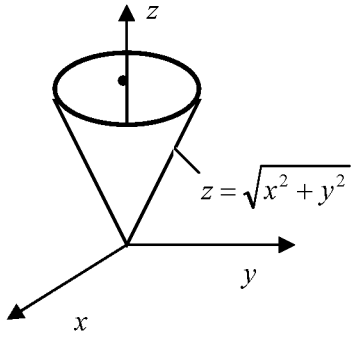


Рис. 12.7

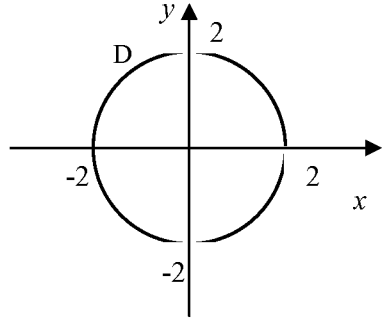


Рис. 12.8

Поверхность S (рис. 12.7) однозначно проектируется на область D плоскости xOy (рис. 12.8), которая представляет собой круг радиусом $R=2$.

Запишем уравнение поверхности в явном виде

$$S: z=\sqrt{x^2+y^2}$$

и найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Найдем dS по формуле

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy =$$

$$= \sqrt{1+1}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Тогда

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)dS = \iint\limits_D (x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le r \le 2 \\ dxdy = rdrd\varphi \end{array} \right| = \sqrt{2}\iint\limits_{D^*} r^2 \cdot rdrd\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr =$$

$$= \sqrt{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{2^4}{4} = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot 4 = 8\sqrt{2}\pi.$$

§ 10. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Пусть S – некоторая гладкая двухсторонняя поверхность. Выберем направление нормали $\vec{n}$ к поверхности S. Эту сторону поверхности S назовем *положительной*, а противоположную – *отрицательной*. Поверхность с выбранным направлением нормали называется *ориентированной*.

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$, то нормаль $\vec{n}$ к поверхности в любой ее точке можно найти следующим образом:

$$\vec{n} = \pm(-f'_x\ , -f'_y, 1),$$

где знак «+» или «–» зависит от того, острый или тупой угол образует нормаль $\vec{n}$ с осью Oz.

Единичный вектор нормали $\vec{n}_0$ находится по формуле

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где $|\vec{n}| = \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}$ – длина вектора $\vec{n}$, а $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{n}$.

Пусть в каждой точке некоторой поверхности S определен вектор

$$\bar{a}(M) = \bar{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k},$$

координаты которого P, Q, R непрерывны на S.

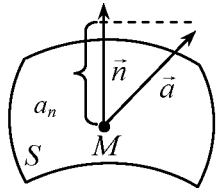


Рис. 12.9

Зададим направление нормали $\bar{n}$ к поверхности S. Проекция a_n вектора $\vec{a}$ в каждой точке M поверхности S будет являться скаляром (рис.12.9). Поэтому функция $a_n(x,y,z) = пр_{\bar{n}}\vec{a}(x,y,z)$ будет скалярной функцией и от нее можно вычислить поверхностный интеграл первого рода.

Определение. *Поверхностным интегралом второго рода* (ПОВИ 2) от вектора $\bar{a}(M)$ по поверхности S называется поверхностный интеграл первого рода от проекции $a_n(M)$ этого вектора на вектор нормали $\vec{n}$ к S и обозначается

$$\iint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint_S a_n \cdot dS = \iint_S \bar{a}\cdot\vec{n}_0 dS.$$

Из определения следует, *что при изменении стороны поверхности ПОВИ 2 меняет знак на противоположный.*

Поскольку

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_0 = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma,$$

то ПОВИ 2 можно записать в виде

$$\iint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint_S \left[P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\right]dS.$$

Обозначим проекции площадки dS на координатные плоскости следующим образом:

$\cos\alpha dS = dydz, \quad \cos\beta dS = dxdz, \quad \cos\gamma dS = dxdy.$

Тогда ПОВИ 2 можно записать в виде

$$\iint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Вычисление ПОВИ 2 можно свести к вычислению двойных интегралов следующим образом.

Пусть поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Из этого уравнения можно выразить переменные

$$x = x(y,z), \qquad y = y(x,z), \qquad z = z(x,y).$$

Обозначим проекции поверхности S на координатные плоскости соответственно D_{xy}, D_{xz}, D_{yz}, причем поверхность может проектироваться на любую из координатных плоскостей дважды.

Тогда

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \pm\iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy,$$

где знак «+» или «−» перед двойным интегралом зависит от того, острый или тупой угол образует нормаль с осью координат, перпендикулярной проекции.

Пример 12.9. Вычислить $\iint\limits_S xdydz + y^2dxdz$, где S − часть сферы $x^2+y^2+z^2=1$, отсеченная плоскостями $x=0\ (x\ge 0), z=0\ (z\ge 0)$. Нормаль $\vec{n}$ образует острый угол с осью Ox.

Решение. Построим поверхность S (рис. 12.10) и ее проекции D_1 и D_2 на плоскости yOz и xOz (рис. 12.11 и 12.12).

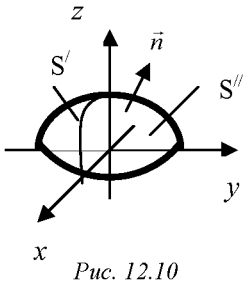


Рис. 12.10

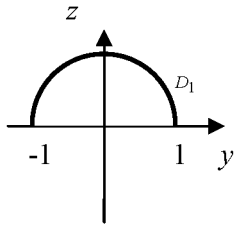


Рис. 12.11

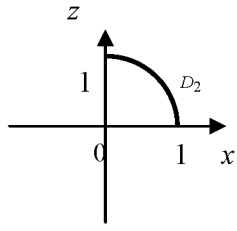


Рис. 12.12

Представим исходный интеграл в виде суммы двух поверхностных интегралов и вычислим их:

$$I = \iint\limits_S xdydz + y^2 dxdz = I_1 + I_2 .$$

Найдем интеграл $I_1 = \iint\limits_S xdydz,$ сведя его вычисления к вычислению двойного интеграла. Для этого выразим из уравнения поверхности x: $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ (по условию $x \geq 0$). Так как угол $\angle(\vec{n}, Ox)$ – острый, то перед двойным интегралом ставим знак «+» и получаем

$$I_1 = \iint\limits_S xdydz = +\iint\limits_{D_1} \sqrt{1 - y^2 - z^2}\, dydz = \left| \begin{array}{c} y = r\cos\phi,\ \ 0 \leq \phi \leq \pi \\ z = r\sin\phi,\ \ 0 \leq r \leq 1 \\ dydz = rdrd\phi \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r \cdot dr = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^1 (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(1 - r^2) \right) =$$

$$=\varphi\Big|_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\right)=-\frac{\pi}{3}(0-1)=\frac{\pi}{3}.$$

Найдем интеграл $I_2=\iint\limits_S y^2dxdz$. Поверхность S проектируется на плоскость xOz дважды: слева поверхность S' и справа поверхность S'' проектируются на одну и ту же область D_2. Запишем уравнения S' и S'', выразив переменную y:

$$S':\quad y=-\sqrt{1-x^2-z^2},\quad \angle(\vec{n},Oy)-\text{ тупой},$$

$$S'':\quad y=+\sqrt{1-x^2-z^2},\quad \angle(\vec{n},Oy)-\text{ острый}.$$

Поэтому $I_2=\iint\limits_S y^2dxdz=\iint\limits_{S'} y^2dxdz+\iint\limits_{S''} y^2dxdz=$

$$=-\iint\limits_{D_2}\left(-\sqrt{1-x^2-z^2}\right)^2dxdz+\iint\limits_{D_2}\left(\sqrt{1-x^2-z^2}\right)^2dxdz=0.$$

Следовательно, $I=I_1+I_2=\frac{\pi}{3}+0=\frac{\pi}{3}$.

§ 11. ФОРМУЛЫ СТОКСА И ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Формула Стокса устанавливает связь между ПОВИ 2 по поверхности S и КРИ 2 по замкнутому контуру L, который является границей этой поверхности.

Положительным считается обход контура L, когда положительная сторона поверхности S остается слева.

Теорема 12.4. Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой

области V пространства, содержащей гладкую поверхность S с границей L. Тогда

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS,$$

где обход контура L производится в положительном направлении.

Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между ПОВИ 2 по замкнутой поверхности S и тройным интегралом по объему V, ограниченному этой поверхностью.

Теорема 12.5. Пусть функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой области V пространства, ограниченной замкнутой поверхность S. Тогда

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

где интегрирование производится по внешней стороне поверхности S.

Пример 12.10. Вычислить $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S − внешняя сторона цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ с основаниями $z = 0$ и $z = H$.

Решение. Так как поверхность является замкнутой, то воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint_V \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} \right) dxdydz = 3\iiint_V dxdydz =$$

$$= 3V_{цилиндра} = 3 \cdot \pi R^2 \cdot H.$$

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Вычислить $\int\limits_L (x+y^2)dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$, $B(1,2)$.

2. Вычислить $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, если L – первая арка циклоиды $x=4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

3. Вычислить $\int\limits_L (x^2+y^2)^2 dl$, если L – часть окружности $x^2+y^2=4$, лежащая в первом квадранте.

4. Вычислить $\int\limits_L (x+y-z)dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,0,1)$, $B(2,2,3)$.

5. Вычислить массу дуги кривой $y=\ln x$ между точками $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{15}$, если ее плотностью $\rho(x,y)=x^2$.

6. Вычислить массу первого витка винтовой линии $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$ с плотностью $\rho=x^2+y^2+z^2$ $(0\le t\le 2\pi)$.

7. Вычислить $\int\limits_L (y^2-2xy)dx+(2xy+x^2)dy$, где L:

а) дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(2,4)$;

б) отрезок AB этой прямой.

8. Вычислить $\oint\limits_L (2x-y)^2 dx+2xydy$, где L – ломанная $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(2, 3)$.

9. С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной:

а) астроидой $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$.

б) первой аркой циклоиды $x=9(t-\sin t)$, $y=9(1-\cos t)$ и осью Ox.

10. Найти работу силы $\vec{F} = 4x^3 y\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении вдоль дуги L кубической параболы $y = x^3$ от точки $A(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

11. Найти работу силы $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении вдоль эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ в положительном направлении.

12. Применив формулу Грина, вычислить

$$\oint_L y^2 dx + xydy,$$

где L – контур треугольника ABC с вершинами $A(3,\ 0)$, $B(3,\ 3)$, $C(0,\ 3)$.

13. Применив формулу Грина, вычислить

$$\oint_L (x^2 - 1)ydx + x(y^2 + 1)dy,$$

где L – контур окружности $x^2 + y^2 = 16$, пробегаемый в отрицательном направлении.

14. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$:

а) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$;

б) $du = \frac{x\ln y + y}{x}dx + \frac{y\ln x + x}{y}dy$;

в) $du = (\sin 2x - \frac{1}{x^2 y})dx - \frac{1}{xy^2}dy$.

15. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_S xyzdS$, где S – часть плоскости $x + y + z = 1$, лежащая в первом октанте.

16. Найти массу части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенной в первом октанте, если поверхностная плотность $\rho(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

17. Вычислить $\iint\limits_S y^2 dxdz + zdxdy$, где S – часть поверхности параболоида $z = 4 - x^2 - y^2$, отсеченного плоскостью $z = 0$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

18. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона пирамиды, образованной плоскостью $x + 2y + z = 6$ и координатными плоскостями.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Найти $\int\limits_L 2xydx + x^2dy$, если L – дуга кривой $y = \dfrac{x^2}{4}$, заключенная между точками $O(0, 0)$ и $A(2, 1)$.

2. Показать, что выражение $\left(2xy - \dfrac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - \dfrac{2}{y^3}\right)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

3. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ вдоль отрезка прямой от точки $B(0, 0)$ до точки $C(2; 1)$.

4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S 3\sqrt{x^2 + y^2}dS$, если S – часть конуса $x^2 + y^2 = z^2$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 2$.

Вариант 2

1. Найти $\int\limits_L 2xdy + ydx$, если L – дуга кривой $x = y^2$, заключенная между точками $O(1, 1)$ и $A(4; 2)$.

2. Показать, что выражение $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

3. Вычислить работу, производимую силой $\vec{F}=xy\vec{i}+2y\vec{j}$ вдоль отрезка прямой от точки $B(1, 0)$ до точки $C(2, 3)$.

4. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S 6\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\,dS$, если S – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, расположенная между плоскостями $z=0$ и $z=3$.

Домашнее задание

1. Вычислить $\int\limits_L \frac{dl}{x+2y+4}$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,-2)$, $B(1,0)$.

2. Вычислить $\int\limits_L (4z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, если L – первый виток винтовой линии $x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad z=t\quad (0\le t\le 2\pi)$.

3. Вычислить $\int\limits_L x^2ydl$, если L – часть окружности $x^2+y^2=16$, лежащая в первом квадранте.

4. Вычислить координаты центра масс однородной полуокружности $x^2+y^2=4$, симметричной относительно оси Ox.

5. Вычислить $\int\limits_L yzdx+xzdy+xydz$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1, 1,1)$ и $B(4,3,2)$.

6. Вычислить работу силы $\vec{F}=(x-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ вдоль окружности $x=3\cos t,\ y=3\sin t$, пробегаемой в отрицательном направлении.

7. Применив формулу Грина, вычислить

$$\oint\limits_L y^3dx+(x^2+6y)dy,$$

где L – контур, образованный линиями $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$, пробегаемый в положительном направлении.

8. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$:

а) $du=(4x-3y^2+5)dx+(7-6xy)dy$;

б) $du=(\frac{2x}{y}-2\sin 2x)dx+(2y-\frac{x^2}{y^2})dy$.

9. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S xyzdS$, где S – часть параболоида $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$.

10. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz-y^2dxdz+z^2dxdy$, где S – часть поверхности конуса $x^2=y^2+z^2$, отсеченного плоскостями $x=0$, $x=1$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{i}$).

11. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+zdxdy$, где S – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=9$ с основаниями $z=0$, $z=2$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 12

1⁰. Если кривая L в плоскости xOy задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$, то $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ находится по формуле:

а) $\int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)]dx$; **б)** $\int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f(x)]dx$;

в) $\int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))] \cdot f'(x)dx$; **г)** $\int_a^b [P(x, f(x)) + Q(x, f(x))]dx$.

2⁰. Криволинейный интеграл второго рода численно равен
а) массе дуги; **б)** длине кривой; **в)** объему цилиндра;
г) работе переменной силы при перемещении вдоль кривой.

3. Вычислить $\int_L xydx + xdy$ от т. $O(0,0)$ до т. $A(1,4)$, если $y = 3x + 1$.

4. $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования, если

а) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$; **б)** $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$; **в)** $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$; **г)** $\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$.

5. Если $du = (3x^2 - 2xy^2 + 1)dx + (3y^2 - x^2y + 1)dy$, то функция $u(x,y)$ находится по формуле

а) $x^3 + y^3 + x + y - x^2y^2 + C$; **б)** $x^3 + y^3 + x + y - 2x^2y^2 + C$;

в) $x^3 + y^3 + x + y + C$; **г)** $x^3 + y^3 + x + y - 4x^2y^2 + C$.

6. Работа, производимая силой $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + 3x\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^2 - 1$ от точки $A(0;-1)$ до точки $B(1,0)$, равна

а) 1; **б)** 6; **в)** 3; **г)** 0.

7*. Вычислить $\int_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, если L – первая четверть окружности $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

а) 0; **б)** $-\pi$; **в)** π; **г)** -2π.

8*. С помощью формулы Грина криволинейный интеграл $\oint\limits_L x^2 ydx + xy^2 dy$ преобразуется в интеграл

а) $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dxdy$;**б)** $\iint\limits_D \left(y^2 - x^2\right)dxdy$;**в)** $\iint\limits_D 4xydxdy$;**г)** $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy$.

9. Из приведенных ниже интегралов выбрать поверхностный интеграл первого рода:

а) $\iint\limits_S xdydz$; **б)** $\iint\limits_D xdxdy$; **в)** $\iint\limits_S xydS$; **г)** $\iint\limits_V xydV$.

10. Поверхностный интеграл $\iint\limits_S zdxdy$, где S − поверхность параболоида $y = 1 - x^2 - z^2$, отсеченная плоскостью $y = 0$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$), сводится к вычислению интеграла:

а) $\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y}dxdy$; **б)** 0; **в)** $2\iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 - x^2 - y}dxdy$; **г)** $\iiint\limits_D dxdydz$.

ИДЗ 12

Вариант 1

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x - y)dl$, если L − отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,0)$, $B(4,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L ydx + 2xdy \text{ , где } L:\ x = 2\cos t, y = \sin t,\ 0 \le t \le \pi.$$

3. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L кубической параболы $y = x^3$ от точки $B(0;0)$ до точки $C(2;8)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L y^2dx + (x+y)^2dy$, где L – контур треугольника $A(2,0)$, $B(2,2)$, $C(0,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(5x^4y^2 - e^x\right)dx + \left(2x^5y - \sin y\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x+3y+2z)dS, \qquad P: \quad x+3y+z=3.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S yzdxdz + xzdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $z=0$ и $z=1$.

Вариант 2

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L x^2dl$, если L : $x = 2\cos t, y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y^2 - xy)dx + x^2dy$, где L : $y = 2x$ от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x = 2\cos t, y = 2\sin t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$.

4. С помощью формулы Грина, вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L xydx + x^2dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(y - x^2\right)dx + \left(x + 2e^{2y}\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (2+y-7x+9z)dS, \qquad P: \quad 2x-y-2z=-2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S (y^2+1)dxdz+y^2dxdy$, где S – часть поверхности конуса $y^2=x^2+z^2$, отсеченного плоскостями $z=1$, $y=3$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

Вариант 3

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \sqrt{2y+x^2}\,dl$, если L – парабола $y=1+\frac{x^2}{2}$, заключенная между точками $A(0,1)$, $B(2,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L xydx-xdy$, где L: $x=2\cos t, y=\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=\left(xy-y^2\right)\vec{i}+x\vec{j}$ при перемещении материальной точки по прямой $y=2x$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L y(1+2x)dx+(x^2+y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (6x+y+4z)dS, \qquad P: \quad 3x+3y+z=3.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz-(x+2y)dxdz$, где S – внутренняя сторона поверхности, ограниченной цилиндром $x^2+y^2=1$ и плоскостями $x+2y+3z=6$ и $z=0$.

Вариант 4

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L y^2dl$, если $L:\ x=2\cos t, y=2\sin t,\quad 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y+x)dx+(y-x)dy$, где $L:\ y=2x-1$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,3)$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=\dfrac{1}{y}\vec{i}-\dfrac{1}{x}\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x=3\cos t, y=3\sin t$ от $t_1=\pi/6$ до $t_2=\pi/3$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (y-x^2)dx+(2x+y^2)dy$, где L – контур $y=x^2, y=0,\quad x=2,$ пробегаемый в положительном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(4x^3y^3-y^2\right)dx+\left(3x^4y^2-2xy\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (x+2y+3z)dS,\qquad P:\quad x+y+z=2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz+zdxdy$, где S – часть поверхности параболоида

$2-z=x^2+y^2$, отсеченного плоскостью $z=1$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 5

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{dl}{y+x}$, если L отрезок прямой, заключенный между точками $A(2,4)$, $B(3,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L ydx - xydy$, где L: $x=\cos t, y=2\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=(xy-x)\vec{i}-\frac{x^2}{2}\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L параболы $y=4x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;4)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L 4xydx+(x^2+y)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(1,3)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=(10xy-8y)dx+(5x^2-8x+3)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (3x-2y+6z)dS, \qquad P: \quad 2x+y+2z=2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S zdydz-4ydxdz+2xdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной параболоидом $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

Вариант 6

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16y^2}}dl$, если L: $x=2\cos t,\ \ y=\sin t,\ 0\le t\le \pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y^2-x^2)dx+(x+y)^2dy$, где L: $y=2x$ от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=\left(y^2-x^2\right)\vec{i}+2yx\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги линии L: $x=t,\ y=t^2$ от $t_1=0$ до $t_2=1$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (2y-x^2)dx+(3x+y^2)dy$, где L – контур $y=x^3,\ y=0,\ x=1$, пробегаемый в отрицательном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(5x^4+3ye^{3x}\right)dx+\left(\cos y+e^{3x}\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x+5y-z)dS, \qquad P: \quad x+2y+z=2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz+zdxdy$, где S – часть поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$, отсеченного плоскостью $z=2$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 7

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{y+3x^2}}$, если L – парабола $y = x^2 + 1$, заключенная между точками $A(1, 2)$, $B(2, 5)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L ydx - xdy$, где L: $x = 2\cos t, y = 3\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой $y = x$, от точки $B(-1;1)$ до точки $O(0;0)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (y+x)^2 dx + (x^2 + y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,3)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(2x - 3y^2 + 1\right)dx + \left(2 - 6xy\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (5x - 8y - z)dS, \qquad P: \quad 2x - 3y + z = 6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (2x - 3z)dydz + (3y + 2z)dxdz$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $x + y + z = 4$ и $z = 0$.

Вариант 8

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + 16y^2}}dl$, если L: $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L 3x^2ydx+(y-4x)dy$, где L: $y=x^3$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=-xy^2\vec{i}+x^2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги линии L: $x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi/2$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (xy-x^2)dx+(x^2+y^2)dy$, где L – контур $y=x^2$, $y=0$, $x=1$, пробегаемый в положительном направлении.

5. Найти функцию $u(x, y)$ по ее полному дифференциалу

$$du=(y-2xy)dx+\left(x-x^2-4y\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (3y-x-z)dS, \qquad P: \quad x-y+z=2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz+ydxdz$, где S – часть поверхности шара $x^2+y^2+z^2=4$, отсеченного плоскостью $z=0\,(z\geq 0)$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 9

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (xy+2x^2)dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,1)$, $B(3,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x+y)dx+(y-x)dy$, где $L: x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = \left(xy - y^2\right)\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;2)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L 2y^2dx + (x+y)^2dy$,где L – контур треугольника $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(x^3 + \ln y\right)dx + \frac{x}{y}dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (3y - 2x - 2z)dS, \qquad P: \quad 2x - y - 2z = -2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S zdydz + (3y - x)dxdz - zdxdy$, где S –внешняя сторона поверхности, ограниченной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и параболоидом $z = x^2 + y^2 + 2$ и плоскостью $z = 0$.

Вариант 10

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L ydl$, если L: $x = 3t$, $y = 2t^3$, заключенная между точками $A(0,0)$ и $B(3,2)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L ydx + xdy$, где L: $y = x^3$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,8)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (y - x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L x^2 dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(21x^2 y + y^3\right)dx + \left(3xy^2 + 7x^3\right)dy .$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x - 3y + z)dS, \qquad P: \quad x + 2y + z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xydydz$, где S – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, отсеченного плоскостями $z = 0$, $z = 2$.

Вариант 11

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2 y + \frac{1}{x})dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(3,0)$, $B(4,1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (2x - y)dx + (x - 2y)dy$, где L: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 4x^3 y\vec{i} + xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(2;8)$.

4. С помощью формулы Грина, вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x - y)dx + (x + y)dy$, где L – контур $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2.$, пробегемый в положительном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(5x^4 - 2xy + y^2\right)dx + \left(y^2 + 2xy - x^2\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (5x + y - z)dS, \qquad P: \quad x + 2y + 2z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S xdydz + zdxdz - ydxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности, ограниченной параболоидами $z = 4 - 2(x^2 + y^2)$, $z = 2(x^2 + y^2)$.

Вариант 12

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, если L: $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L xydx + x^2dy,$$

где L: $y = x^2 - 2$ от точки $A(1,-1)$ до точки $B(2,2)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги: окружности $x^2 + y^2 = 4$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L (x^2 - y)dx + (x + y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(\cos x + 3ye^{3x}\right)dx + \left(y^4 + y + e^{3x}\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (3x + 2y + 2z)dS, \qquad P: \quad 3x + 2y + 2z = 6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (xy-z)dxdz$, где S – часть плоскости $2x+y+z=2$, заключенная в первом октанте (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 13

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (4x^3+5y)dl$, если L – кубическая парабола $y=x^3$, заключенная между точками $A(0,0)$, $B(1,1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L y^2dx-x^2dy \text{, где } L:\ x=\cos t,\quad y=\sin t,\ 0\le t\le\frac{\pi}{4}.$$

3. Найти работу силы $\vec{F}=\left(x^2+y\right)\vec{i}+\left(x+y^2\right)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой $y=x+2$ от точки $B(0;\ 2)$ до точки $C(1;\ 3)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (y-x^2)dx+(2x+y^2)dy$, где L – контур $y=x^2$, $y=0$, $x=2$, пробегаемый в отрицательном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(7x^6y^3-\sin x\right)dx+\left(3x^7y^2+\cos y\right)dy\ .$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x+3y-z)dS, \qquad P:\quad 2x+y+z=2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S 6xdydz-2ydxdz-zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной конусом $z^2=x^2+y^2$ $(z\ge 0)$ и параболоидом $z=3-2(x^2+y^2)$.

Вариант 14

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+5}}$, если $L:\ x=2\cos t,\ \ y=2\sin t,\ 0\le t\le \pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (y^2+x^2)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, где $L:\ y=2x$ от точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x^2+y^2=9$ от $t_1=\frac{\pi}{2}$ до $t_2=\pi$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (2y+x^2)dx+(x+y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1),\ \ B(2,1),\ \ C(2,5)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(2y-x^2\right)dx+\left(y^3+2x\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (9x+2y+z)dS, \qquad P:\quad 2x+y+z=4.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S ydxdz-z^2dxdy$, где S – часть поверхности параболоида $y=x^2+z^2$, отсеченного плоскостью $y=4$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

Вариант 15

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{dl}{x+2y}$, если L – прямая $y=\frac{1}{2}x+1$, заключенная между точками $A(1,4)$, $B(4,4)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (2x+y)dx+(2y-x)dy$, где L: $x=3\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=xy\vec{i}+(x+y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой $y=x-2$ от точки $B(0;\ -2)$ до точки $C(1;\ -1)$.

4. С помощью формулы Грина, вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (y^2+x^2)dx+(x+y)^2dy$, где L – контур треугольника $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=(20xy-5y)dx+(10x^2-5x+6)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (3x+8y+8z)dS, \qquad P: \quad x+4y+2z=8.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S 2(z-y)dxdz+(x-z)dxdy$, где S –внешняя сторона поверхности, ограниченной цилиндром $x^2+y^2=4$ и параболоидом $z=x^2+y^2+1$ и плоскостью $z=0$.

Вариант 16

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \sqrt{x^2+16y^2}dl$, если L: $x=2\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int\limits_L (xy+2x)dx - \frac{x^2}{2}dy$, где L: $y=4x^2$ от точки $A(1,4)$ до точки $B(2,16)$.

3. Найти работу силы $\vec{F}=2y\vec{i}-x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x^2+y^2=16$ от $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (\ln x - y)dx + (x - \ln y)dy$, где L – контур $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=4$, пробегаемый в положительном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(y\cos x+x^2\right)dx+\left(\sin x-y^3\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (4y-x+4z)dS, \qquad P: \quad x-2y+2z=2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz+ydxdz$, где S – часть поверхности шара $x^2+y^2+z^2=1$, отсеченного плоскостями $y=0\ (y\ge 0)$, $z=0\ (z\ge 0)$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 17

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (3xy+x^3+1)$, если L – отрезок прямой, заключенный между точки $A(0,1)$, $B(3,2)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int\limits_L xy^2dx - x^2ydy$, где L: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(2;4)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (2y - x^2)dx + (3x + y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(3x^2 + y^2 - 2xy\right)dx + \left(2xy - x^2 + y^2\right)dy .$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (7x + y + 2z)dS, \qquad P: \quad 3x - 2y + 2z = 6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz - zdxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности, ограниченной конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 2$.

Вариант 18

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (2x + y^2)dl$, если L: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (xy + y^2)dx + xydy$, где L : $y = 2x$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = \frac{1}{5}y\vec{i} + \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x^2 + y^2 = 25$ от $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L y(1+2x)dx+(x^2+y^2)dy$, где L – контур $y=x^2, y=0, \quad x=2.$

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du=\left(3e^{3x}-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy\,.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x+3y+z)dS, \qquad P: \quad 2x+3y+z=6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S (x^2+y^2)dxdz$, где S – часть поверхности параболоида $z=1-x^2-y^2$, отсеченного плоскостями $y=0\ (y\geq 0), z=0$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 19

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (3y+x^3)dl$, если L – кубическая парабола $y=\frac{1}{3}x^3$, заключенная между точками $A(0,0), \quad B(1,1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, где $L:\ x=2\cos t, \quad y=2\sin t$, $0\leq t\leq \pi.$

3. Найти работу силы $\vec{F}=(x+y)\vec{i}-x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой $y=x+2$ от точки B(-2; 0) до точки C(0; 2).

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (y-x^2)dx+(2x+y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1), \quad B(2,1), \quad C(2,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(x^2y^3 - y^3\right)dx + \left(x^3y^2 - 3xy^2\right)dy .$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (4x - y + z)dS, \qquad P: \quad x - y + z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S y^2dydz + x^2dxdz - z^2dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности, ограниченной параболоидом $y = 4 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 3$.

Вариант 20

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2 + 2y)dl$, если L: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x - y)dx + (x^2 + y)dy$, где L : $y = 1 - x^2$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,0)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги окружности $x^2 + y^2 = 9$ от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L xydx + x^2dy$, где L – контур $y = x^3, y = 0, x = 1$, пробегаемый в отрицательном напрвлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(y + 3x^2y\right)dx + \left(x^3 + x + y^2\right)dy .$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (6x - y + 8z)dS, \qquad P: \quad x + y + 2z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S y^2 dxdz - zdxdy$, где S – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 1$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 21

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L (x^3 + 4yx^2)dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(2,0)$, $B(3,1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int_L (x + 2y)dx + (y - 2x)dy$, где L: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = \left(x^2 + y^2 + 1\right)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L (2xy - x^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(3,1)$, $C(3,3)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(2xy - \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 - 2\frac{1}{y^3}\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (4x - 4y - z)dS, \qquad P: \quad x + 2y + 2z = 4.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xy^2dydz + x^2ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и параболоидом $z = 2 - x^2 - y^2$.

Вариант 22

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L x^2dl$, если $L:\ x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (xy - x^3)dx + x^2dy$, где $L:\ \ y = x^2 + 1$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,2)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 4y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги эллипса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x - y)dx + (x + y)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1),\ \ B(2,1),\ \ C(2,5)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(\frac{1}{x} + \sin y\right)dx + x\cos x dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x + 5y + z)dS, \qquad P:\quad x + y + 2z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xydydz + xzdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 9$, отсеченного плоскостями $z = 0, \quad z = 3$.

Вариант 23

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^2 y + \frac{1}{x})dl$, если L – отрезок прямой между точками $A(3,0), \quad B(4,1)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x - 2y)dx + (y + 2x)dy$, где L: $x = 3\cos t, \quad y = 2\sin t$, $0 \le t \le \pi$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + (y - x)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль прямой $y = x$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (2y + x^2)dx + (x + y^2)dy$, где L – контур $y = x^2, x = 0, y = 1\ (x \ge 0)$, пробегаемый в положительном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (4x - y + 4z)dS, \qquad P: \quad 2x + 2y + z = 4.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xz^2dydz - ydxdz + zx^2dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности, ограниченной конусом $y^2 = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 2$.

Вариант 24

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L y^2 dl$, если $L:\ x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L (x^3 - 2xy)dx + (2x^2 + y)dy$, где $L\ :\ y = x^2$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 3y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L 2y^2 dx + (x+y)^2 dy$, где L – контур четырехугольника $O(-2,-1), A(2,-1),\ \ B(2,1),\ \ C(-2,1)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = (3\cos x + 2xy)dx + (3\sin y + x^2)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (5x + 2y + 2z)dS, \qquad P: \quad x + 2y + z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S y^2 dxdz + zdxdy$, где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 4$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

Вариант 25

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x+y)dl$, если $L-$ отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,0)$, $B(0,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ydx - 2xdy$, где L: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = (x+y)\vec{i} - 2y\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги L параболы $y = x^2 + 1$ от точки $B(0;1)$ до точки $C(2;5)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (x^2 - y)dx + (x + y^2)dy$, где L – контур $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$ $(x \ge 0)$, пробегаемый в положительном направлении.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} + \ln y\right)dx + \frac{x}{y}dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x + 5y + 10z)dS, \qquad P: \quad 2x + y + 3z = 6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^3dydz + 3ydxdz + z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной параболоидом $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 4$.

Вариант 26

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{y}{x} dl$, если L: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L \frac{y}{x} dx + xdy,$$

где L : $y = x^2 - 1$ от точки $A(1,0)$ до точки $B(2,3)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ от $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (y - x^2)dx + (2x + y^2)dy$, где L – контур треугольника $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2 - 2xy\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (2x + 15y + z)dS, \qquad P: \quad x + 2y + 2z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S xdydz - ydxdz + zdxdy$, где S – часть плоскости $2x + y = 2$, отсеченного плоскостями $x = 0, y = 0, z = 0, z = 3$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{i}$).

Вариант 27

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (xy + x^3)dl$, если L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1,0)$, $B(0,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$\int\limits_L ydx - \sqrt{x^2 + y^2}xdy$, где L: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = \left(x^2 - 2xy\right)\vec{i} + \left(2xy + y^2\right)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги параболы $y = x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L 4xydx + (x^2 + y)dy$, где L – контур четырехугольника $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,3)$, $C(0,3)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(\cos x - 2xy\right)dx + \left(+3\sin y - x^2\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (3x + 10y - z)dS, \qquad P: \quad x + 3y + 2z = 6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2dydz + z^2dxdz + y^2dxdy$, где S – внутренняя сторона поверхности, ограниченной параболоидом $y = 1 - x^2 - z^2$ и плоскостью $z = 0$.

Вариант 28

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L \frac{x}{y}dl$, если L: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L 2xydx - x^2dy,$$

где L : $y = x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ от $t_1 = \frac{\pi}{6}$ до $t_2 = \frac{\pi}{3}$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L y^2dx + (x+y)^2dy$, где L – контур, пробегаемый в отрицательном направлении $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = (3\cos x + 2xy)dx + (+3\sin y + x^2)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint_S (2x + 3y + z)dS, \qquad P: \quad 2x + 2y + z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_S y^2dxdz + zdxdy$, где S – часть поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, отсеченного плоскостью $y = 0$ $(y \geq 0)$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

Вариант 29

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L (x^2y + \frac{1}{x})dl$, если L –отрезок прямой между точками $A(3,2)$, $B(2,3)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_L \sqrt{4x^2 + y^2}\,ydx - xdy$, где L: $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = x^2 y\vec{i} + x^3 \vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги параболы $y = x^2$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

4. С помощью формулы Грина вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (\sin x - y)dx + (x + \cos y)dy$, где L – контур треугольника $A(2,0)$, $B(2,2)$, $C(0,2)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(xy^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx + \left(x^2 y + 2\frac{1}{y^3}\right)dy.$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (5x - y + 5z)dS, \qquad P: \quad 3x + 2y + z = 6.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона поверхности, ограниченной параболоидами $z = 2 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$.

Вариант 30

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L xydl$, если $L:\ x = 2\cos t,\ \ y = 2\sin t,\ \ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_L (xy - y^2)dx + xdy,$$

где $L:\ y = 2x^2$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = 2y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль дуги эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$, от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

4. С помощью формулы Грина, вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint\limits_L (\cos x - 2y)dx + (2x - \sin y)dy$, где L – контур треугольника $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$.

5. Найти функцию *u(x, y)* по ее полному дифференциалу

$$du = \left(9x^2 + 2xy - y^2\right)dx + \left(x^2 - 9y^2 - 2xy\right)dy .$$

6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности S, где S – часть плоскости P, отсеченная координатными плоскостями.

$$\iint\limits_S (x + 3y + 2z)dS, \qquad P: \quad 2x + y + 2z = 2.$$

7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S x^2 dydz - zydxdz$, где S – часть поверхности параболоида $y = 4 - x^2 - z^2$, отсеченного плоскостью $y = 0$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Вычислить $\int\limits_L 2xdl$, где L – отрезок прямой от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.

Решение. Запишем уравнение прямой AB по двум точкам:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}; \qquad \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 0}{2 - 0}; \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{2}; \qquad y = 2x.$$

Далее находим:

$$dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + ((2x)')^2}\,dx = \sqrt{1 + 4}dx = \sqrt{5}dx,$$

$$\int_L 2xdl = \int_0^1 2x\sqrt{5}dx = 2\sqrt{5}\int_0^1 xdx = 2\sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \sqrt{5}.$$

Задание 2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\oint_L \sqrt[3]{y}dx - \sqrt[3]{x}dy$, если L – дуга астроиды $x = \cos^3 t,\quad y = \sin^3 t$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(0, 1)$.

Решение. Перейдем к определенному интегралу, заменив

$$x = \cos^3 t,\quad y = \sin^3 t$$

$$dx = -3\cos^2 t\cdot\sin t,\qquad dy = 3\sin^2 t\cdot\cos t,\qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$\oint_L \sqrt[3]{y}dx - \sqrt[3]{x}dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t\cdot(-3\cos^2 t\cdot\sin t) - \cos t\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -3\cos^2 t\cdot\sin^2 t - 3\cos^2 t\cdot\sin^2 t dt = -6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin^2 t =$$

$$= -6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2 2t = -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos 4t)}{2}dt = -\frac{3}{4}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3\pi}{8}.$$

Задание 3. Вычислить работу силы $\overline{F} = (x^2 + y)\vec{i} + (x + y^2)\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль кубической параболы $y = x^3$ от точки В$(-1; -1)$ до точки $O(0; 0)$.

Решение. Работу A силы $\vec{F}$ найдем по формуле

$$A = \int_L \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y = \int_L \left(x^2 + y\right)\mathrm{d}x + \left(x + y^2\right)\mathrm{d}y.$$

Так как $y = x^3$, то $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = (x^3)'\mathrm{d}x = 3x^2\mathrm{d}x$. Значит,

$$A=\int_L (x^2+y)\mathrm{d}x+(x+y^2)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}(x^2+x^3+\left(x+\left(x^3\right)^2\right)3x^2)\mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^2+4x^3+3x^8)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+x^4+\frac{x^9}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Задание 4. Применяя формулу Грина, вычислить

$$\oint_L (2yx+tgx)dx+(2x^2+ctgy)dy\,,$$

где L – контур треугольника $A(0,1)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$.

Решение. Поскольку контур L замкнут (рис. 1), применим формулу Грина

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

где D – область, ограниченная сторонами треугольника.

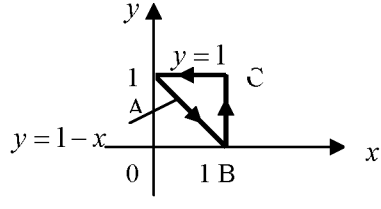


Рис. 1

$$P(x,y)=2xy+tgx,\qquad Q(x,y)=2x^2+ctgx\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x+0=2x,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=2\cdot 2x+0=4x.$$

Тогда

$$\oint_L (2yx+tgx)dx+(2x^2+ctgy)dy=\iint_D(4x-2x)dxdy=2\iint_D xdxdy=$$

$$=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^{1}dy=2\int_0^1 xdx\cdot y\Big|_{1-x}^{1}=2\int_0^1 xdx(1-(1-x))=2\int_0^1 x^2dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Задание 5. Найти функцию $u(x,y)$ по заданному ее полному дифференциалу

$$du = (3x^2 + e^{2y})dx + (\sin y + 2xe^{2y})dy .$$

Решение.

Для решения задачи используем вторую из формул (12.9)

выбрав за начальную точку $M_0(0;0)$. Получим

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(3x^2 + e^{2y}\right)dx + \int_{y_0}^{y} \left(\sin y + 2x_0 e^{2y}\right) + C = \left|x_0 = 0,\, y_0 = 0\right| =$$

$$= \left[x^3 + xe^{2y}\right]_0^x - \cos y\Big|_0^y + \tilde{N} = x^3 + xe^{2y} - \cos y + 1 + C =$$

$$= x^3 + xe^{2y} - \cos y + C_1 ,$$

где $C_1 = C + 1$, C_1 – произвольная постоянная.

Задание 6. Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S (3x - y + z)dS$, по поверхности S, где S – часть плоскости $P:\ x + z - 2y = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

Решение.

Из уравнения плоскости $z = 2 - x + 2y$ находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1 , \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

Найдем dS по формуле

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{6}dxdy.$$

Сводим вычисление поверхностного интеграла к вычислению двойного интеграла по области D, где D – треугольник AOB, являющийся проекцией поверхности S на плоскость xOy (рис. 2).

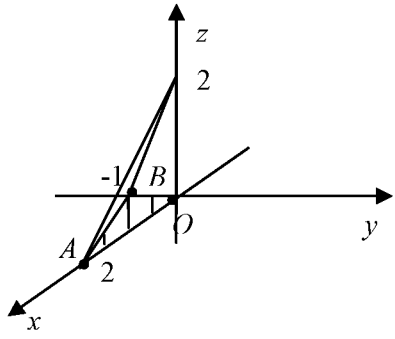


Рис. 2

$$\iint\limits_S (3x - y + z)dS = \iint\limits_D (3x - y + 2 - x + 2y)\sqrt{6}dxdy =$$

$$= \iint\limits_D (2x + y + 2)\sqrt{6}dxdy = \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{2+2y} (2x + y + 2)dx =$$

$$= \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0} dy(x^2 + (y+2)x)\Big|_0^{2+2y} = \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0}(4 + 8y + 4y^2 + 2y + 2y^2 +$$

$$+ 4 + 4y)dy = \sqrt{6}\int\limits_{-1}^{0}(6y^2 + 14y + 8)dy = \sqrt{6}(2y^3 + 7y^2 + 8y)\Big|_{-1}^{0} = 3\sqrt{6}.$$

Задание 7. Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint\limits_S z^2dydz - y^2dxdz + x^2dxdy$, где S − внутренняя сторона поверхности, ограниченная параболоидом $y = 4 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 3$.

Решение. Построим поверхность и ее проекцию на плоскость xOz (рис 3. и рис. 4).

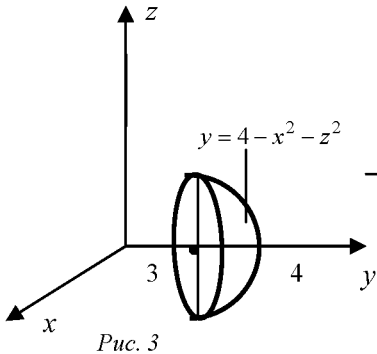


Рис. 3

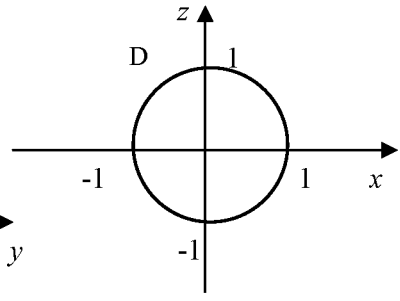


Рис. 4

Так как поверхность является замкнутой, применим формулу Остроградского-Гаусса, причем в этой формуле перед тройным интегралом ставим знак «–»:

$$\iint\limits_S z^2dydz - y^2dxdz + x^2dxdy =$$

$$= -\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right)\right]dxdydz = -\iiint\limits_V (0 - 2y + 0)dxdydz =$$

$$= 2\iiint\limits_V ydxdydz = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = y, & 0 \le r \le 1 \\ z = r\sin\varphi, & 3 \le y \le 4 - r^2 \\ \multicolumn{2}{c}{dxdydz = rdrd\varphi dy} \end{array} \right| = 2\iiint\limits_{V*} y \cdot rdrd\varphi dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rdr \int\limits_3^{4-r^2} ydy = 2 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int\limits_0^1 rdr \cdot \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_3^{4-r^2} = 2\pi\int\limits_0^1 rdr\left((4-r^2)^2 - 3^2\right) =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^1 rdr\left(16 - 8r^2 + r^4 - 9\right) = 2\pi\left(7\frac{r^2}{2} - 8\frac{r^4}{4} + \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{7}{2} - 2 + \frac{1}{6}\right) = \frac{10}{3}\pi.$$

МОДУЛЬ 13
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В результате изучения модуля студенты должны:
1) знать а) *понятия и определения*: векторная функция скалярного аргумента, годограф, скалярное поле, поверхности и линии уровня, векторное поле, векторные линии, операторы теории поля, градиент, дивергенция, ротор, оператор Гамильтона, производная функции по направлению; поток, циркуляция, теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса в теории поля; **б)** *характеризовать* скалярные и векторные поля; методы нахождения потока через замкнутую и разомкнутую поверхность, направление обхода контура; **в)** *моделировать* задачи геометрии, механики и физики, приводящие к определению траектории, скорости и ускорения движения материальной точки в пространстве.
2) уметь находить производную векторной функции скалярного аргумента, уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к годографу, линии и поверхности уровня скалярного поля, силовые линии векторного поля, основные операторы теории поля, производную функции по направлению; характеризовать физический смысл потока и циркуляции.

§ 1. ВЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

Определение. Если координаты вектора являются функциями некоторого параметра t

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{13.1}$$

то вектор $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ называется *переменным.*

Определение. Если каждому значению действительного параметра t соответствует определенный вектор $\vec{r}(t)$ трехмерного пространства, то $\vec{r}(t)$ называется *векторной функцией скалярного аргумента.*

Проведем вектор $\vec{r}(t)$ из начала координат. Тогда при изменении параметра t конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает некоторую линию L, которая называется *годографом векторной функции* $\vec{r}(t)$ (рис 13.1).

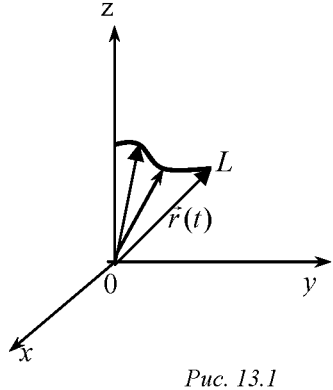


Рис. 13.1

Уравнение (13.1) является *параметрическим уравнением годографа.*

Пример 13.1. Годографом векторной функции

$$\vec{r}(t) = a\cos t \cdot \vec{i} + a\sin t \cdot \vec{j} + bt \cdot \vec{k},$$

где $a \neq 0, b \neq 0$ – постоянные, является винтовая линия.

В механике уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется *уравнением движения*, а годограф – *траекторией движения.*

Определение. Векторная функция $\vec{r}(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0, если она определена в окрестности точки t_0 и существует предел

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

Определение. *Производной* $\vec{r}'(t)$ *векторной функции* $\vec{r}(t)$ *по скалярному аргументу* t называется предел

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}.$$

Если функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – дифференцируемы по t, то производная от векторной функции $\vec{r}(t)$ равна

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Вектор производной $\vec{r}\,'(t)$ векторной функции $\vec{r}(t)$ направлен по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Поэтому в каждой точке $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ годографа функции $\vec{r}(t)$ вектор $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ является направляющим вектором касательной прямой, проведенной через точку M_0. Следовательно, *канонические уравнения касательной прямой* к годографу векторной функции $\vec{r}(t)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

где $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$.

Определение. Плоскость, перпендикулярная к касательной прямой и проходящая через точку касания M_0, называется *нормальной плоскостью годографа*.

Уравнение нормальной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ запишется в виде

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Пример 13.2. Электрон находится в постоянном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Траекторией движения (годографом) является винтовая линия, которая описывается уравнением (t – время)

$$\vec{r}(t) = \cos \pi t \cdot \vec{i} + \sin \pi t \cdot \vec{j} + 2t \cdot \vec{k}.$$

Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к траектории движения электрона в момент времени $t = 2\,c$.

Решение. Найдем производную векторной функции:

$$\vec{r}\,'(t) = -\pi \sin \pi t \cdot \vec{i} + \pi \cos \pi t \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}.$$

При $t = 2\,c$ получим $\vec{r}(2) = \vec{i} + 4 \cdot \vec{k}$, $\vec{r}\,'(2) = \pi \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k}$.

Запишем канонические уравнения касательной прямой:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{\pi}=\frac{z-4}{2}.$$

Уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$\pi y+2z-8=0.$$

Отметим, что вектор скорости электрона направлен по касательной к траектории движения, а вектор магнитной индукции $\vec{B}$ лежит в нормальной плоскости.

§ 2. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЕЙ

Определение. Если в каждой точке $M(x,y,z)$ некоторой области V пространства (или плоскости) определена скалярная функция $u=u(M)$, то говорят, что в области V задано *скалярное поле*

$$u=u(M)=u(x,y,z).$$

Примерами скалярных полей являются: поле температуры T внутри тела, поле потенциала φ электрического заряда, поле плотности ρ тела и т.д.

Простейшими геометрическими характеристиками скалярных полей являются поверхности и линии уровня.

Определение. *Поверхностью уровня (эквипотенциальной поверхностью)* скалярного поля $u=u(x,y,z)$ называется множество точек поля, в которых функция u принимает постоянное значение, т.е. $u(x,y,z)=C$, где $C=const$.

Для плоского скалярного поля $u=u(x,y)$ определяются *линии уровня* (*эквипотенциальные линии*), уравнения которых имеют вид $u(x,y)=C$, где $C=const$.

Пример 13.3. Найти эквипотенциальные поверхности ($\varphi=const$) точечного заряда q, помещенного в начало координат.

Решение. Потенциал поля точечного заряда определяется по формуле

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (13.2)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – электрическая постоянная, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от начала координат до точки, в которой определяется потенциал.

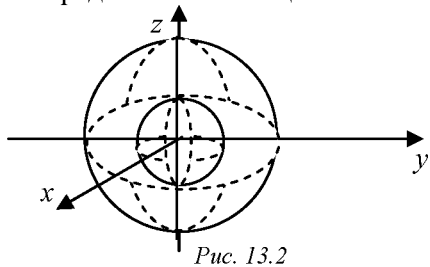


Рис. 13.2

Полагая в формуле (13.2) $\varphi = C = const$, получим уравнения поверхностей уровня

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r} = C \quad \Rightarrow \quad r = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 C} \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{13.3}$$

где $R = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 C} = const$. Из (13.3) следует, что эквипотенциальными поверхностями поля точечного заряда являются концентрические сферы с центром в начале координат (рис. 13.2).

Определение. Если в каждой точке $M(x, y, z)$ некоторой области V пространства (или плоскости) определен вектор

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

то говорят , что в области V задано *векторное поле*

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z).$$

Примерами векторных полей являются: поле скоростей $\vec{v}$ текущей жидкости, поле электрической напряженности $\vec{E}$, поле магнитной напряженности $\vec{H}$ и т.д.

Определение. *Векторной линией* векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ называется линия L, касательная к которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора $\vec{a}(M)$ (рис. 13.3).

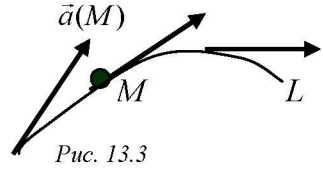


Рис. 13.3

Примерами векторных линий являются силовые линии магнитного поля, поля скоростей текущей жидкости и другие.

§ 3. ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ: $grad, div, rot$. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Важнейшими характеристиками скалярных и векторных полей являются градиент ($grad$) скалярного поля, дивергенция (div) и ротор (rot) векторного поля.

Определение. *Градиентом* дифференцируемого скалярного поля $u(M) = u(x, y, z)$ называется вектор

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Определение. *Дивергенцией* (или расходимостью) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ называется скаляр

$$div\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Определение. *Ротором* (или вихрем) дифференцируемого векторного поля $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ называется вектор

$$rot\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

который с помощью символической записи удобно представить в виде векторного произведения

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Операторы $grad$, div, rot называются *основными операторами теории поля*.

В качестве примеров использования указанных операторов приведем формулу связи напряженности $\vec{E}$ и потенциала φ электростатического поля: $\vec{E} = -grad\,\varphi$ и систему уравнений Максвелла для стационарного электромагнитного поля:

1. $rot\vec{E} = 0$. **3.** $div\vec{D} = \rho$.

2. $rot\vec{H} = \vec{j}$. **4.** $div\vec{B} = 0$.

Здесь $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей соответственно, $\vec{j}$ – вектор плотности электрического тока, $\vec{D}$ – вектор электрического смещения, $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции, ρ – плотность электрического заряда.

В математической и особенно физической литературе наряду с введенными операторами широко используется символический векторный дифференциальный *оператор набла (оператор Гамильтона)*:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Правила работы с оператором ∇ такие же, как и с обычными векторами.

Выразим операторы поля через оператор ∇. Найдем произведение вектора ∇ на скалярную функцию u:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = gradu.$$

Найдем скалярное произведение вектора ∇ на вектор $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\nabla\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\vec{a}.$$

Найдем векторное произведение вектора ∇ на вектор $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = rot\vec{a}.$$

Таким образом, справедливы формулы

$$grad u = \nabla u, \qquad div\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}, \qquad rot\vec{a} = \nabla \times \vec{a}.$$

Пример 13.4. Для вектора $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ найти

$$div\vec{a}, \quad rot\vec{a}, \; grad\,(div\,\vec{a}) \text{ и } div\,(rot\,\vec{a}).$$

Решение.

1. $div\,\vec{a} = \dfrac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \dfrac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(zx^2) = y^2 + z^2 + x^2 = u$,

2. $rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & yz^2 & zx^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}(zx^2) - \dfrac{\partial}{\partial z}(yz^2)\right) -$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(zx^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right) =$$

$$= \vec{i}\,(0 - y \cdot 2z) - \vec{j}\,(z \cdot 2x - 0) + \vec{k}\,(0 - x \cdot 2y) = -2yz\vec{i} - 2xz\vec{j} - 2xy\vec{k} = \vec{b},$$

3. $grad(div\,\vec{a}) = grad\,u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$,

4. $div(rot\vec{a}) = div\vec{b} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-2yz) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-2xz) + \dfrac{\partial}{\partial z}(-2xy) = 0 + 0 + 0 = 0.$

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ГРАДИЕНТА

Пусть функция $u(M) = u(x, y, z)$ определена в некоторой области V пространства.

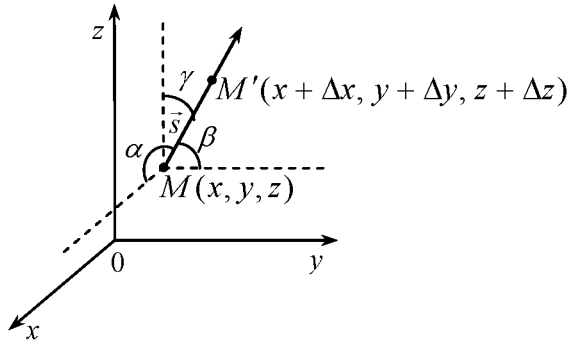


Рис.13. 4

Из заданной точки $M(x, y, z)$ проведем вектор $\vec{s}$. На луче, задаваемом вектором $\vec{s}$ и точкой M, отметим точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис.13.4). Расстояние между точками M и M' обозначим через Δs. Поэтому

$$\Delta s = |\overrightarrow{MM'}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Тогда при переходе из точки M в точку M' функция $u(x, y, z)$ получит приращение

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z).$$

Определение. Если существует предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta s}$, когда $\Delta s \to 0$, то он называется *производной функции* $u(x, y, z)$ в точке M *по направлению вектора* $\vec{s}$ и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial s}$, т.е. по определению

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x, y, z)}{\Delta s}.$$

Теорема 13.1. Если функция $u(x, y, z)$ дифференцируема в области V, то ее производная по любому направлению $\vec{s}$ существует в каждой точке области и равна

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\vec{s}$, т.е. координаты единичного вектора $\vec{s}_0$ направления

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \vec{s}_0.$$

С физической точки зрения производная по направлению характеризует скорость изменения функции в заданном направлении.

Физический смысл градиента

Вектор $grad\, u$ к каждой точке M скалярного поля $u(M)$ ортогонален поверхности уровня этого поля и указывает направление наиболее быстрого роста функции $u(M)$, а его величина $|grad\, u|$ дает скорость этого роста.

Связь градиента и производной по направлению описывает следующая

Теорема 13.2. Производная функции u по направлению вектора $\vec{s}$ равна проекции $gradu$ на это направление, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = np_{\vec{s}}\, gradu\,.$$

Действительно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = gradu \cdot \vec{s}_0 = |gradu| \cdot |\vec{s}_0| \cdot \cos\varphi = |gradu| \cdot \cos\varphi = np_{\vec{s}} gradu,$$

где φ - угол между векторами $gradu$ и $\vec{s}_0$.

Пример 13.5. Вычислить производную функции

$$u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$$

по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ в точке $M(1, 0, -1)$.

Решение. Найдем частные производные функции u и вычислим их значения в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2x + yz\Big|_M = \frac{2}{1+0} + 0 = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2} 2y + xz\Big|_M = 0 + 1 \cdot (-1) = -1, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 + xy\Big|_M = 0.$$

Вычислим длину и направляющие косинусы вектора $\vec{s}$:

$$|\vec{s}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3, \qquad \vec{s}_0=\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Следовательно, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$.

Производную по направлению найдем по формуле

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=2\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{1}{3}+0\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1.$$

§ 5. ПРОСТЕЙШИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

К простейшим векторным полям относятся: соленоидальное, потенциальное и гармоническое.

Определение. Векторное поле $\vec{u}(M)$ называется *соленоидальным* или *трубчатым*, если во всех точках поля

$$div\,\vec{a}(M)=0.$$

Соленоидальное поле не имеет ни источников, ни стоков, его векторные линии замкнуты. Поскольку $div\,\vec{B}=0$, то поле вектора магнитной индукции является соленоидальным.

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным* или *безвихревым*, если во всех точках поля

$$rot\,\vec{a}(M)=0.$$

Вычислим ротор векторного поля

$$rot\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием потенциальности поля $\vec{a}(M)$ является выполнение равенств

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Эти равенства дают также необходимые условия того, что выражение

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

являлось полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y, z)$, называемой *потенциалом* векторного поля $\vec{a}(M)$.

Для потенциального векторного поля $\vec{a}(M)$ всегда найдется такая скалярная функция $u(M)$ (потенциал векторного поля $\vec{a}(M)$), что $\vec{a}(M) = grad\, u(M)$.

Потенциал векторного поля $\vec{a}(M) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ можно найти по формуле

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz\,, \qquad (13.4)$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка поля, в которой функции P, Q, R определены.

Определение. Векторное поле называется *гармоническим*, если во всех точках поля

$$div\vec{a}(M) = 0 \text{ и } rot\vec{a}(M) = 0,$$

т.е. поле является соленоидальным и потенциальным.

Потенциал u гармонического поля удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Пример 13.6. Показать, что векторное поле

$$\vec{a} = (y^2 + z^2)x\vec{i} + (x^2 + z^2)y\vec{j} + (x^2 + y^2)z\vec{k}$$

является потенциальным и найти его потенциал u.

Решение.

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (y^2+z^2)x & (x^2+z^2)y & (x^2+y^2)z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2z+y^2z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y+z^2y\right)\right)-$$

$$-\vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2z+y^2z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(y^2x+z^2x\right)\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+z^2y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2x+z^2x\right)\right)=$$

$$=\vec{i}\,(0+2yz-0-2zy)-\vec{j}\,(2xz+0-0-2zx)+\vec{k}\,(2xy+0-2yx-0)=0.$$

Следовательно, векторное поле является потенциальным.

Потенциал u поля найдём по формуле (13.4):

$$u=\int_{x_0}^{x}(y_0{}^2+z_0^2)xdx+\int_{y_0}^{y}(x^2+z_0{}^2)ydy+\int_{z_0}^{z}(x^2+y^2)zdz+C.$$

Полагая в последней формуле $x_0=y_0=z_0=0$ (в точке $M_0(0,0,0)$ все подынтегральные функции непрерывны), находим

$$u=0+\int_0^y x^2ydy+\int_0^z(x^2+y^2)z\mathrm{d}z=x^2\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^y+(x^2+y^2)\frac{z^2}{2}\bigg|_0^z+C=$$

$=\dfrac{1}{2}(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+C$, где C – произвольная постоянная.

Пример 13.7. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=(zy+1)\vec{i}+(xz-2)\vec{j}+(xy+1)\vec{k}$ гармоническим.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ является гармоническим, если оно является соленоидальным и потенциальным, то есть в каждой точке М поля выполняются равенства $div\,\vec{a}(M)=0$ и $rot\vec{a}(M)=0$.

Найдем операторы:

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial}{\partial x}(zy+1)+\frac{\partial}{\partial y}(xz-2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy+1)=0+0+0=0,$$

$$rot\vec{a}(M)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ zy+1 & xz-2 & xy+1 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz-2 & xy+1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ zy+1 & xy+1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ zy+1 & xz-2 \end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(x-x)-\vec{j}(y-y)+\vec{k}(z-z)=0\,.$$

Таким образом, поле является гармоническим.

Пример 13.8. Рассмотрим магнитное поле $\vec{H}$, создаваемое электрическим током силой I, проходящим по бесконечному длинному прямолинейному проводу.

Располагая провод по оси Oz, имеем

$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\vec{i}+x\vec{j})=\frac{I}{2\pi}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\right).$$

Найдем дивергенцию и ротор поля $\vec{H}$.

$$div\vec{H}=\frac{I}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]=\frac{I}{2\pi}\left[\frac{y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{x\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]=0$$

$$rot\vec{H}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{I}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{I}{2\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix}=\left(0-\frac{I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)\vec{i}-$$

$$-\left(0+\frac{I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)\vec{j}+\left(\frac{I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{I}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)\vec{k}=$$

$$=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+\frac{I}{2\pi}\left(\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\vec{k}=$$

$$=\frac{I}{2\pi}\left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\vec{k}=0.$$

Следовательно, магнитное поле вектора $\vec{H}$ является гармоническим.

§ 6. ПОТОК ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ И ЕГО ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Пусть S – гладкая ориентированная поверхность, в каждой точке которой определено непрерывное векторное поле

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}\ .$$

Обозначим через $\vec{n}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ единичный вектор нормали к поверхности S.

Определение. *Потоком векторного поля* $\overline{a}(M)$ через поверхность S в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}_0$ к S называется поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi=\iint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}_0 dS.$$

Из определения следует, что *при изменении направления нормали на противоположное поток* Π *меняет знак.*

Физический смысл потока

Пусть $\overline{a}(M)$ – некоторое поле скоростей текущей несжимаемой жидкости, протекающей через поверхность S в направлении единичной нормали $\vec{n}_0$ за единицу времени

Пусть $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{n}_0)$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}_0$. Если угол φ – острый, то скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 > 0$ и поток $\Pi > 0$. Если угол φ – тупой, то поток $\Pi < 0$. В частности, если поверхность S – замкнута и ограничивает область V пространства, то при $\Pi > 0$ из области V вытекает больше жидкости, чем втекает, т.е. внутри области V имеется *источник*. При $\Pi < 0$ из области V вытекает меньшее количество жидкости, чем втекает, т.е. в области V имеется *сток*. При $\Pi = 0$ в область V втекает столько же жидкости, сколько вытекает.

Поток векторного поля скоростей несжимаемой жидкости есть разность между количеством жидкости, вытекающей из объема и втекающей в этот объем за единицу времени.

Примеры потоков векторных полей

1. Поток электрического поля точечного заряда напряженностью $\vec{E}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую этот заряд, равен

$$\Phi_e = \iint\limits_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint\limits_S E_n \mathrm{d}S .$$

2. Поток магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ через поверхность S равен

$$\Phi_m = \iint\limits_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint\limits_S B_n dS .$$

§ 7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть гладкая поверхность S однозначно проектируется в область D_{xy} плоскости xOy. В этом случае уравнение поверхности можно записать в виде

$$S: \quad z = f(x, y) .$$

Вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности $z = f(x, y)$ определяем по формуле:

$$\vec{n} = \pm(-f'_x, -f'_y, 1),$$

которую можно переписать в виде

$$\vec{n} = \pm grad\left[z - f(x, y)\right],$$

знак «+» или «−» выбирается в зависимости от того, острый или тупой угол образует $\vec{n}$ с осью Oz.

С другой стороны, элемент площади поверхности dS равен:

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dxdy = |\vec{n}|dxdy.$$

Поскольку единичный вектор нормали $\vec{n}_0 = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, то

$$\vec{n}_0 dS = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot |\vec{n}|dxdy = |\vec{n}|dxdy.$$

Поэтому поток векторного поля можно найти по формуле:

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{d}S = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS = \iint\limits_{D_{xy}} \vec{a} \cdot \vec{n} \Big|_{z=f(x,y)} dxdy,$$

где $\vec{n} = \pm grad\left[z - f(x, y)\right]$, D_{xy} – проекция S на плоскости xOy.

Если же уравнение поверхности S можно записать в виде $y = \varphi(x, z)$, или $x = \psi(y, z)$, то поток будет находиться по формулам:

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} \vec{a} \cdot \vec{n} \Big|_{y=\varphi(x,z)} dxdz, \quad \text{где } \vec{n} = \pm grad\left[y - \varphi(x, z)\right],$$

$$\Pi = \iint\limits_{D_{yz}} \vec{a} \cdot \vec{n} \Big|_{x=\psi(y,z)} dydz, \quad \text{где } \vec{n} = \pm grad\left[x - \psi(y, z)\right],$$

D_{xz}, D_{yz} – проекции S на плоскости xOz и yOz соответственно.

Пример 13.9. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $y = x^2 + y^2$, отсекаемого плоскостями $x = 0$ $(x \geq 0)$, $y = 1$. Вектор нормали образует тупой угол с осью Oy.

Решение.

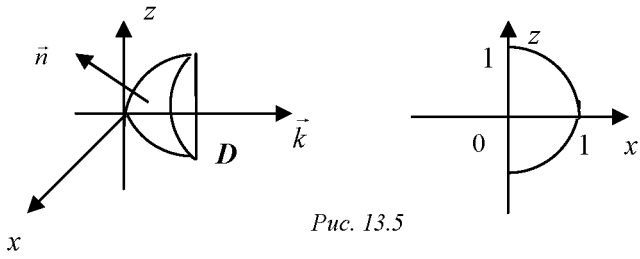


Рис. 13.5

Скалярный поток векторного поля определим по формуле

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{D_{xz}} \vec{a}\cdot\vec{n}\Big|_{y=x^2+z^2} dxdz.$$

Так как угол между вектором $\vec{n}$ и осью Oy − тупой, то перед градиентом ставим знак «−» и

$$\vec{n} = -grad(y - x^2 - z^2) = 2x\vec{i} - \vec{j} + 2z\vec{k},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = x^2\cdot 2x - x\cdot 1 + xz\cdot 2z = 2x^3 - x + 2xz^2.$$

Следовательно,

$$\Pi = \iint\limits_{D_{xz}} (2x^3 - x + 2xz^2)dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} x(2(x^2+z^2)-1)dxdz =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi, -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ z = r\sin\varphi, 0 \le r \le 1 \\ dxdz = rdrd\varphi \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 r\cdot\cos\varphi(2r^2-1)\cdot r\cdot dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int\limits_0^1 (2r^4 - r^2)dr = \sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{2r^5}{5} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = (1+1)\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{15}.$$

§ 8. ЦИРКУЛЯЦИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим непрерывное векторное поле

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

определенное в каждой точке гладкой замкнутой кривой L.

Определение. *Циркуляцией* C векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутой кривой L называется криволинейный интеграл второго рода

$$C = \oint_L \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

Если кривая L лежит в плоскости xOy, то направление обхода против часовой стрелки считается *положительным*, а по часовой – *отрицательным*.

Примеры циркуляций векторных полей

1. Циркуляция вектора силы $\vec{F}$ вдоль замкнутого контура L равна работе A этой силы

$$C = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = A.$$

2. Циркуляция вектора напряженности $\vec{E}$ элетрического поля вдоль контура L равна э.д.с., возникающей в этом контуре

$$C = \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varepsilon.$$

3. Циркуляция вектора напряженности $\vec{H}$ магнитного поля вдоль контура L равна силе тока в этом контуре

$$C = \oint_L \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = i.$$

Пример 13.10. Материальная точка массой m движется по эллипсу L:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в положительном направлении под действием переменной силы $\vec{F} = m\varepsilon(-y\vec{i} + x\vec{j})$, где ε – угловое ускорение.

Вычислить циркуляцию вектора $\vec{F}$ вдоль контура L.

Решение. Запишем параметрические уравнения эллипса

$$L: \begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Циркуляция вектора $\vec{F}$ вдоль контура L равна

$$C=\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{l}=m\varepsilon\oint_L -ydx+xdy=\left|\begin{matrix} x=a\cos t, & dx=-a\sin tdt, \\ y=b\sin t, & dy=b\cos tdt, 0\le t\le 2\pi \end{matrix}\right|=$$

$$=m\varepsilon\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t+ab\cos^2 t)\mathrm{d}t=mab\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi mab\varepsilon=A,$$

где A – работа силы $\vec{F}$ вдоль контура L.

§ 9. ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА И СТОКСА В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Пусть векторная функция

$$\vec{a}(M)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

непрерывна вместе со своими частными производными в области V пространства, ограниченной замкнутой поверхностью S. Тогда справедлива

Теорема Остроградского-Гаусса. Поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность S в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному поверхностью S, т.е.

$$\iint_S \vec{a}\cdot d\vec{S}=\iiint_V div\vec{a}dV.$$

Рассмотрим, как формулируется теорема Остроградского-Гаусса в электростатистике.

Пусть заряженное тело V с объемной плотностью заряда ρ ограничено гладкой замкнутой поверхностью S.

Из первого уравнения Максвелла следует: $div\vec{D}=\rho$.

Тогда поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ равен

$$\iint_S \vec{D}d\vec{S}=\iiint_V div\vec{D}dV=\iiint_V \rho dV=\rho V=q,$$

где $q=\sum q_{св}$ – сумма свободных зарядов, находящихся внутри поверхности S.

Таким образом, получили *теорему Остроградского-Гаусса в интегральной форме* :

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{св} \ ,$$

т.е. *поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности.*

Пример 13.11. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 4$ в направлении внешней нормали.

Решение. Построим заданную поверхность S и ее проекцию D на плоскость xOz (рис. 13.6 и 13.7).

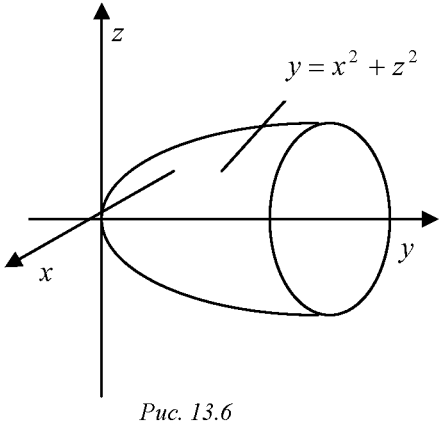


Рис. 13.6

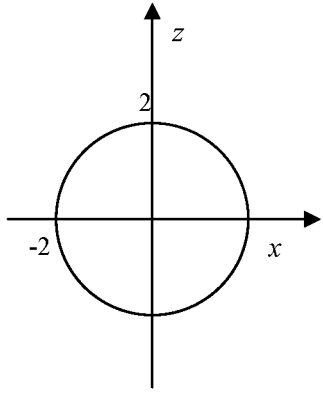


Рис. 13.7

Так как поверхность S является замкнутой, то при вычислении потока вектора воспользуемся формулой Остроградского-Гаусса:

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V div\vec{a} \cdot dV =$$

$$= \left| div\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 - 1 + 1 = 1 \right| = \iiint_V dxdydz =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi \\ y=y, & 0\le r\le 2 \\ z=r\sin\varphi, & r^2\le y\le 4 \\ \multicolumn{2}{c}{dxdydz=rdrd\varphi dy} \end{array}\right| = \iiint\limits_V rdrd\varphi dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 rdr\cdot y\Big|_{r^2}^4 =$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\int\limits_0^2 r(4-r^2)dr = 2\pi\cdot\int\limits_0^2(4r-r^3)dr = 2\pi\left(4\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=2\pi\left(2\cdot 4-\frac{16}{4}\right)=2\pi(8-4)=8\pi.$$

Пусть векторное поле $\vec{a}(M)=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ задано в некоторой области V пространства, содержащей кусочно – гладкую поверхность S, краем которой является кусочно - гладкая кривая L. За положительное направление обхода кривой L принимается направление, при котором положительная сторона поверхности S остается слева.

Предположим, что функции P,Q,R имеют непрерывные частные производные в области V. Тогда имеет место следующая теорема, связывающая криволинейный и поверхностный интегралы.

Теорема Стокса. Циркуляция векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль замкнутого контура L равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность S, ограниченную этим контуром, т.е.

$$\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_S rot\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Пример 13.12. С помощью формулы Стокса вычислить циркуляцию вектора $\vec{a}=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$ по контуру L треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x+3y+z=3$ с координатными плоскостями при положительном направлении обхода относительно вектора нормали $\vec{n}=(1,3,1)$ этой плоскости.

Решение. Выберем в качестве поверхности S с границей L часть плоскости $x+3y+z=3$, заключенной в первом октанте (рис. 13.8).

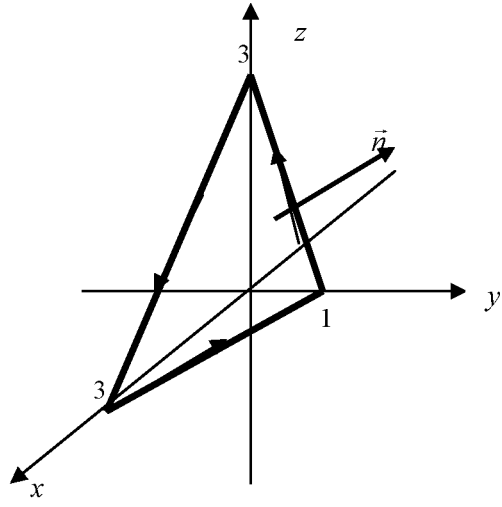


Рис. 13.8

Найдем ротор вектора $\vec{a}$:

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x & y+z & x-z\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y+z & x-z\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 3x & x-z\end{vmatrix}+$$

$$+\vec{k}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ 3x & y+z\end{vmatrix}=\vec{i}\,(0-1)-\vec{j}\,(1-0)+\vec{k}\,(0-0)=-\vec{i}+\vec{j}\,.$$

По теореме Стокса

$$C=\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{l}=\iint_S rot\,\vec{a}\cdot d\vec{S}=\iint_S -dydz+dxdz=-\iint_S dydz+\iint_S dxdz=$$

$$=-S_{\Delta BOC}+S_{\Delta AOC}=-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=-\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

§ 10. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИВЕРГЕНЦИИ И РОТОРА

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(M)$ скоростей текущей жидкости или газа. Пусть M – некоторая точка поля, окруженная замкнутой поверхностью S, которая охватывает пространственную область объемом V. Тогда поток Π поля через границу S, в силу закона сохранения массы, возникает за счет источников и стоков и равен их суммарной интенсивности. Будем стягивать объем V в точку и вычислим предел

$$\lim_{V\to 0}\frac{\Pi}{V}=\lim_{V\to 0}\frac{\iint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S}}{V},$$

который характеризует мощность потока в точке M.

По теореме Остроградского-Гаусса можно доказать, что

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S}=div\vec{a}(M).$$

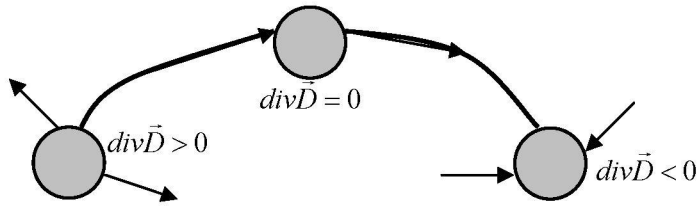
Таким образом, $div\vec{a}(M)$ *векторного поля* $\vec{a}(M)$ *есть интенсивность источника или стока, находящегося в точке* M.

Если $div\vec{a}(M)>0$, то в точке M находится источник (из точки исходят векторные линии);

если $div\vec{a}(M)<0$, то в точке M – сток (в точку M входят векторные линии);

если $div\vec{a}(M)=0$, то в точке M нет ни источников, на стоков.

В каждой точке M поля, создаваемого вектором электрического смещения $\vec{D}$, согласно третьему уравнению Максвелла $div\vec{D}=\rho_{св}$, где $\rho_{св}$ – объемная плотность свободных зарядов в точке M.



источник (положительный заряд) сток (отрицательный заряд)

Рис. 13.9

Если $\rho > 0$, то из бесконечно малого объема, окружающего точку M, линии вектора $\vec{D}$ исходят, а если $\rho < 0$, то линии вектора $\vec{D}$ входят (рис. 13.9).

Из четвертого уравнения Максвелла $div\vec{B} = 0$ следует, что в магнитном поле нет ни источников, ни стоков линий вектора магнитной индукции $\vec{B}$, т.е. линии вектора $\vec{B}$ являются замкнутыми.

Пусть M – некоторая точка векторного поля $\vec{a}(M)$, а $\vec{n}_0$ – произвольный единичный вектор.

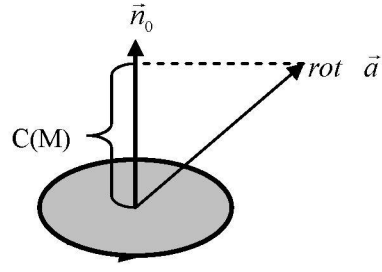


Рис. 13.10

Рассмотрим плоскую площадку с границей L площади S, содержащей точку M и расположенную перпендикулярно вектору $\vec{n}_0$ (рис. 13.10). Найдем предел отношения циркуляции C поля вдоль положительного направления контура L, когда площадка S стягивается в точку M, т.е.

$$C(M)=\lim_{S\to 0}\frac{C}{S}=\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

Величина $C(M)$ называется *плотностью циркуляции векторного поля* $\vec{a}(M)$ и характеризует вращательную способность поля в точке M. С помощью теоремы Стокса можно доказать, что

$$C(M)=\lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_L \vec{a}\cdot d\vec{S}=np_{\vec{n}_0}rot\vec{a}(M).$$

Так как $np_{\vec{n}_0}rot\vec{a}(M)=\left|rot\vec{a}\right|\cos\varphi$, то плотность циркуляции принимает наибольшее значение при $\varphi=0$.

Таким образом, $rot\vec{a}(M)$ *указывает направление, в котором плотность циркуляции максимальна и* $\max C(M)=\left|rot\vec{a}(M)\right|$.

Кроме того, $rot\vec{a}(M)$ в каждой точке поля $\vec{a}(M)$ дает возможность найти мгновенную ось вращения окрестности этой точки, величину мгновенной угловой скорости и направление вращения вокруг мгновенной оси.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

1. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к кривой $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\vec{i} + (1 - \cos t)\vec{j} + 4\sin\frac{t}{2}\vec{k}$ в точке $t_0 = \pi$.

2. Найти производную функции $u = xyz - \frac{x}{z}$ в точке $M_0(-4, 3, -1)$ по направлению вектора $\vec{s} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

3. Дана функция $u = x^2y + y^2z + z^2x$ и точки $M_1(1;-1;2)$, $M_2(3;4;-1)$. Найти: **а)** $grad\, u(M_1)$; **б)** производную в точке M_1 по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

4.Найти $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$, если $\vec{a}(M) = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$.

5. Вычислить $div\,\mathrm{grad}\,u$, если $u = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$.

6. Проверить, является ли векторное поле

$$\vec{a}(M) = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$$

гармоническим.

7. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y\vec{i} + 2xy\vec{j}$ по контуру эллипса L: $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ в отрицательном направлении.

8. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ по контуру L: $x^2 = y^2 + z^2$, $x = 3$ в отрицательном направлении относительно орта $\vec{i}$.

9. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + xy\vec{k}$ в точке $M_0(2, 3, 1)$.

10. Доказать, что векторное поля $\vec{a}(M)$ является потенциальным и найти его потенциал:

а) $\vec{a}(M) = (2xy + z)\vec{i} + (x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k}$;

б) $\vec{a}(M) = y\cos z\vec{i} + x\cos z\vec{j} - xy\sin z\vec{k}$.

11. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z + 2 = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 2$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

12. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = 2x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}$ через поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ в направлении внешней нормали.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Дана функция $u = x^2 + xyz + y^2 \ln z$ и точки $M_1(-1;0;1)$, $M_2(1;1;3)$. Найти: **а)** $grad\, u(M_1)$; **б)** производную в точке M_1 по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Задано векторное поле $\vec{a} = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$. Найти $div\ \vec{a}$ и $grad\, div\ \vec{a}$.

3. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ гармоническим.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ по контуру L: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x = 1$, в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 2

1. Дана функция $u = \ln\left(x^3 + y^3 + z + 1\right)$ и точки $M_1(1;3;0)$, $M_2(-4;1;3)$. Найти: **а)** $grad\, u(M_1)$; **б)** производную в точке M_1 по направлению вектора $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Задано векторное поле $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3z\vec{j} + xz^2\vec{k}$. Найти $div\ \vec{a}$ и $grad\, div\ \vec{a}$.

3. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a} = 2xy\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$ потенциальным.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ по контуру $L:\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ \ z = 1$ в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Домашнее задание

1. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к кривой $\vec{r}(t) = \sin t\vec{i} + \cos^2 t\vec{j} + \cos t \cdot \sin t\vec{k}$ в точке $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

2. Найти производную функции $u = y^2z - 2xy + z^2$ в точке $M_0(3, 1, -1)$ по направлению $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1(-2, 1, 4)$.

3. Вычислить $div\,\mathrm{grad}\,u$, если $u = x^2y^3z$.

4. Доказать, что векторное поля $\vec{a}(M)$ является потенциальным и найти его потенциал $\vec{a}(M) = y\cos z\vec{i} + x\cos z\vec{j} - xy\sin z\vec{k}$.

5. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = 2yz\vec{i} + 2xz\vec{j} - x^2\vec{k}$ гармоническим.

6. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ по контуру $L:\ \ x^2 + y^2 = 9,\ \ z = 1$, в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ ПО МОДУЛЮ № 13

1⁰. Если $u = u(x, y, z)$ – скалярное поле, то выражение $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ задает

а) ротор; **б)** дивергенцию;
в) градиент; **г)** производную по направлению.

2⁰. Векторное поле $\vec{a}(M)$ во всех точках которого выполняется условие $div\,\vec{a}(M) = 0$, называется

а) гармоническим ; **б)** скалярным;
в) соленоидальным; **г)** потенциальным.

3. Если $u = u(x, y, z)$ -скалярное поле, то $grad\ u$ показывает

а) направление наибольшего изменения поля;
б) направление наименьшего изменения поля;
в) направление постоянства поля;
г) скорость изменения поля.

4. Циркуляция силы $\vec{F}$ вдоль замкнутой линии L представляет собой:

а) мощность $\vec{F}$; **б)** работу силы $\vec{F}$;
в) момент силы $\vec{F}$; **г)** плечо силы $\vec{F}$.

5.Если $u = u(x, y, z)$ – скалярное поле, то $div\left(grad\,u\right)$ есть

а) скалярное поле; **б)** векторное поле;
в) скалярно-векторное поле; **г)** оператор не определен.

6.Если $\vec{a}(M)$ – векторное поле, то $rot\,\vec{a}(M)$ находится по формуле

а) $\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ P & Q & R \end{vmatrix}$; **б)** $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$; **в)** $\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial Q}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\vec{k}$;

г) $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

7*. Производная функции $u = xy^2z^3$ по направлению вектора $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ в точке $M_0(1;1;1)$ равна

а) $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + 2\vec{k}$; **б)** $\frac{\partial u}{\partial s} = 3$; **в)** $\frac{\partial u}{\partial s} = 1$; **г)** $\frac{\partial u}{\partial s} = \vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$.

8*. Если $\vec{a} = yz\vec{i}$, то $rot\,\vec{a}$ равен

а) $y\vec{j} - z\vec{k}$; **б)** 0; **в)** $z\vec{j} - y\vec{k}$; **г)** $y + z$.

ИДЗ 13

Вариант 1

1. Для заданного скалярного поля $u = x^2y^3z + xz^2$ в заданной точке $M_0(1, 2, 1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$;.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} - z\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 4$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = z\vec{i} + y^2\vec{j} - \vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} y = 4 - x^2 - z^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{j}$.

Вариант 2

1. Для заданного скалярного поля $u = x^3y^2z + yz^3$ в заданной точке $M_0(-1, 1, 1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = x^2(z-y)\vec{i} + y^2(x-z)\vec{j} + z^2(y-x)\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + z^2\vec{j} - y^2\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $z = 1 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = xy\vec{i} + 2xz\vec{j} - y^2\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} y^2 + z^2 = 25, \\ x = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 3

1. Для заданного скалярного поля $u = 2xy^2 + z^3$ в заданной точке $M_0(1, 0, -2)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $y = 4 - x^2 - z^2$ и плоскостью $y = 3$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} - xy\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 4

1. Для заданного скалярного поля $u = 3xy^2z + x^2z$ в заданной точке $M_0(1, -2, 1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = xy^2\,\vec{i} + x^2y\,\vec{j} + \vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и параболоидом $z = 2 - x^2 - y^2$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x^2 - y)\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + \vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 5

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2z + 2xy^2$ в заданной точке $M(2, -2, -1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = xz\,\vec{i} - y\,\vec{j} + zx^2\,\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $y^2 = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 2$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + (z + y)\,\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 6

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2z + 3y^2 - z^3$ в заданной точке $M_0(-1, -2, -1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = x^2(y-z)\vec{i} + y^2(z-x)\vec{j} + z^2(x-y)\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $x^2 = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 7

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2 + 2xy + 4xz + 2yz$ в заданной точке $M_0(2, 2, 0)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} - z^2\vec{k}$ гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 4$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$

вдоль контура

$$L: \begin{cases} y^2 + z^2 = 4, \\ x = 0, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 8

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2 - y^2 + 3z^2 + 4yz$ в заданной точке $M_0(1, -2, 0)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = x^2 y\vec{i} + xy^2\vec{j} - 4xyz\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + 3y\vec{j} + z^3\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $y = x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 2$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} - xz\vec{j} + 2xy\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 1, \end{cases}$$

в отрицательном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 9

1. Для заданного скалярного поля $u = 3z^2 + 4xz + 5yz$ в заданной точке $M_0(1, 2, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = x^2 z\vec{i} - 4xyz\vec{j} + xz^2\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 1$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2yz\vec{i} + xz\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 3, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 10

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz$ в заданной точке $M(-2, 2, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = 4xyz\vec{i} - zy^2\vec{j} - yz^2\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $x^2 = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 2$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xy\vec{j} + xz\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} y = x^2 + z^2, \\ y = 4, \end{cases}$$

в отрицательном направлении относительно орта $\vec{j}$.

Вариант 11

1. Для заданного скалярного поля $u = x^2y^2z^2 + 2xy$ в заданной точке $M_0(-1, -1, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = xz\vec{i} - yz\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 9$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 12

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2 - 3y^2 + 3xz^2$ в заданной точке $M_0(-1, 2, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = xy\vec{i} - (x+z)\vec{j} - yz\vec{k}$ гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = (2y - z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + x\vec{k}$ через поверхность пирамиды, образованной плоскостью $x + 2y + 2z = 4$ и координатными плоскостями, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 = y^2 + z^2, \\ x = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 13

1. Для заданного скалярного поля $u = y^2 + 2z^2 - 3xy + 4xz - 5yz$ в заданной точке $M(1,1,1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} - 2xy\vec{j} + 2xz\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $y = 4 - x^2 - z^2$, осеченного плоскостью $y = 0$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2yz\vec{i} + 2xz\vec{j} - x^2\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 1, \end{cases}$$

в отрицательном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 14

1. Для заданного скалярного поля $u = 3x^2y + 3xy^2 + 2z^3$ в заданной точке $M_0(0,1,1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = 2xy\vec{i} - (x^2 + z^2)\vec{j} - 2yz\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $y = 1 - x^2 + z^2$ и плоскостью $y = 0$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3z\vec{j} + 4x\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 15

1. Для заданного скалярного поля $u = 2x - y^3z^2$ в заданной точке $M_0(2, 0, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

2. Выяснить, является ли векторное поле

$$\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - 2(x + y)z\vec{k}$$

гармоническим.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2y\vec{i} - \vec{j} - 2yz\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z + 2 = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 16

1. Для заданного скалярного поля $u = \ln(1 + xy^2) + yz$ в заданной точке $M_0(0, 2, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = \left(y^2 + z^2\right)\vec{i} + 2xy\vec{j} + 2xz\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + z^2\vec{j} - y^2\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $z^2 = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 3$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 4, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 17

1. Для заданного скалярного поля $u = xz^2 + \ln(x + yz)$ в заданной точке $M_0(2, 2, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = 2xy\vec{i} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{j} + 2yz\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z = 9 - x^2 - y^2$, отсеченного плоскостью $z = 0$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y^2z\vec{i} - xz^2\vec{j} - xy^2\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 = y^2 + z^2, \\ x = 3, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 18

1. Для заданного скалярного поля $u = \ln(1 + xy^2z^3)$ в заданной точке $M_0(1, 1, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -11\vec{i} + 10\vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} + \left(x^2 + y^2\right)\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности, параболоида $z + 1 = x^2 + y^2$, осеченного плоскостью $z = 3$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2y\vec{i} - x\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 19

1. Для заданного скалярного поля $u = zy^2 + \ln(x^2 + y)$ в заданной точке $M_0(-2, 2, 2)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = yz^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = z\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $y = x^2 + z^2$, отсеченного плоскостью $y = 4$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{j}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = z^2\vec{i} + y\vec{j} - 2xy\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 20

1. Для заданного скалярного поля $u = x\ln z + z\ln y$ в заданной точке $M_0(2, 1, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + yz^2\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a}=\frac{1}{x}\vec{i}+\frac{1}{y}\vec{j}+\vec{k}$ через верхнюю половину шара $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a}=yz\,\vec{i}+x^2\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ вдоль контура

$$L:\begin{cases} y^2=x^2+z^2, \\ y=2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{j}$.

Вариант 21

1. Для заданного скалярного поля $u=x(y^2+z^2)$ в заданной точке $M_0(2,1,1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a}=6xy\vec{i}+\left(3x^2-2y\right)\vec{j}+z\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a}=x^3\,\vec{i}+y^3\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидами $z=x^2+y^2$, $2-z=x^2+y^2$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a}=yz\,\vec{i}+x^2\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$ вдоль контура

$$L:\begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 22

1. Для заданного скалярного поля $u=2x^2yz$ в заданной точке $M_0(-2,1,1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s}=-4\vec{j}+3\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a}=\left(2xy+z\right)\vec{i}+\left(x^2-2y\right)\vec{j}+x\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = xy^2\,\vec{i} + x^2 y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $z = 5 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 2$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y\,\vec{i} - z\,\vec{j} + (z + y)\,\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 = y^2 + z^2, \\ x = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 23

1. Для заданного скалярного поля $u = xyz^2$ в заданной точке $M_0(2, 2, 1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = 2xyz\vec{i} + x^2 z\vec{j} + x^2 y\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $x = 4 - y^2 - z^2$, отсеченного плоскостью $x = 0$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{i}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + y^2\,\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases}$$

в отрицательном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 24

1. Для заданного скалярного поля $u = x^2(y^2 + z)$ в заданной точке $M_0(-2, -1, -1)$ найти а) $grad\,u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = (yz + 1)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z - 2 = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 1$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + 2xy\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 4, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 25

1. Для заданного скалярного поля $u = z^2(x^2 - y)$ в заданной точке $M_0(1, 1, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

2. Показать, что векторное поле $\vec{a} = y\cos z\vec{i} + x\cos z\vec{j} - xy\sin z\vec{k}$ является потенциальным и найти его потенциал.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ через поверхность, ограниченную параболоидом $z = 5 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 1$, в направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 26

1. Для заданного скалярного поля $u = z^2(y + x)$ в заданной точке $M_0(2, -1, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - 11\vec{j} + 10\vec{k}$.

2. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ в заданной точке $M_0(1, -1, 1)$.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$ через часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 1$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x^2 - y)\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 27

1. Для заданного скалярного поля $u = y^2(z + x)$ в заданной точке $M_0(1, -1, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

2. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = x^2 z\vec{i} - 2xyz\vec{j} - xz^2\vec{k}$ в заданной точке $M_0(1, 1, -1)$.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} - 2xy\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсеченного плоскостью $z = 9$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ z = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Вариант 28

1. Для заданного скалярного поля $u = xy^2 - yz^2$ в заданной точке $M(1, 1, 2)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

2. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + (x + y)\vec{k}$ в заданной точке $M_0(5, 4, 3)$.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $y = x^2 + z^2$, отсеченного плоскостью $y = 4$ (нормаль образует острый угол с ортом $\vec{j}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{i}$.

Вариант 29

1. Для заданного скалярного поля $u = x^2 y + 3y^2 z - z^2$ в заданной точке $M_0(2, 1, 1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = 11\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$.

2. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = x^2 yz\vec{i} + xy^2 z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ в заданной точке $M_0(1, 2, -1)$.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} + x\vec{k}$ через поверхность, ограниченную конусом $x^2 = y^2 + z^2$ и плоскостью $x = 4$, в направлении внутренней нормали.

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = (z - x)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ y = 1, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{j}$.

Вариант 30

1. Для заданного скалярного поля $u = 2x^2 yz^3$, в заданной точке $M(1, 2, -1)$ найти а) $grad\, u(M_0)$; б) производную по направлению вектора $\vec{s} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

2. Найти наибольшую плотность циркуляции векторного поля $\vec{a} = (y^2 + z^2)\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ в заданной точке $M_0(1, 4, 3)$.

3. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z = 2 - x^2 - y^2$, отсеченного плоскостью $z = 1$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{k}$).

4. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = 2y\vec{i} + \vec{j} + 2yz\vec{k}$ вдоль контура

$$L: \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases}$$

в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

Задание 1. Дана функция $u = (x^2 + y^2)z + xy$. Найти: 1) $grad\, u$ в точке $M(1;\ 0;\ 2)$; 2) производную в точке M по направлению вектора $\vec{s} = (2; 1; -2)$.

Решение. Найдем частные производные функции u и вычислим их значения в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz + y\Big|_M = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 = 4,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yz + x\Big|_M = 0 + 1 = 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + y^2\Big|_M = 1^2 + 0 = 1.$$

Тогда $grad\, u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = 4\vec{i} + 1\vec{j} + 1\vec{k} = (4; 1; 1)$.

Вычислим длину и направляющие косинусы вектора $\vec{s}$:

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3, \quad \vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right).$$

Следовательно, $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{-2}{3}$.

Производную по направлению найдём по формуле

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=4\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{-2}{3}=$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{7}{3}.$$

Задание 2. Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M)=(z-y)\vec{i}+(x-z)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$ гармоническим.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется гармоническим, если оно является соленоидальным и потенциальным, то есть в каждой точке М поля выполняются равенства $div\,\vec{a}(M)=0$ и $rot\vec{a}(M)=0$.

Найдем операторы:

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial}{\partial x}(z-y)+\frac{\partial}{\partial y}(x-z)+\frac{\partial}{\partial z}(x-y)=0+0+0=0\ ,$$

$$rot\vec{a}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & x-y\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x-z & x-y\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-y\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ z-y & x-z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(-1-(-1))-\vec{j}(1-1)+\vec{k}(1-(-1))=0+0+2\vec{k}\neq 0\,.$$

Следовательно, поле является соленоидальным, но не является потенциальным.

Таким образом, поле не является гармоническим.

Задание 3. Найти поток вектора $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}-z\vec{k}$ через часть поверхности параболоида $z=x^2+y^2-4$, отсеченного плоскостью $z=0$ (нормаль образует тупой угол с ортом $\vec{j}$).

Решение. Построим заданную поверхность (рис. 1). Эта поверхность однозначно проектируется на круг радиусом $R=2$ в плоскости xOy (рис. 2).

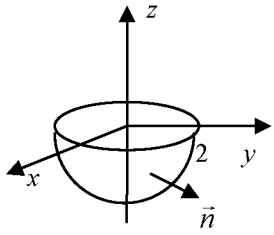


Рис. 1.

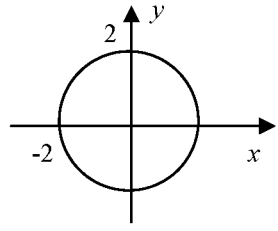


Рис. 2

Поток Π через поверхность S параболоида найдем по формуле

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_D \vec{a}\cdot\vec{n}\Big|_{z=x^2+y^2-4} dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \angle(\vec{n},\vec{j}) - \text{тупой}, \\ \vec{n} = -grad(z - x^2 - y^2) = -(-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 1\vec{k}) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}; \\ \vec{a}\cdot\vec{n} = (x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k})\cdot(2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}) = x\cdot 2x + y\cdot 2y + (-z)\cdot(-1) = \\ = 2x^2 + 2y^2 + z; \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_D \left[2(x^2+y^2)+z\right]_{z=x^2+y^2-4} dxdy = \iint\limits_D \left[2(x^2+y^2)+(x^2+y^2-4)\right] dxdy =$$

$$= 3\iint\limits_D (x^2+y^2-4)dxdy = \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi, \\ y = r\sin\varphi, \quad 0\le r\le 2, \\ dxdy = rdrd\varphi, \end{array} \right| = 3\iint\limits_{D^*} (\mathrm{r}^2-4)rdrd\varphi =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r^3-4r)dr = 3\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{r^4}{4}-\frac{4r^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 3\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{2^4}{4}-8\right) = -24\pi.$$

Задание 4. Вычислить циркуляцию вектора

$$\vec{a} = y\vec{i} + x^2\vec{j} + z\vec{k}$$

вдоль контура $L: \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=3, \end{cases}$ в положительном направлении относительно орта $\vec{k}$.

Решение. Контур L представляет собой окружность, полученную при пересечении кругового цилиндра $x^2+y^2=4$ и плоскости $z=3$ (рис. 3).

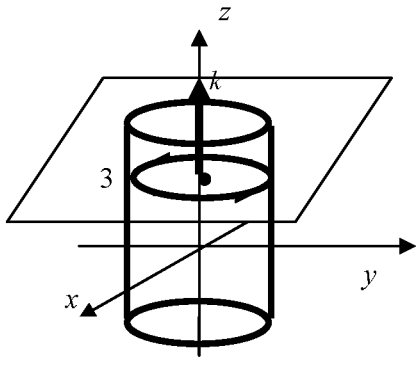


Рис. 3

Запишем параметрические уравнения окружности

$$L:\ \begin{cases} x = R\cos t = 2\cos t, \\ y = R\sin t = 2\sin t, \\ z = 3, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Вычислим циркуляцию вектора $\vec{a}$:

$$C = \int_L \vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_L ydx + x^2dy + zdz = \left| \begin{array}{ll} x = 2\cos t, & dx = -2\sin tdt, \\ y = 2\sin t, & dy = 2\cos tdt, \\ z = 0, & dz = 0, \\ & 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\sin t\cdot(2\sin t)dt + 4\cos^2 t\cdot 2\cos tdt + 0) = -4\int_0^{2\pi} \sin^2 tdt +$$

$$+8\int_0^{2\pi} \cos^2 td(\sin t) = -4\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}dt + 8\int_0^{2\pi} (1-\sin^2 t)d(\sin t) =$$

$$= -2\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} + 8\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -2(2\pi - 0) + 8\cdot 0 = -4\pi.$$

ОТВЕТЫ НА ВАРИАНТ КОНТРОЛЬНОГО ТЕСТА

ПО МОДУЛЮ № 10

1	2	3	4	5	6	7
В	А	А	А	Б	Б	Г

ПО МОДУЛЮ №11

1	2	3	4	5	6	7	8
Г	В	1/6	Б	В	16/3	В	Б

ПО МОДУЛЮ №12

1	2	3	4	5	6	7	8
А	Г	3	В	А	В	В	Б

9	10
В	В

ПО МОДУЛЮ №13

1	2	3	4	5	6	7	8
В	В	А	Б	А	Б	В	А

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т. 1.
2. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М.: Наука, 1985.
3. Гусак, А. А. Высшая математика/А.А. Гусак. – Мн. :Тетра Системс, 2000. – Т.1.
4. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах/ П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Мн.: Выш шк, 1986. – Ч. 1.
5. Жевняк, Р.М. Общий курс высшей математики /Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, А. И. Марченко, В. Т. – Орша, 1996.
6. Лихолетов, И. И. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике / И. И. Лихолетов, И. П. Мацкевич. – Мн.: Вышэйшая школа, 1976.
7. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. Учебное пособие / Под ред. А. П. Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 2000.
8. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М.: Наука, 1989.
9. Минюк, С.А. Высшая математика для инженеров. В 2 т. Т.1: учебное пособие для вузов/ С. А. Минюк, В. И. Булгаков, А. В. Метельский, З. М. Наркун; Под общ. ред. Н.А. Микулика. – Мн.: ООО «Элайда», 2004.
10. Красс, М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Москва, изд. «Дело», 2001.

СОДЕРЖАНИЕ

СПРАВОЧНИК

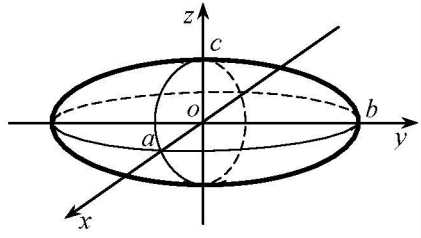
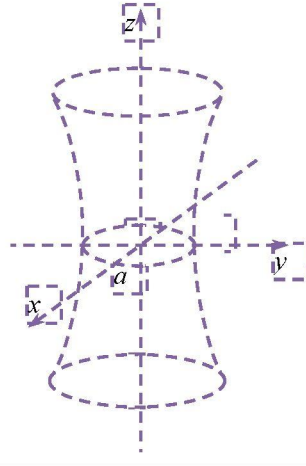
Таблица производных

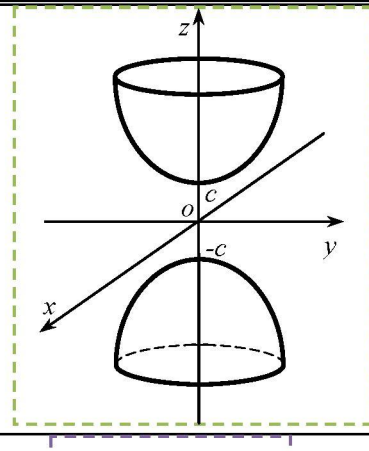
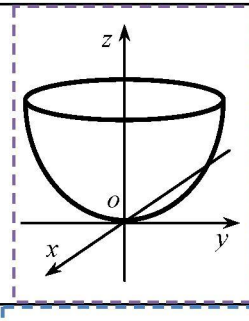
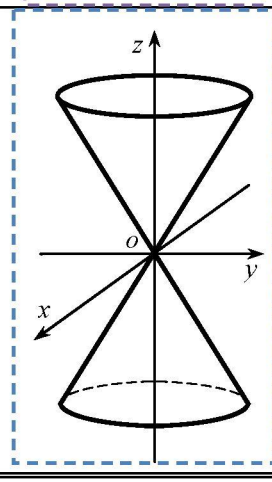
	Простая функция	*Сложная функция*
1.	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbf{R}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u',\ n \in \mathbf{R}$
2.	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
3.	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
4.	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
5.	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
6.	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
7.	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
8.	$\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9.	$\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10.	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13.	$\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

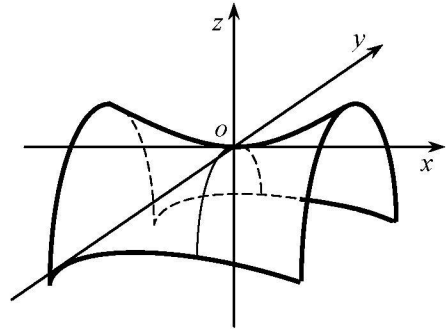
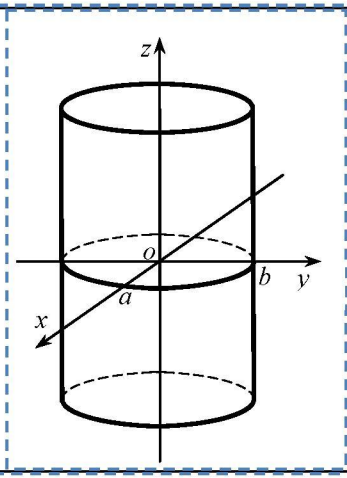
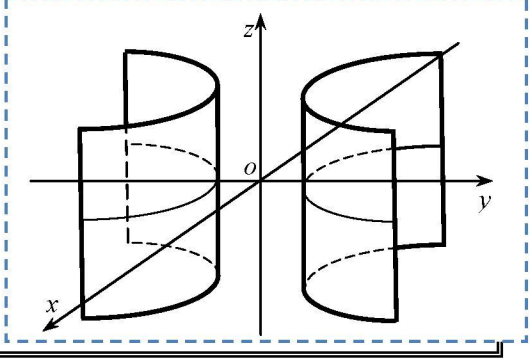
Таблица неопределенных интегралов

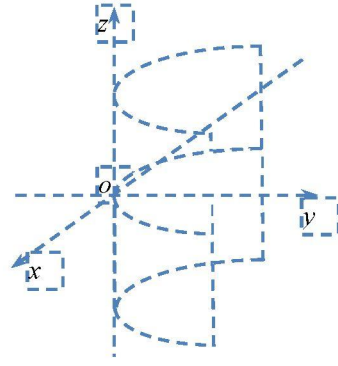
1.	$\int \mathrm{d}u = u + C$	**2.**	$\int 0\,\mathrm{d}u = C$
3.	$\int u^{\alpha}\mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$	**4.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$
5.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	**6.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
7.	$\int a^u\mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C,$ $(a>0, a\neq 1)$	**8.**	$\int \mathrm{e}^u\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u + C$
9.	$\int \sin u\mathrm{d}u = -\cos u + C$	**10.**	$\int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C$
11.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\, u + C$	**12.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\, u + C$
13.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C$	**14.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u+a}{u-a}\right\rvert + C$
15.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$	**16.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$
17.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2+a^2}\right\rvert + C$	**18.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left\lvert u+\sqrt{u^2-a^2}\right\rvert + C$
19.	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\sin u} = \ln\lvert \mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\rvert + C$	**20.**	$\int \dfrac{\mathrm{d}u}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
21.	$\int \mathrm{tg}\, u\mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$	**22.**	$\int \mathrm{ctg}\, u\mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C$

Поверхности второго порядка

ЭЛЛИПСОИД $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	

Двуполостный гиперболоид $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$	
Эллиптический параболоид $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$	
Конус второго порядка $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	

Гиперболический параболоид (седло) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	
Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

Параболический цилиндр $x^2 = 2py$	

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс

В четырех частях

Часть 3

Составители:
Тиунчик Александр Александрович,
Хвощинская Людмила Аркадьевна,
Нипарко Надежда Сергеевна,
Рыкова Ольга Васильевна

Ответственный за выпуск *А. А. Тиунчик*
Компьютерная верстка *Н. С. Нипарко*

Подписано в печать 11.02.2014. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 13,7. Уч.-изд. л. 10,72. Тираж 160 экз. Заказ 90.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.
ЛИ № 02330/0552743 от 02.02.2010.
Пр. Независимости, 99-2, 220023, Минск.