

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА  
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра механики материалов и деталей машин

## ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по образованию в области сельского хозяйства в качестве  
учебно-методического пособия для студентов высших учебных  
заведений группы специальностей 74 06 Агроинженерия*

**В двух частях**

**Часть 1**

Минск  
БГАТУ  
2011

УДК 621.01+531.8(07)  
ББК 22.2Я7  
П 75

Составители:

кандидат технических наук, доцент В. Н. Основин,  
старший преподаватель Л. С. Жаркова,  
старший преподаватель О. В. Евдокимович,  
ассистент Е. С. Купрацевич

Рецензенты:

кафедра гидротехнических сооружений и водоснабжения  
УО «Белорусская государственная сельскохозяйственная  
академия» (заведующий кафедрой, кандидат технических наук,  
доцент *М. В. Нестеров*);  
заведующий кафедрой деталей машин и подъемно-транспортных устройств  
УО «Белорусский государственный технологический университет»,  
кандидат технических наук, доцент *С. Е. Бельский*

**Прикладная механика. В 2 ч. Ч. 1** : учебно-методическое  
П 75 пособие / сост. : В. Н. Основин [и др.]. – Минск: БГАТУ, 2011. –  
228 с.  
ISBN 978-985-519-480-5.

УДК 621.01+531.8(07)  
ББК 22.2Я7

ISBN 978-985-519-480-5

© БГАТУ, 2011

## СОДЕРЖАНИЕ

---

|   |    |
|---|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....   | 6  |
| Раздел 1. СТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ<br>ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ .....           | 8  |
| 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ .....                                    | 8  |
| 1.1. Основные понятия статики .....   | 8  |
| 1.2. Аксиомы статики .....  | 13 |
| 1.3. Связи и реакции связей .....   | 16 |
| 1.4. Основные типы связей .....   | 17 |
| 1.5. Схематизация опорных устройств .....                                     | 19 |
| 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ .....                                       | 27 |
| 2.1. Равнодействующая системы сходящихся сил .....                            | 27 |
| 2.2. Геометрическое условие равновесия системы<br>сходящихся сил .....        | 29 |
| 2.3. Теорема о трех силах .....   | 34 |
| 2.4. Аналитический способ сложения сходящихся сил .....                       | 36 |
| 2.5. Аналитические условия равновесия<br>плоской системы сходящихся сил ..... | 39 |
| ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 .....   | 48 |
| Задача 1.1. Равновесие плоской системы<br>сходящихся сил .....                | 48 |
| Задача 1.2. Равновесие плоской стержневой системы .....                       | 57 |
| 3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАР СИЛ .....  | 68 |
| 3.1. Момент силы относительно точки на плоскости .....                        | 68 |
| 3.2. Пара сил и ее момент .....   | 70 |
| 3.3. Эквивалентность пар сил .....  | 75 |
| 3.4. Сложение пар сил на плоскости .....                                      | 78 |
| 3.5. Условия равновесия системы пар сил .....                                 | 80 |

|   |     |
|---|-----|
| ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 .....   | 87  |
| Задача 2.1. Момент силы относительно точки .....  | 87  |
| 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО<br>РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ .....   | 95  |
| 4.1. Приведение плоской системы сил<br>к заданному центру .....   | 95  |
| 4.2. Свойства главного вектора и главного момента<br>системы произвольно расположенных сил .....                              | 98  |
| 4.3. Теорема Вариньона о моменте<br>равнодействующей системы сил .....  | 101 |
| 4.4. Условия равновесия плоской системы произвольно<br>расположенных сил .....  | 103 |
| ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 .....   | 111 |
| Задача 3.1. Равновесие плоской системы<br>произвольно расположенных сил .....   | 111 |
| Задача 3.2. Равновесие плоской составной конструкции .....  | 118 |
| Задача 3.3. Расчет системы трех тел,<br>соединенных шарниром .....  | 129 |
| 5. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ .....   | 138 |
| 5.1. Условия равновесия плоской системы<br>параллельных сил .....   | 138 |
| 5.2. Центр системы параллельных сил .....   | 139 |
| 5.3. Центр тяжести плоских фигур и определение его<br>координат .....   | 141 |
| 5.4. Методы определения положения центра тяжести<br>сложных фигур .....   | 146 |
| ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 .....   | 155 |
| Задача 4.1. Определение координат центра тяжести<br>плоских фигур .....   | 155 |
| Задача 4.2. Определения координат центра тяжести<br>сложного сечения, составленного из профилей<br>стандартного проката ..... | 164 |
| Задача 4.3. Определение координат центра тяжести<br>пространственной стержневой системы .....                                 | 169 |
| Задача 4.4. Определение координат центра тяжести<br>объемного тела .....  | 176 |

|  |     |
|--|-----|
| 6. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ.....                                      | 182 |
| 6.1. Общие понятия о пространственной системе сил .....                                | 182 |
| 6.2. Пространственная система сходящихся сил и условия ее равновесия .....             | 184 |
| 6.3. Момент пары сил в пространстве.....   | 188 |
| 6.4. Момент силы относительно центра как вектор .....                                  | 189 |
| 6.5. Момент силы относительно оси.....   | 190 |
| 6.6. Приведение произвольной пространственной системы сил к центру .....               | 194 |
| 6.7. Вычисление главного вектора и главного момента.....                               | 196 |
| 6.8. Аналитические уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил..... | 199 |
| ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.....   | 208 |
| Задача 5.1. Момент сил относительно оси .....  | 208 |
| Задача 5.2. Расчет горизонтального вала.....   | 215 |
| ЛИТЕРАТУРА.....  | 225 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Прикладная механика – комплексная дисциплина, являющаяся основой общетехнической подготовки инженеров немашиностроительных специальностей вузов. Эта дисциплина занимает особое место в системе подготовки инженеров, поскольку является завершающей в группе естественнонаучных дисциплин (математика, физика и др.) и связующей со специальными дисциплинами. Она включает в себя основные разделы курсов «Теоретическая механика», «Теория механизмов и машин», «Механика материалов» и «Детали машин и основы конструирования».

Тематический раздел дисциплины «Прикладная механика» – «Статическое взаимодействие элементов конструкций» представляет один из разделов теоретической механики – статику, методы которой используются для решения обширного класса инженерных задач по механическому движению материальных тел или условиям их равновесия.

Раздел «Основы исследования и построения механизмов» базируется на основных положениях теории механизмов и машин – науки, изучающей общие методы структурного, кинематического и динамического анализов механизмов, механику машин. Излагаемые в теории механизмов и машин методы используются для проектирования любого механизма, независимо от его назначения.

Раздел «Механика материалов» охватывает основные разделы курса сопротивления материалов и рассматривает вопросы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Детали и узлы, входящие в состав большинства машин и механизмов, являются предметом изучения раздела «Расчет и конструирование деталей машин».

Разнообразие специальностей, в которых общетехнические дисциплины (в том числе и «Прикладная механика») изучаются в различном объеме, отборе и компоновке материала, требует создания соответствующих пособий, в которых необходимо путем наименьшей конкретизации дать наиболее полное и глубокое изложение вопросов

о статическом взаимодействии элементов конструкций, основах исследования и построения механизмов, знаний и практических навыков по расчету и рациональному проектированию деталей и узлов механизмов с обеспечением их надежности и работоспособности.

Учебно-методическое пособие для практических занятий и управляемой самостоятельной работы студентов (часть 1) составлено в соответствии с программой курса «Прикладная механика». Оно предназначено для усвоения раздела «Статическое взаимодействие элементов конструкций» изучаемого курса во всем его многообразии, т.е. в области исходных теоретических положений, приобретения навыков решения задач и применения полученных знаний при изучении других предметов.

Учебно-методическое пособие содержит цикл лекций, определенных для самостоятельной управляемой работы студентов, теоретическое изложение материала по практическим занятиям, примеры решения задач по соответствующим темам практических занятий, набор практических задач в количестве не менее 30 (тридцати) штук и варианты исходных данных к ним.

В качестве самостоятельной работы студенты выполняют индивидуальное домашнее задание по определенной теме, методика выполнения которого, индивидуальные задания и варианты исходных данных к ним приводятся в настоящем учебно-методическом пособии.

С целью создания студентам благоприятных условий для самостоятельной работы на аудиторных занятиях и при выполнении домашних заданий по всем темам имеются типовые примеры с решениями. Это дает возможность изучить методику, определить последовательность и объем выполняемой работы.

В ряде решений опущены промежуточные выкладки и приведены конечные результаты. При анализе всех примеров (особенно не имеющих полных решений) студенты обязаны в полном объеме и подробно рассмотреть ход решения, проверить правильность выбора всех цифровых данных, привести необходимые эскизы. Все эскизы и схемы, если это не оговорено особо, студенты могут выполнять от руки, без применения чертежных инструментов.

Сложность рассматриваемых задач в учебно-методическом пособии постоянно возрастает, что позволяет по замыслу авторов, помочь овладеть практическими навыками студентам, имеющим разный начальный уровень знаний.

## Раздел 1

# СТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

---

## 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И АКСИОМЫ СТАТИКИ

### 1.1. Основные понятия статики

*Статика* – раздел теоретической механики, в котором изучают условия равновесия твердых материальных (реальных) тел под действием приложенных к ним сил, а также методы приведения сложной системы сил к простейшему виду.

В данном разделе мы рассмотрим твердые материальные тела (в отличие от жидких или газообразных) и будем считать их абсолютно твердыми. Такой подход оправдывается тем, что деформации, происходящие в твердом теле, не велики и в первом приближении ими можно пренебречь. При этом значительно упрощается исследование условий равновесия. Только изучив статику абсолютно твердого тела, можно затем перейти к рассмотрению более сложной задачи равновесия твердого деформируемого тела (раздел «Механика материалов»).

Всякое материальное тело можно представить как совокупность (систему) материальных точек.

*Материальной точкой* называют простейшую модель материального тела, размерами которого пренебрегают, но в отличие от геометрической точки, обладающего массой, равной массе того тела, которое изображается данной материальной точкой. Материальной точкой мы будем считать не только тело, имеющее очень малые размеры, но и любое тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Например, в астрономии звезды рассматривают как материальные точки, так как размеры звезд малы по

сравнению с расстояниями между ними. Одно и то же реальное тело в зависимости от постановки задачи может рассматриваться либо как материальная точка, либо как тело, размеры которого необходимо учесть.

Материальное тело, в котором расстояние между любыми его точками не меняется при действии на него других тел, называется *абсолютно твердым телом* или, кратко, *твердым телом*.

Абсолютно твердых тел в природе нет, но во многих случаях изменения формы и размеров (деформации) тел настолько незначительны, что ими можно пренебречь. В статике полагают тела абсолютно твердыми и физико-механические свойства их не учитывают (за исключением вопросов, связанных с трением). Абсолютно твердое тело представляет собой неизменяемую систему материальных точек.

Любая совокупность материальных тел, связанных между собой общими законами движения или взаимодействия, называется *механической системой*. Например, механическими системами в механике считают механизмы, машины, сооружения и т.д.

В зависимости от условия задачи и выбора объекта изучения одно и то же физическое тело может быть принято за материальную точку, абсолютно твердое тело или механическую систему.

Например, Земля при изучении ее движения вокруг Солнца принимается за материальную точку, а при изучении ее вращения вокруг собственной оси – за абсолютно твердое тело. При изучении явлений, происходящих на Земле (приливы и отливы, перемещения коры и т.п.), Земля рассматривается как механическая система.

Тела в природе различным образом взаимодействуют между собой или с окружающей их средой. *Механическое взаимодействие тел*, т.е. взаимодействие, влияющее на их состояние покоя или движения (механическое состояние), характеризуется силами.

*Сила* – мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться. Сила является векторной величиной, т.е. она характеризуется величиной (модулем), направлением (линией действия) и точкой приложения (A) (рис. 1.1, а).

*Вектор* – отрезок прямой определенной длины и положения со стрелкой на одном конце.

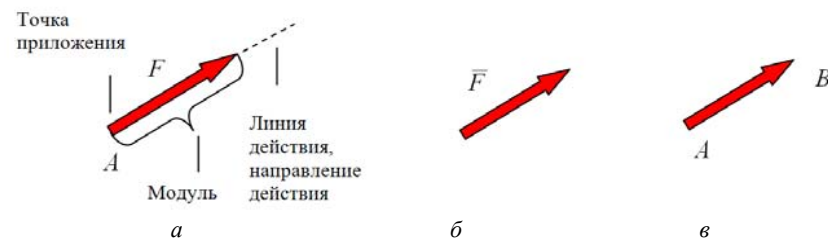


Рис. 1.1. Основные характеристики действующей силы

Длина вектора в определенном масштабе соответствует численной величине – *модулю* вектора силы. Модуль определяет величину силы в выбранном масштабе. Направление силы указывает путь возможного движения тела под действием силы (если при этом отсутствует взаимодействие с другими телами – так называемое свободное движение). Прямая линия, по которой направлен вектор силы, называется *линией действия силы*. *Точка приложения* – точка тела, к которой приложена сила.

Графически сила как вектор обозначается буквой  $F$ ; буквой  $\vec{F}$  со стрелкой наверху (допускается вместо стрелки проводить черточку  $\overline{F}$  – (рис. 1.1, б)); двумя буквами, например,  $\overline{AB}$  (рис. 1.1, в), где первая буква обозначает начало вектора, вторая – его конец. Модуль вектора обозначается той же буквой, но без стрелки наверху. Если сила приложена к телу в точке A, то она обозначается  $\overline{F}_A$ .

Как известно из физики, Международная система единиц (СИ) в качестве единицы силы устанавливает ньютон (Н). *Ньютон* есть сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 м/с<sup>2</sup> в направлении действия силы (1 Н = 1 кг · м/с<sup>2</sup>).

Силы, действующие на тело (или систему тел), делятся на *внешние* и *внутренние*. Внешние силы бывают *активные* и *реактивные*. Активные силы вызывают перемещение тела, реактивные стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил.

Под внутренними силами следует понимать силы взаимодействия между частицами тела, возникающие только в результате деформации тела.

Совокупность всех внешних сил, одновременно действующих на материальное тело или систему тел, называется *системой сил*.  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{P}, \bar{Q})$  – система сил (рис. 1.2).

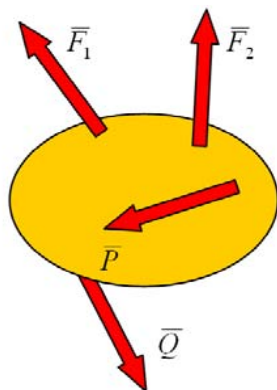


Рис. 1.2. Система сил, действующих на материальное тело

Силы, входящие в систему, называются ее *составляющими*. Среди сил системы наравне с заданными или известными могут быть и неизвестные, подлежащие определению.

Простейшие свойства сил, приложенных к материальной точке или абсолютно твердому телу устанавливаются аксиомами статики (параграф 1.2). Опираясь на них, логическим путем строятся все остальные положения статики абсолютно твердого тела. В частности, выводятся правила, по которым можно заменить заданную систему сил другими силами, эквивалентными, с точки зрения равновесия. Но в любом случае такие преобразования не должны изменять характер первоначального состояния движения или равновесия тел.

*Эквивалентными системами сил* (рис. 1.3) называют такие системы сил, действие которых на одно и то же тело одинаково при прочих равных условиях.

Для обозначения эквивалентности сил или их систем будем пользоваться значком  $\sim$ . Например, запись

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m) \quad (1.1)$$

означает, что системы сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$  и  $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \dots, \bar{Q}_m)$  между собой эквивалентны.

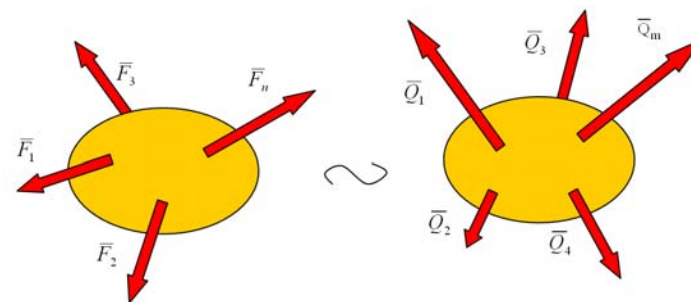


Рис. 1.3. Действие эквивалентных сил

Одна сила, действие которой на тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил, называется *равнодействующей* силой  $\bar{R}_{\bar{F}_i}$  данной системы.

Система сил, действие которой на твердое тело, находящееся в покое или движущееся по инерции, не приводит к изменению его состояния, называется *уравновешивающей*. Равнодействующая уравновешивающей системы сил равна нулю:

$$\bar{R}_{уп} = -(\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n) = 0. \quad (1.2)$$

Выяснение условий эквивалентности различных систем сил, установление способов замены одной системы сил, приложенной к абсолютно твердому телу, другой, но эквивалентной системой сил, входят в задачи статики. Но их решение выполняет вспомогательную роль, так как конечной целью в статике является получение общих условий равновесия твердых тел при действии на них различных систем сил.

В заключение отметим, что в статике будем пользоваться системой отсчета, неизменно связанной с Землей. Поэтому, когда говорим, что данное тело находится в равновесии, то имеем в виду состояние тела, в котором все его точки находятся в покое или равномерном прямолинейном движении по отношению к Земле.

## 1.2. Аксиомы статики

Условия, при которых тело может находиться в равновесии, выводятся из нескольких основных положений, принимаемых без доказательств, но подтвержденных опытом и выраженных в виде законов и теорем. Эти положения называют *аксиомами статики*.

Они устанавливают основные свойства сил, приложенных к материальной точке или к абсолютно твердому телу.

**Аксиома 1 (аксиома инерции).** Под действием взаимно уравновешенной системы сил тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Способность тела сохранять состояние равномерного прямолинейного движения или покоя, когда действующие на него силы отсутствуют или взаимно уравновешены, называется *инерцией* или *инертностью*. Инертность есть одно из основных свойств материи.

На основании этой аксиомы состоянием равновесия считаем такое состояние, когда тело находится в покое или движется прямолинейно и равномерно, т.е. по инерции.

**Аксиома 2 (аксиома двух сил).** Если тело под действием двух сил находится в равновесии, то эти силы равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1.4). Такие две силы представляют собой простейшую взаимно уравновешенную систему сил.

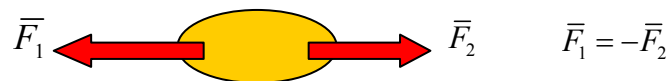


Рис. 1.4. Схема действия двух сил

**Аксиома 3 (аксиома присоединения).** Если к заданной системе сил присоединить (или изъять) взаимно уравновешенную систему сил, то состояние тела, находящегося в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, не изменится (рис. 1.5).

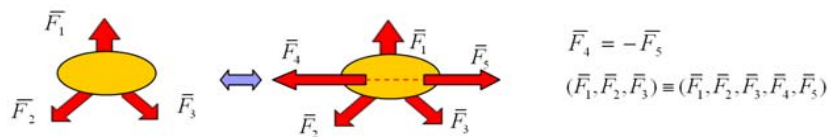


Рис. 1.5. Схема заданной и уравновешенной системы сил

**Следствие из аксиомы присоединения.** Состояние тела не изменится, если силу перенести по линии ее действия (рис. 1.6).

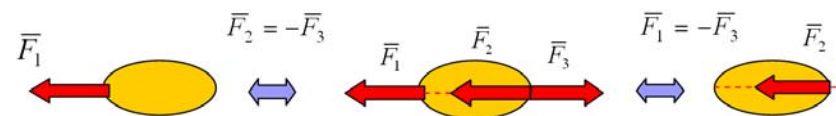


Рис. 1.6. Схема к следствию из аксиомы присоединения

Тогда

$$(\bar{F}_1) \equiv (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \equiv (\bar{F}_2). \quad (1.3)$$

**Аксиома 4 (правило параллелограмма).** Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке, равна по модулю диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах, и направлена вдоль этой диагонали (рис. 1.7).

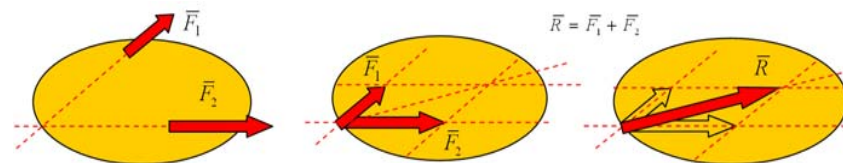


Рис. 1.7. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке

По модулю равнодействующая равна:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos(F_1 \wedge F_2)}.$$

Нетрудно видеть, что для нахождения равнодействующей силы необязательно строить весь параллелограмм. Достаточно к концу одной силы (например, первой) перенести вектор второй силы, а затем из начала первой провести вектор к концу второй (перенесенной) силы (рис. 1.8). Получившийся треугольник называют силовым, а соответствующее правило – *правилом силового треугольника*.

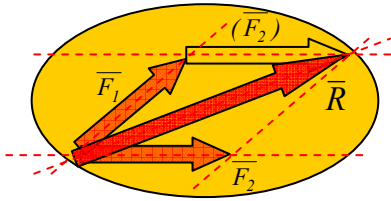


Рис. 1.8. Определение равнодействующей двух сил по правилу силового треугольника

**Аксиома 5** (аксиома действия и противодействия). При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (рис. 1.9).

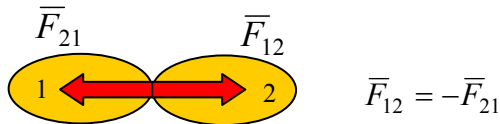


Рис. 1.9. Схема к аксиоме действия и противодействия

Силы действующие и противодействующие всегда приложены к разным телам, поэтому они не уравниваются.

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

**Аксиома 6** (принцип отвердевания). Равновесие деформируемого тела сохраняется при его затвердевании (обратное справедливо не всегда).

Не следует при этом забывать, что условия равновесия, являющиеся необходимыми и достаточными для твердого тела, являются необходимыми, но недостаточными для соответствующего нетвердого тела. Так, абсолютно жесткий стержень может находиться в равновесии под действием двух сил, равных по модулю и направленных вдоль стержня, либо друг к другу, либо друг от друга (т. е. под действием как сжимающих, так и растягивающих сил), а нить, соответствующая этому стержню, может находиться в равновесии

только под действием двух сил, направленных друг от друга. Под действием сил, направленных друг к другу, нить сомнется.

Таким образом, принцип отвердевания устанавливает связь между статикой абсолютно твердого тела и статикой деформируемого тела.

### 1.3. Связи и реакции связей

Твердое тело называется *свободным*, если его движение не ограничено никакими другими телами, т.е. оно имеет возможность, как угодно перемещаться в пространстве. В общем случае находящееся в пространстве твердое тело имеет шесть степеней свободы (перемещений) – три поступательных движения вдоль осей и три вращательных движения вокруг трех взаимно перпендикулярных осей (рис. 1.10). Плоское тело имеет только три степени свободы – два поступательных движения в направлении двух осей и вращение вокруг третьей оси.

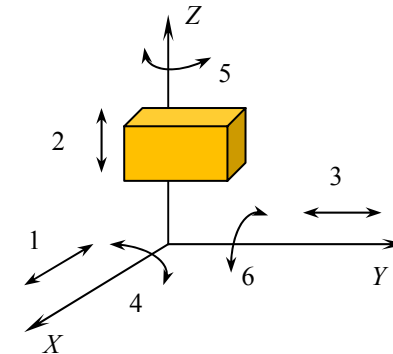


Рис. 1.10. Степени перемещений свободного тела в пространстве

В большей части технических задач встречаются лишь несвободные твердые тела.

*Несвободным* называется такое твердое тело, на которое наложены *связи*, ограничивающие его движение в некоторых направлениях. Так, для лампы, подвешенной на шнуре, связью является шнур; для книги, лежащей на столе, связью является стол; для лестницы, приставленной к стене, связями являются пол и стена. Для шара, катящегося по бильярдному столу, связью является поверхность стола и его борта.



Связи, с которыми приходится встречаться в механике, осуществляются при помощи материальных тел, твердых или гибких. Между несвободным телом и телом, осуществляющим связь, появляются силы взаимодействия. Сила, с которой связь действует на рассматриваемое тело, препятствуя его перемещению в том или ином направлении, называется силой реакции связи или просто реакцией связи.

Из аксиомы 5 следует, что сила, с которой тело действует на связь, и реакция этой связи всегда имеют одинаковые величины и противоположные направления.

Силы взаимодействия тела и связи зависят от других сил, приложенных к несвободному телу. Эти силы называются активными (например, сила тяжести тела). Как правило, они бывают известными или заданными. Нахождение сил реакций является одной из важнейших практических задач, которые решаются в механике, поскольку знание этих сил необходимо для создания прочных и работоспособных конструкций.

Сила реакции, как и любая другая сила, является величиной векторной, т.е. характеризуется точкой приложения, численным значением (модулем) и направлением. Во многих случаях направление силы реакции связи удастся определить заранее, в зависимости от характера закрепления тела. Существует общее правило, характеризующее взаимодействие рассматриваемого тела и связи: *направление силы реакции связи противоположно тому, в котором связь препятствует перемещению тела.*

Все многообразие связей, осуществляемых при помощи материальных тел, можно разделить на несколько основных типов и в каждом случае указать направление силы реакции такой связи.

#### 1.4. Основные типы связей

1. *Гибкая связь.* Если на твердое тело наложена гибкая связь (нить, канат, трос, цепь и др.), то сила реакции приложена к твердому телу в точке его прикрепления к гибкой связи и направлена по нити в точку ее наложения (рис. 1.11).

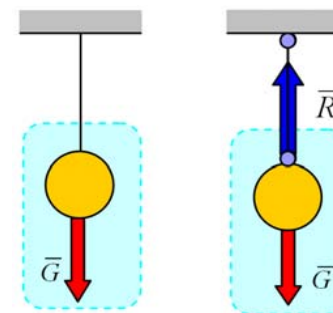


Рис. 1.11. Направление силы реакции гибкой связи

2. *Гладкая поверхность.* Если твердое тело опирается на идеально гладкую (без трения) поверхность, то сила реакции поверхности направлена по нормали к ней в точке соприкосновения, т.е. перпендикулярно общей касательной плоскости в данной точке поверхности, проведенной к соприкасающимся поверхностям тела и связи (рис. 1.12). Такая сила реакции называется *нормальной силой реакции.*

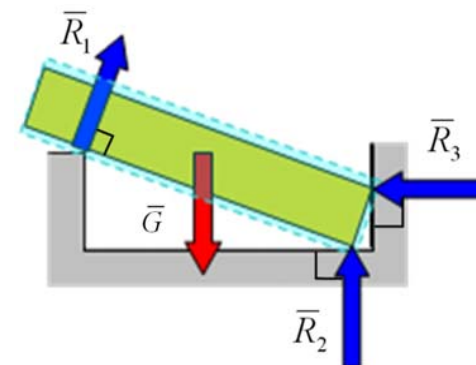


Рис. 1.12. Силы реакции гладкой поверхности

3. *Стержневая связь (стержень).* Эта связь осуществляется при помощи жесткого невесомого стержня произвольного очертания. На концах стержня имеются шарниры, при помощи которых он крепится к телу и к неподвижному основанию (рис. 1.13).

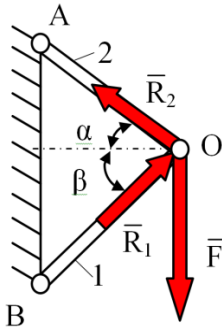


Рис. 1.13. Силы реакции стержневой связи

Стержни 1, 2 могут быть сжаты или растянуты. Силы реакции стержней направлены вдоль стержней, точное направление которых можно определить, мысленно убрав каждый из стержней и рассмотрев возможные перемещения тела без этой связи.

*Возможным перемещением* точки называется такое бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в данный момент наложенными на него связями.

Мысленно убираем стержень 1, в этом случае стержень 2 под действием силы  $\vec{F}$  падает вниз. Следовательно, сила реакции от стержня 1 направлена вверх. Убираем стержень 2, в этом случае точка A опускается вниз, отодвигаясь от стены. Следовательно, сила реакции стержня 2 направлена к стене.

Поскольку форму стержней мы принимали произвольно, то можем сделать общий вывод о возможном направлении этой силы: реакция стержневой связи направлена по прямой, соединяющей концевые шарниры, т.е. вдоль стержней.

### 1.5. Схематизация опорных устройств

Опорные устройства препятствуют тем или иным из указанных выше перемещений твердого тела или вообще исключают всякое его движение. Опорные устройства классифицируются по числу связей, накладываемых на перемещения опорных точек (узлов) тела. Связь обычно представляют в виде стержня, соединяющего тело с опорной поверхностью. Если нет специального указания, опорные связи и поверхности считаются абсолютно жесткими.

В конструкциях широко применяются опорные связи, которые называют шарнирами. *Шарнир* – такое подвижное соединение тел, которое дает им возможность свободно поворачиваться относительно друг друга.

При нагружении тела на него со стороны опорных связей начинают действовать силы, называемые *опорными реакциями*. Опорные реакции находятся из уравнений равновесия тела, у которого опорные связи мысленно удалены и заменены силами, направленными вдоль снятых связей.

Для плоского тела, в частности для плоского бруса, основными видами опор являются: *шарнирно-подвижная*, *шарнирно-неподвижная* и *защемляющая неподвижная (жесткая заделка)*.

*Шарнирно-подвижная*, или, иначе, *катковая* опора исключает перемещение опорного узла A в направлении перпендикулярном опорной поверхности, но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки и поступательному перемещению параллельно опорной поверхности. Такой опоре соответствует одна опорная реакция, которая проходит через центр шарнира и направлена перпендикулярно оси шарнира и опорной поверхности. Схематическое изображение катковой опоры представлено на рисунке 1.14. Там же показано направление опорной реакции.

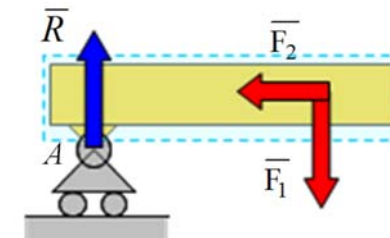


Рис. 1.14. Шарнирно-подвижная опора

*Шарнирно-неподвижная опора*. Если два тела соединены между собой, например, при помощи болта, пропущенного в отверстие этих тел, то такой шарнир называется цилиндрическим. Тело, присоединенное таким способом к неподвижному основанию (стойке), образует шарнирно-неподвижную опору, которая исключает всякое поступательное движение опорного узла, но не препятствует вращению тела вокруг опорной точки в определенной плоскости. Реакцию

такой опоры  $\bar{R}$ , направление которой заранее неизвестно, принято раскладывать на две составляющие  $\bar{R}_x$  и  $\bar{R}_y$ , направленные по касательной и нормали к опорной поверхности, т.е. параллельные координатным осям, как показано на рисунке 1.15.

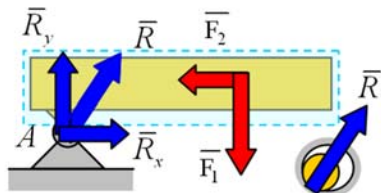


Рис. 1.15. Шарнирно-неподвижная опора (цилиндрический шарнир)

Шарнирно-неподвижная опора может быть выполнена при помощи сферического шарнира (рис. 1.16, а). В этом случае неподвижным остается только геометрический центр  $O$  шарнира. Через него проходит линия действия силы реакции, которая может иметь любое направление в пространстве. Поэтому ее представляют в виде трех составляющих, обычно направляя параллельно осям  $x, y, z$ . Каждая из них указывает на то, что точка  $O$  (центр шарнира) не может перемещаться в этом направлении.

Тогда реакцию неподвижного сферического шарнира можно разложить на три составляющие, например,  $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ , параллельные координатным осям, как показано на рисунке 1.16, б.

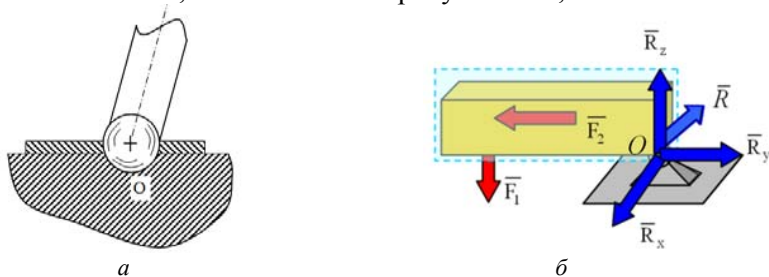


Рис. 1.16. Шарнирно-неподвижная опора (сферический шарнир)

Примерами шарнирно-неподвижных опор являются подшипники, дверные петли, оконные завесы, подпятники и т.п.

*Защемляющая неподвижная опора (жесткая заделка).* Так называется связь, ограничивающая любые перемещения тела. Простей-

шим и понятным примером может служить гвоздь, забитый в стену. В жесткой заделке появляется целая система сил реакций, которую обычно представляют в виде одной силы (сила реакции жесткой заделки) и одной пары сил с моментом  $M$  (реактивный момент). При решении задач их раскладывают на составляющие силы и моменты, каждая из которых символизирует ограничение того или иного движения тела. Например, в случае плоской системы сил они представляются в виде  $\bar{R}_x, \bar{R}_y$  и  $M_A$  (рис. 1.17), которые показывают, что тело не может свободно перемещаться в направлении этих сил (или в противоположном направлении) и не может поворачиваться вокруг точки  $A$ .

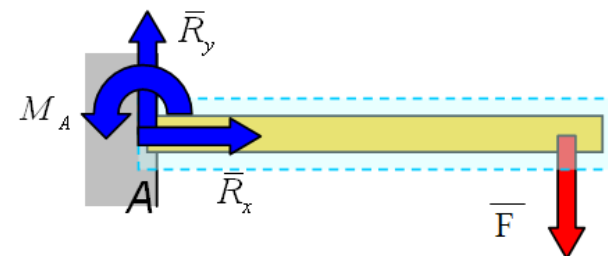


Рис. 1.17. Жесткая плоская заделка

Таким образом, в жесткой плоской заделке возникают три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы  $\bar{R}_x$  и  $\bar{R}_y$ , а также реактивный момент (пара сил)  $M_A$ .

Отметим, что жесткая заделка – самый распространенный тип связей. Всякое твердое тело при действии на него каких-то сил остается таковым лишь благодаря тому, что все его части жестко соединены друг с другом.

Конструктивное оформление опорных устройств каждого из указанных типов отличается большим разнообразием. В приведенных на рисунках 1.14, 1.15, 1.16 и 1.17 общепринятых схематических изображениях опор подчеркиваются их самые характерные особенности. Кроме перечисленных выше трех основных типов опор балок в конструкциях нередко балка свободно опирается на плоскость (поверхность) или на ребро призмы. В этих случаях направление реакций определяют по правилам, изложенным в параграфе 1.4.

## Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что изучает статика?
2. Если при взаимодействии расстояния между точками тела уменьшаются, то можно ли это тело считать абсолютно твердым?
3. В каком случае планету Земля можно считать абсолютно твердым телом?
4. Если тела не сообщают друг другу ускорения, но при этом деформируются, то действует ли в этом случае сила?
5. Можно ли определить силу, задав только величину силы и ее точку приложения?
6. Как необходимо приложить силу  $\vec{F}$  (рис. 1.18), чтобы тело двигалось горизонтально влево?

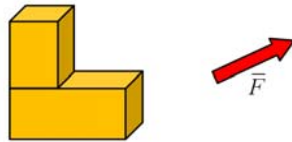


Рис. 1.18. К заданию 6

7. Какая единица не является единицей измерения силы: кН, Н·м, кг·м/с<sup>2</sup>, Н, МН?
8. Какие силы возникают в теле под действием внешних сил?
9. Что называется системой сил?
10. При каком условии две системы сил можно считать эквивалентными?
11. В чем сходство между равнодействующей и уравнивающей силами и чем они отличаются друг от друга?
12. Будет ли уравновешенной такая система сил, если она приводит в движение покоящееся тело?
13. Будет ли система сил уравнивающей, если ее равнодействующая равна нулю?
14. Какая из приведенных систем сил (рис. 1.19) уравновешена?

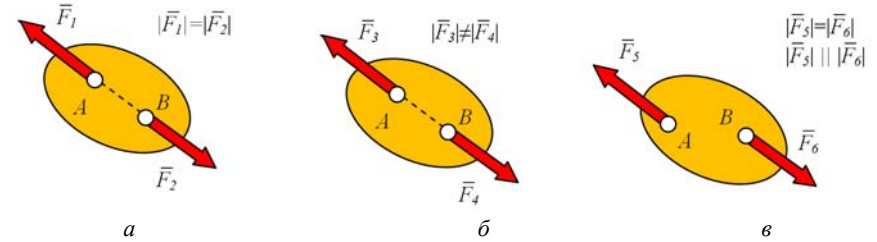


Рис. 1.19. К заданию 14

15. Какие силы системы (рис. 1.20) можно убрать, не нарушая состояния покоя или равномерного прямолинейного движения тела?

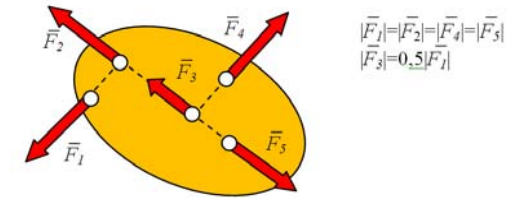


Рис. 1.20. К заданию 15

16. Тела 1 и 2 (рис. 1.21) находятся в равновесии. Можно ли убрать действующие системы сил, если тела абсолютно твердые? Что изменится, если тела реальные, деформируемые?

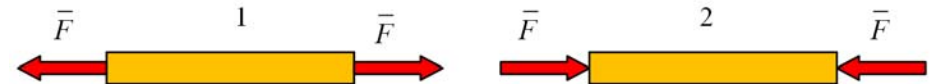


Рис. 1.21. К заданию 16

17. Если две непараллельные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 1.22), лежащие в одной плоскости, приложены в разных точках твердого тела, можно ли при их сложении применить правило параллелограмма (или треугольника) и в какой точке будет приложена равнодействующая этих сил?

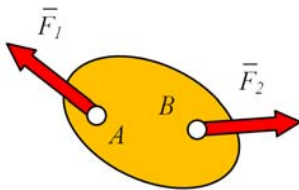


Рис. 1.22. К заданию 17

18. Можно ли силу в 50 Н разложить на две силы, например, по 200 Н?

19. Что называется связью?

20. Сколько степеней свободы (перемещений) имеют тела 1, 2 и 3 (рис. 1.23)?

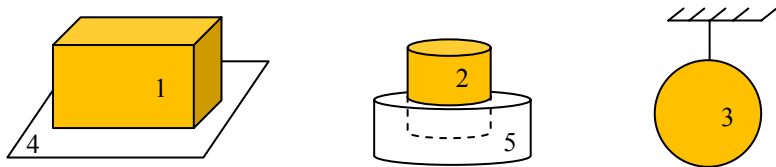


Рис. 1.23. К заданию 20

21. Куда и сколько связей необходимо наложить на тела, чтобы они имели по три степени свободы (рис. 1.24)?



Рис. 1.24. К заданию 21

22. Какие тела называются несвободными?

23. Что называется реакцией связи?

24. Какие силы являются активными?

25. По какому правилу определяется направление реакций связи?

26. Какие разновидности связей рассматриваются в статике?

27. Что называется шарниром? Какие бывают разновидности шарнирных опорных устройств?

28. Укажите возможное направление реакций в опорах (рис. 1.25).

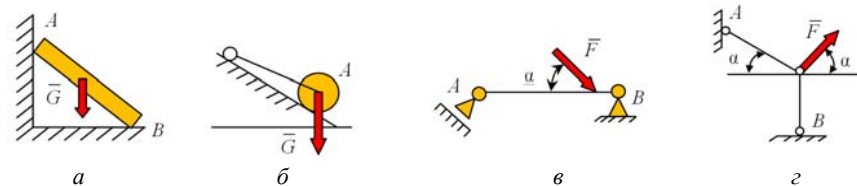


Рис. 1.25. К заданию 28

29. Как будет направлена сила реакции поверхности, если тело опирается на гладкую поверхность в точке A (рис. 1.26)?

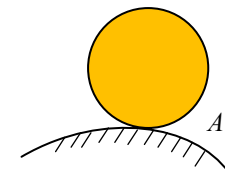


Рис. 1.26. К заданию 29

30. Перечислите основные типы опор, для которых линии действия реакции известны.

## 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

### 2.1. Равнодействующая системы сходящихся сил

Совокупность всех сил, действующих на материальное тело, линии действия которых лежат в одной плоскости и все пересекаются в одной точке, называется *плоской системой сходящихся сил*.

Плоская система сходящихся сил в общем случае эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил, а линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих.

Пусть дана плоская система четырех сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$  (рис. 2.1), линии действия которых сходятся в точке  $A$ . На основании следствия из аксиомы 3 перенесем эти силы вдоль линий их действия в точку  $A$ .

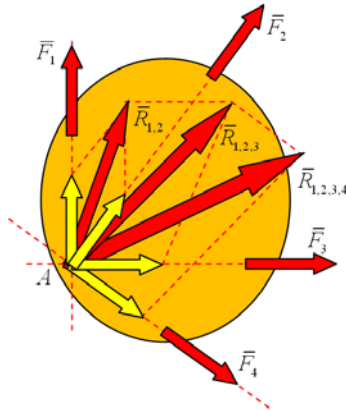


Рис. 2.1. Определение равнодействующей системы сходящихся сил

Сложив первые две силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  по правилу параллелограмма, получим их равнодействующую  $\vec{R}_{1,2}$ .

$$\vec{R}_{1,2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2.1)$$

Количество сил уменьшилось на единицу. Пользуясь тем же правилом параллелограмма, сложим равнодействующую  $\vec{R}_{1,2}$  со следующей силой  $\vec{F}_3$ . Количество сил вновь уменьшится на единицу:

$$\vec{R}_{1,2,3} = \vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3. \quad (2.2)$$

Повторим эту же операцию со следующей силой  $\vec{F}_4$

$$\vec{R}_{1,2,3,4} = \vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4. \quad (2.3)$$

Осталась всего одна сила, эквивалентная исходной системе сил. Таким образом,

$$\vec{R}_{1,2,3,4} = (\vec{R}_{1,2,3} + \vec{F}_4) = (\vec{R}_{1,2} + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4, \quad (2.4)$$

где  $\vec{R}_{1,2,3,4}$  – равнодействующая данной системы четырех сил.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого количества сходящихся сил, в результате чего получим

$$\vec{R}_\Sigma = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.5)$$

Сокращенно это равенство запишем так:

$$\vec{R}_\Sigma = \Sigma \vec{F}_i, \quad (2.6)$$

где  $i$  – все целые числа от 1 до  $n$ , а греческая заглавная буква  $\Sigma$  (сигма) означает сумму.

Таким образом, система сходящихся сил приводится к одной силе – равнодействующей (силе, эквивалентной исходной системе сил), равной геометрической сумме сил данной системы, а способ определения равнодействующей с помощью геометрии и тригонометрии будет называться *геометрическим*.

Сложение сил построением параллелограммов можно заменить построением силового многоугольника. Для этого выбирается одна из сил и изображается параллельно самой себе с началом в любой произвольной точке, все другие силы изображаются параллельными самим себе с началом, совпадающим с концом предыдущей силы (рис. 2.2).

Результатом такого сложения является вектор, направленный из начала первой силы к концу последней из сил, т.е. вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.

Необходимо помнить, что стрелки векторов слагаемых сил образуют определенное направление обхода по контуру силового многоугольника,

а замыкающая сторона, определяющая модуль и направление равнодействующей, имеет стрелку, направленную против обхода (рис. 2.2).

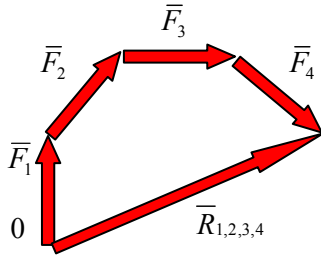


Рис. 2.2. Определение равнодействующей сходящихся сил построением силового многоугольника

Таким образом, порядок построения многоугольника сил можно представить следующим образом:

- 1) вычертить векторы сил заданной системы в некотором масштабе один за другим так, чтобы конец предыдущего вектора совпадал с началом последующего;
- 2) вектор равнодействующей замыкает полученную ломаную линию, причем он соединяет начало первого вектора с концом последнего и направлен ему навстречу;
- 3) при изменении порядка вычерчивания векторов в многоугольнике сил меняется вид фигуры, но на результат порядок вычерчивания не влияет.

## 2.2. Геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил

Если равнодействующая плоской системы сходящихся сил оказывается не равной нулю, то тело под действием такой системы сил будет двигаться в направлении равнодействующей (система сил не уравновешена). Для того чтобы уравновесить систему достаточно приложить силу, равную полученной равнодействующей и направленной в противоположную сторону (аксиома о двух силах). Таким образом, *условием равновесия системы сходящихся сил является обращение равнодействующей в ноль*, т.е.

$$\bar{R}_\Sigma = \Sigma \bar{F}_i = 0. \quad (2.7)$$

Это условие эквивалентно замкнутости силового многоугольника, когда конец вектора последней слагаемой силы совпадает с началом вектора первой слагаемой силы. В этом случае замыкающей стороны не будет, и такой силовой многоугольник называется замкнутым.

Очевидно, что равнодействующая  $\bar{R}_\Sigma$  системы сходящихся сил, дающих замкнутый силовой многоугольник, равна нулю и, следовательно, эта система эквивалентна нулю, т. е. находится в равновесии. Отсюда вытекает условие, при котором плоская система сходящихся сил будет находиться в равновесии. Это условие выражается равенством

$$\bar{R}_\Sigma = \Sigma \bar{F}_i = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \dots + \bar{F}_n = 0 \quad (2.8)$$

и формулируется так: *для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут*. Условия равновесия, записанные в виде равенств, содержащих неизвестные величины, называются *уравнениями равновесия твердого тела*.

Решение задач на равновесие несвободного твердого тела, к которому приложена плоская система сходящихся сил, рекомендуется проводить в следующем порядке:

- 1) выделить твердое тело, равновесие которого надо рассмотреть при определении неизвестных величин;
- 2) изобразить заданные силы;
- 3) применив принцип освобождения от связей, приложить к твердому телу соответствующие силы реакций связей;
- 4) рассмотреть равновесие данного несвободного твердого тела как тела свободного, находящегося под действием заданных сил и сил реакций связей;
- 5) построить замкнутый силовой многоугольник (построение следует начинать с силы, известной как по величине, так и по направлению в некотором масштабе);
- 6) измерить полученные векторы неизвестных сил и определить их величину, учитывая выбранный масштаб;

7) для уточнения решения рекомендуется определить величины векторов (сторон многоугольника) с помощью геометрических зависимостей.

Этим приемом удобно пользоваться, если число заданных сил и сил реакций связей, приложенных к твердому телу, находящемуся в равновесии, равно трем; при этом задача сводится к построению и решению силового треугольника.

**Пример 2.1.** Однородный шар силой тяжести  $G = 20$  кН опирается в точке  $A$  на гладкую наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом, а также на выступ  $B$ , находящийся на одной горизонтали с точкой  $A$  (рис. 2.3, *a*). Определить силы опорных реакций наклонной плоскости и выступа.

**Решение.**

Рассмотрим равновесие шара. К шару приложена одна заданная сила – его сила тяжести  $\vec{G}$ , направленная по вертикали вниз. Шар находится в равновесии при наличии двух связей: наклонной плоскости и выступа. Применяя принцип освобожденности от связей, заменим действие на шар мысленно отброшенных связей соответствующими силами реакций связей. Сила реакции  $\vec{R}_A$  гладкой наклонной плоскости направлена к ней перпендикулярно. В точке  $B$  проводим касательную (рис. 2.3, *б*) и направляем силу опорной реакции перпендикулярно к касательной. Следовательно, линия действия  $\vec{R}_B$  проходит через центр тяжести шара  $C$ .

Теперь можно рассмотреть шар как свободное твердое тело, находящееся в равновесии под действием плоской системы трех сил:  $\vec{G}$ ,  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$ , линии действия которых пересекаются в точке  $C$ . Для равновесия шара необходимо и достаточно, чтобы сумма этих трех сил равнялась нулю. Поэтому силы образуют замкнутый силовой треугольник.

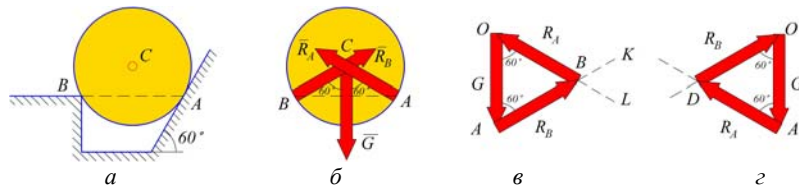


Рис. 2.3. К решению примера 2.1

Построение силового треугольника начинаем с силы  $\vec{G}$ , известной как по величине, так и по направлению. Из произвольной точки  $O$  (рис. 2.3, *в*), расположенной вне основного рисунка, проводим вектор, который равен силе  $\vec{G}$ . К концу вектора силы  $\vec{G}$  надо приложить начало вектора силы реакции  $\vec{R}_A$  или  $\vec{R}_B$ . Выбираем в качестве следующей стороны силового треугольника силу реакции выступа  $R_B$ . Так как направление силы  $R_B$  известно, то проводим через точку  $A$  прямую  $AK$ , параллельную линии действия силы реакции  $R_B$ . Для последующего построения силового треугольника надо к концу  $\vec{R}_B$  приложить начало силы  $\vec{R}_A$ . Сделать это невозможно, так как модуль силы  $R_B$  неизвестен. Несмотря на возникшие затруднения, построение силового треугольника можно успешно завершить. Следует учесть, что при равновесии шара силовой треугольник должен быть замкнут. При этом конец вектора силы реакции  $\vec{R}_A$  должен совместиться с началом вектора силы  $\vec{G}$ , т.е. попасть в точку  $O$ . Поэтому проводим через точку  $O$  прямую  $OL$ , параллельную линии действия силы  $R_A$ . Точка  $B$  пересечения прямых  $AK$  и  $OL$  определяет положение третьей вершины  $B$  силового треугольника  $OAB$ . В построенном силовом треугольнике должно иметь место единое направление стрелок, т.е. в каждой из вершин треугольника должен быть расположен конец только одной из трех сил.

Для определения модулей сил опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  остается решить силовой треугольник  $OAB$ . Нетрудно видеть из рисунка 2.3, *в*, что углы, образованные линией действия силы  $G$  с линиями действия сил реакций  $R_A$  и  $R_B$ , равны  $60^\circ$ ; таким образом, силовой треугольник оказывается равносторонним и, следовательно,  $R_A = R_B = G = 20$  кН.

Если бы при построении силового треугольника мы к концу силы  $G$  приложили начало силы  $R_A$  (а не  $R_B$ , как это было сделано выше), то получили бы силовой треугольник  $OAD$  (рис. 2.3, *з*), равный силовому треугольнику  $OAB$ . Решение этого силового треугольника, естественно, привело бы к тем же результатам.

**Пример 2.2.** Груз подвешен на стержнях и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях (рис. 2.4, *a*).



**Решение.**

1. Усилия, возникающие в стержнях крепления, по величине равны силам, с которыми стержни поддерживают груз (5-я аксиома статики) (рис. 2.4, а).

Определяем возможные направления реакций связей стержневой системы.

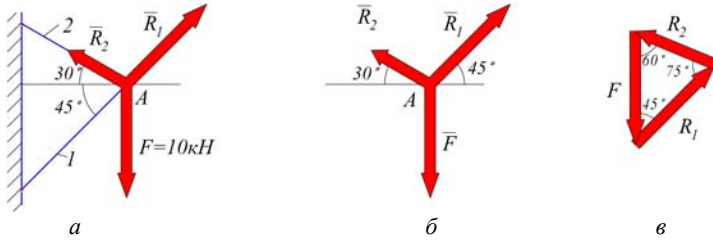


Рис. 2.4. К решению примера 2.2

Усилия направлены вдоль стержней.

2. Освободим точку А от связей, заменив действие связей их реакциями (рис. 2.4, б).

3. Система находится в равновесии. Построим треугольник сил. Построение начнем с известной силы, вычертив вектор  $\vec{F}$  в некотором масштабе.

Из концов вектора  $\vec{F}$  проводим линии, параллельные реакциям  $R_1$  и  $R_2$ .

Пересекаясь, линии создадут треугольник (рис. 2.4, в). Зная масштаб построений и измерив длину сторон треугольника, можно определить величину реакций в стержнях.

4. Для более точных расчетов можно воспользоваться геометрическими соотношениями, в частности теоремой синусов (рис. 2.5): отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла – величина постоянная  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

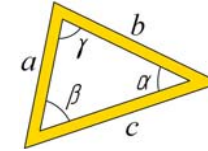


Рис. 2.5. Схема к теореме синусов

Для данного случая:  $\frac{F}{\sin 75^\circ} = \frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{R_2}{\sin 45^\circ}$ ;

$$\frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}; R_1 = \frac{F \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{10 \cdot 0,87}{0,97} = 8,97 \text{ кН};$$

$$\frac{R_2}{\sin 45^\circ} = \frac{F}{\sin 75^\circ}; R_2 = \frac{F \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{10 \cdot 0,71}{0,97} = 7,32 \text{ кН}.$$

Ответ:  $R_1 = 8,97 \text{ кН}; R_2 = 7,32 \text{ кН}.$

**2.3. Теорема о трех силах**

Если тело под действием трех непараллельных сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ) находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке (рис. 2.6).

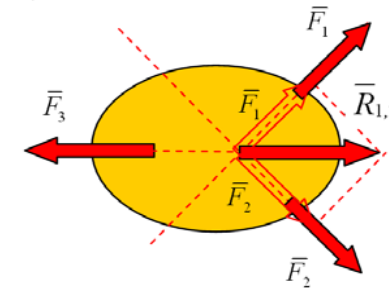


Рис. 2.6. Система трех непараллельных сил

Перенесем две силы ( $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ) по линии их действия в точку их пересечения (состояние тела при этом не изменится – следствие из аксиомы присоединения).

Сложим эти силы по правилу параллелограмма. Тогда система будет состоять всего из двух сил: равнодействующей  $\vec{R}_{1,2}$  и  $\vec{F}_3$ , а такая система находится в равновесии, если эти силы равны между собой и направлены по одной линии в противоположные стороны. Таким образом, все три силы пересекаются в одной точке.

Теорема о трех силах может эффективно применяться для определения направления одной из двух реакций тел на примере конструкции, приведенной на рисунке 2.7, а.

Реакция подвижного шарнира  $\vec{R}_B$  направлена вертикально (перпендикулярно опорной плоскости). Направление (угол наклона к горизонту) реакции неподвижного шарнира  $\vec{R}_A$  пока не определено.

Если тело под действием трех сил  $\vec{F}$ ,  $\vec{R}_A$  и  $\vec{R}_B$  находится в равновесии, то все три силы должны пересекаться в одной точке (в точке  $C$ ). Тогда действительные направления и величины реакций легко определяются на основании подобия треугольников  $ABC$  и  $ADC$  (рис. 2.7, а) и построением силового треугольника (рис. 2.7, б).

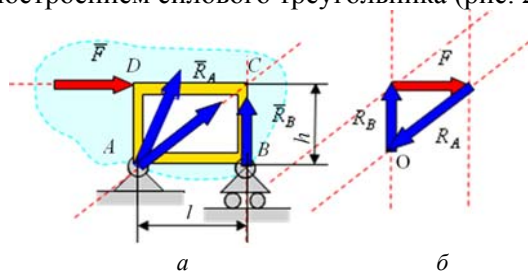


Рис. 2.7. Схема к определению реакции неподвижного шарнира  $R_A$ .

Из условия подобия треугольников имеем

$$\frac{R_B}{F} = \frac{h}{l}, \quad (2.9)$$

откуда  $R_B = \frac{F \cdot h}{l}$ . Тогда

$$R_A = \sqrt{F^2 + R_B^2}. \quad (2.10)$$

Используя методику, приведенную в примерах 2.1 и 2.2, построим силовой треугольник (рис. 2.7, б), на основании которого можно определить величины реакций  $R_A$  и  $R_B$ .

#### 2.4. Аналитический способ сложения сходящихся сил

В тех случаях, когда на тело действует более трех сил, а также когда неизвестны направления некоторых сил, удобнее при решении задач пользоваться не геометрическим, а аналитическим условием равновесия, которое основано на методе проекций.

Проекцией силы на ось называется отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы.

Пусть задана система сходящихся сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ ) и на них построили силовой многоугольник  $ABCDE$ , в котором вектор  $AE$  соответствует равнодействующей силе  $\vec{R}_\Sigma$  данной системы (рис. 2.8).

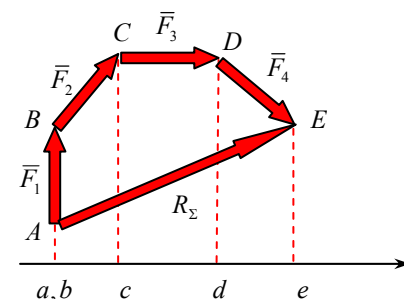


Рис. 2.8. Проекция сил на ось  $x$

Выберем ось проекций  $x$  и найдем проекции каждой силы на эту ось. Получаем:

$$F_{1x} = a, b = 0; \quad F_{2x} = bc; \quad F_{3x} = cd; \quad F_{4x} = de; \quad R_{\Sigma x} = ae.$$

Из рисунка видно, что

$$ae = a, b + bc + cd + de$$

или

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}. \quad (2.11)$$

То есть, проекция равнодействующей системы сходящихся сил на ось равна алгебраической сумме проекций сил, составляющих эту систему (сумма – алгебраическая, так как каждое слагаемое в этой формуле является алгебраической величиной).

Полученный результат можно применить и к определению проекции равнодействующей силы на любую другую ось (например,  $y$  и  $z$  прямоугольной пространственной системы координат  $Oxyz$ ) в случае системы, состоящей из  $n$  сил:

$$R_x = \sum F_{ix}; \quad R_y = \sum F_{iy}; \quad R_z = \sum F_{iz}. \quad (2.12)$$

Зная проекции равнодействующей силы на оси координат, можно найти ее величину в случае плоской системы сил как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами  $R_x$  и  $R_y$  (рис. 2.9):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (2.11)$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.

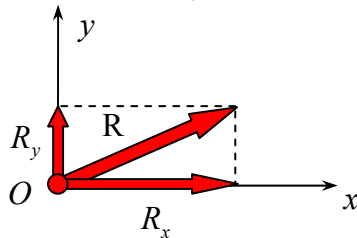


Рис. 2.9. Определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил

Направление равнодействующей, т.е. углы, образуемые ею с осями  $Ox$ ,  $Oy$ , найдутся из формул

$$\cos(\vec{R} \wedge x) = R_x / R, \quad \cos(\vec{R} \wedge y) = R_y / R. \quad (2.12)$$

Преимущества аналитического способа проекций перед геометрическим способом силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие системы, состоящей из большого числа сил. Действительно, решение силового многоугольника представляет известные

трудности, в то время как применение метода проекций не приводит к усложнению решения задачи при увеличении числа сил.

**Пример 2.3.** Определить проекции силы  $\vec{F}$ , показанной на рисунке 2.10 в заданном масштабе, на оси координат  $Ox$  и  $Oy$ .

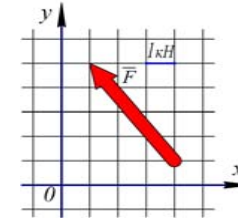


Рис. 2.10. К решению примера 2.3

**Решение.**

По определению самого понятия «проекция силы на ось» получаем:

$$F_x = -3 \text{ кН}; \quad F_y = 4 \text{ кН}.$$

**Пример 2.4.** В точке  $O$  приложены силы  $F_1 = 26 \text{ Н}$ ,  $F_2 = 26 \text{ Н}$ ,  $F_3 = 44 \text{ Н}$ . Определить величину и направление равнодействующей (рис. 2.11, а).

**Решение.**

а) *Графический метод.* В выбранном масштабе строим многоугольник сил. Начнем с  $\vec{F}_1$ , прикладываем ее в точке  $A$ ,  $\vec{F}_2$  проводим с конца вектора  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_3$  проводим с конца вектора  $\vec{F}_2$ . Конец вектора  $\vec{F}_3$  соединяем с точкой  $A$ . На рисунке 2.11, б  $\vec{F}_1 = AB$ ,  $\vec{F}_2 = BC$ ,  $\vec{F}_3 = CD$ .

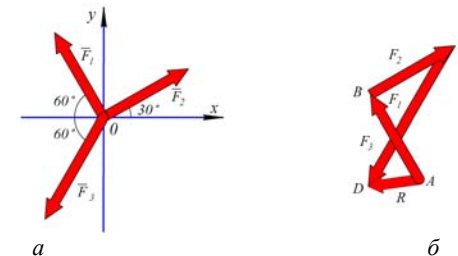


Рис. 2.11. К решению примера 2.4

а) Аналитический метод.

$$R_x = \sum F_{ix} = -F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_3 \cos 60^\circ = -26 \cdot 0,5 + 26 \cdot 0,87 - 44 \cdot 0,5 = -12,38 \text{ Н},$$

$$R_y = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ - F_3 \cos 30^\circ = 26 \cdot 0,87 + 26 \cdot 0,5 - 44 \cdot 0,87 = -2,66 \text{ Н}.$$

Знаки проекций указывают на то, что вектор равнодействующей  $\vec{R}$  находится в третьей координатной четверти.

Тогда величина равнодействующей будет равна

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-12,38)^2 + (-2,66)^2} = 12,66 \text{ Н},$$

а направление равнодействующей, т.е. углы, образуемые ею с осями  $Ox$  и  $Oy$ , будут равны:

$$(\vec{R} \wedge x) = \arccos(\vec{R} \wedge x) = \frac{R_x}{R} = \frac{-12,38}{12,66} = 12^\circ, \quad (\vec{R} \wedge y) = \arccos(\vec{R} \wedge y) = \frac{R_y}{R} = \frac{-2,66}{12,66} = 78^\circ.$$

## 2.5. Аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Если данная плоская система сходящихся сил находится в равновесии, то равнодействующая такой системы, а значит, и проекции равнодействующей на оси координат равны нулю:

$$R = \sum F_i = 0; \quad R_x = \sum F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum F_{iy} = 0. \quad (2.13)$$

Учитывая, что

$$\sum F_{ix} = \sum X; \quad \sum F_{iy} = \sum Y, \quad (2.14)$$

получаем равенства, выражающие аналитические условия равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0. \quad (2.15)$$

Формулируются эти условия следующим образом: для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций этих сил на каждую из двух координатных осей равнялась нулю.

С помощью уравнений равновесия можно определить два неизвестных элемента данной системы сил, например модуль и направление одной силы или модули двух сил, направления которых известны, и т. п.

Выведенные условия равновесия справедливы для любых осей координат, но для упрощения решения задач рекомендуется оси координат выбирать по возможности перпендикулярными неизвестным силам, чтобы каждое уравнение равновесия содержало одно неизвестное.

Когда направление искомой силы неизвестно, ее можно разложить на две составляющие по заданным направлениям, обычно по направлениям координатных осей; по найденным двум взаимно перпендикулярным составляющим легко определяется неизвестная сила.

Если при решении задач аналитическим способом искомая реакция получится отрицательной, то это значит, что действительное ее направление противоположно направлению, принятому на рисунке.

**Пример 2.5.** Определить проекции силы  $\vec{F}_4$  на оси координат, если плоская система сходящихся сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$  находится в равновесии (рис. 2.12, а). Величины сил:  $F_1 = 10 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 20 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 40 \text{ кН}$ , а их направления показаны на рисунке.

**Решение.**

Для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций сил системы на каждую из координатных осей равнялись нулю (2.15).

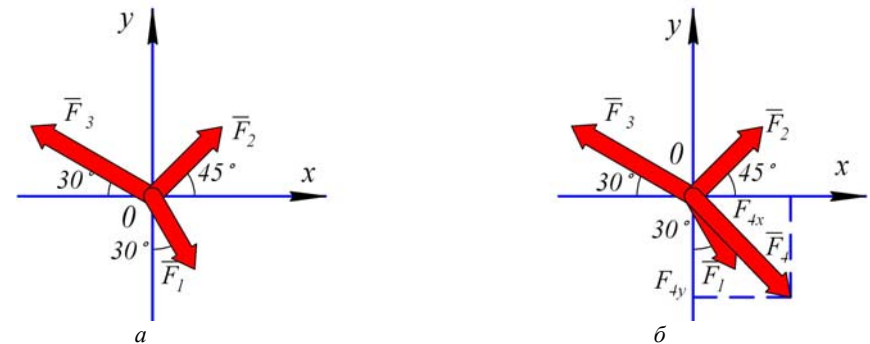


Рис. 2.12. К решению примера 2.5

Составим уравнения равновесия, находя проекции сил с помощью рисунка 2.12, а.

$$\sum F_{ix} = F_1 \sin 30^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 30^\circ + F_{4x} = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -F_1 \cos 30^\circ + F_2 \sin 45^\circ + F_3 \sin 30^\circ + F_{4y} = 0.$$

В этих уравнениях  $F_{4x}$  и  $F_{4y}$  – искомые проекции силы  $F_4$  на оси координат. Подставив в уравнения заданные значения сил и выполнив вычисления, получаем:

$$F_{4x} = 15,5 \text{ кН}; F_{4y} = -25,5 \text{ кН}.$$

Знаки проекции указывают на то, что вектор  $\vec{F}_4$  находится в четвертой координатной четверти (рис. 2.12, б).

**Пример 2.6.** Однородная прямоугольная пластинка силой тяжести  $G = 5 \text{ Н}$  подвешена так, что может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей вдоль одной из ее сторон. Равномерно дующий ветер удерживает ее в наклонном положении под углом  $\alpha = 18^\circ$  к вертикальной плоскости. Определить равнодействующую  $R$  давлений, производимых ветром на пластинку перпендикулярно ее плоскости (рис. 2.13, а).

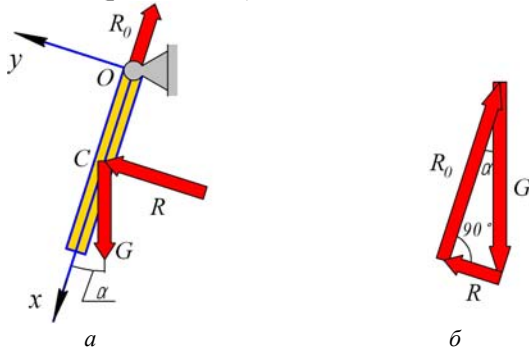


Рис. 2.13. К решению примера 2.6

**Решение.**

Рассмотрим равновесие пластинки. Отбросим шарнир  $O$ . Так как пластинка однородная и прямоугольной формы, то равнодействующая  $\vec{R}$  давлений ветра и сила тяжести  $\vec{G}$  пересекаются в геометри-

ческом центре  $C$  пластинки; линия действия реакции  $\vec{R}_0$  шарнира на основании теоремы о равновесии трех непараллельных сил также пройдет через точку  $C$ . Для системы трех сходящихся сил, действующих на пластинку, применим аналитическое условие равновесия  $\sum Y = 0$ , направив ось  $y$  перпендикулярно пластинке (чтобы реакция  $\vec{R}_0$ , которую не требуется определять, не вошла в уравнение равновесия). Составим уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0; \quad R - G \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$R = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ = 5 \cdot 0,309 \approx 1,55 \text{ Н}.$$

Проведем проверку решения задачи с помощью геометрического условия равновесия:

$$\sum F_i = 0; \quad R + G + R_0 = 0.$$

Построим замкнутый силовой треугольник (рис. 2.13, б). Решая его, получим:

$$R = G \sin \alpha = 5 \sin 18^\circ \approx 1,55 \text{ Н}.$$

**Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Дайте определение плоской системы сходящихся сил.
2. Дайте определение равнодействующей плоской системы сходящихся сил.
3. Какие существуют способы определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил?
4. На тело действует система трех сходящихся сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ . Как будет направлена сила  $F_2$ , если известно направление равнодействующей данной системы сил (рис. 2.14)?
5. Определить равнодействующую  $R_{1,2,3}$  системы сходящихся сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ , выполненную в масштабе 1:2 (рис. 2.15). Величины отрезков  $F_1 = 40 \text{ мм}$ ,  $F_2 = 30 \text{ мм}$ ,  $F_3 = 60 \text{ мм}$ .

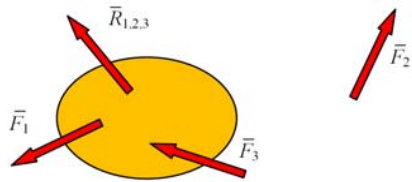


Рис. 2.14. К заданию 4

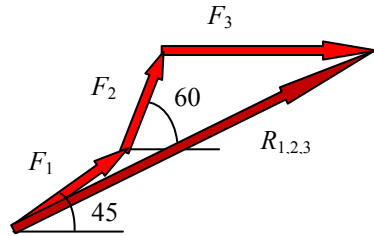


Рис. 2.15. К заданию 5

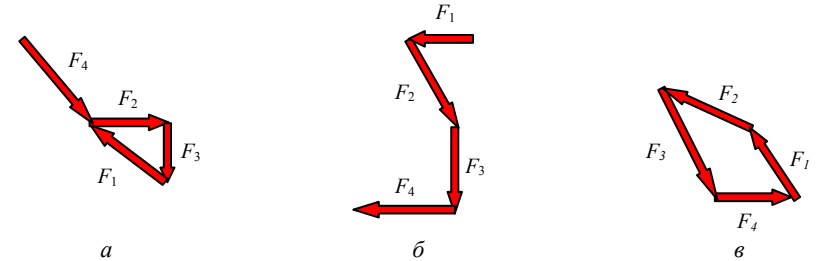


Рис. 2.17. К заданию 9

6. Какой из приведенных силовых многоугольников (рис. 2.16, б–г) является верным при определении равнодействующей системы сходящихся сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$  (рис. 2.16, а)?

10. Что необходимо сделать, чтобы уравновесить систему сходящихся сил (рис. 2.18)?

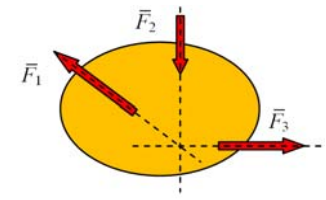


Рис. 2.18. К заданию 10

11. На шар (рис. 2.19) действует система четырех сходящихся сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4)$ . Куда будет двигаться шар под действием этих сил?

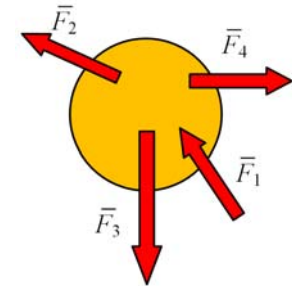


Рис. 2.19. К заданию 11

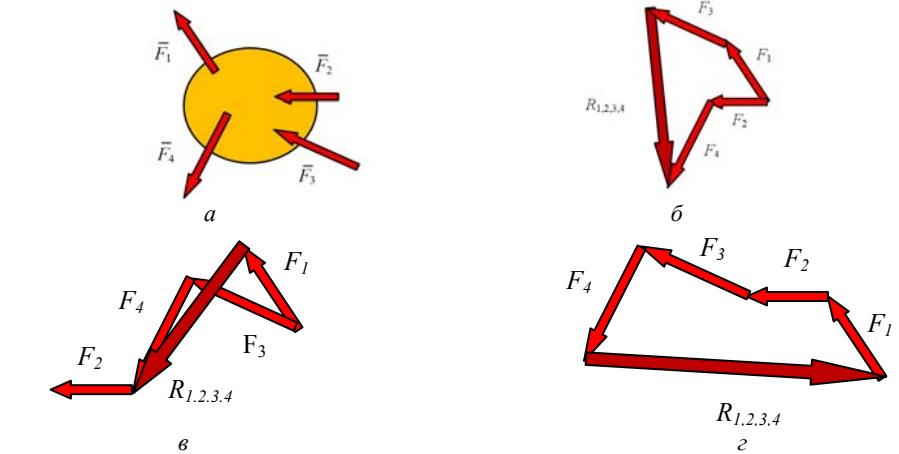


Рис. 2.16. К заданию 6

7. Сформулируйте геометрическое условие равновесия системы сходящихся сил.

8. Что называется уравнением равновесия?  
 9. На рисунке 2.17 представлены результаты геометрического сложения плоской системы сходящихся сил. Укажите, в каком случае система сил уравновешена.

12. Если тело под действием четырех сходящихся сил находится в равновесии, то, как в этом случае будет направлена сила  $\vec{F}_1$  (рис. 2.20)?

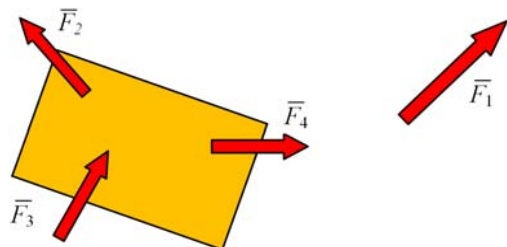


Рис. 2.20. К заданию 12

13. Сформулируйте теорему о трех силах, действующих на тело в одной плоскости.

14. Три действующие на тело силы лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются в одной точке. Образуют ли эти силы уравновешенную систему?

15. Расположите силу  $\vec{F}_3$  таким образом, чтобы тело под действием трех сил, лежащих в одной плоскости и пересекающихся в одной точке, не находилось в равновесии (рис. 2.21).

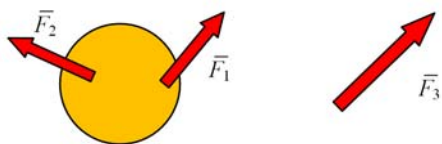


Рис. 2.21. К заданию 15

16. Два подвешенных на стене стержня (рис. 2.22) под действием силы  $\vec{F}$  находятся в равновесии. При этом стержень 1 сжат, а стержень 2 растянут. Как при этом будет направлена сила  $\vec{F}$ ?

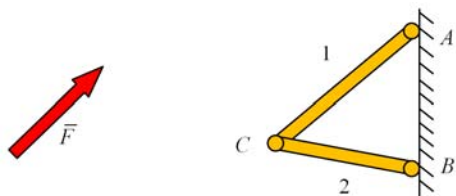


Рис. 2.22. К заданию 16

17. Балка, защемленная одним концом (рис. 2.23), под действием сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  находится в равновесии. Как направлена реакция опоры  $\vec{R}_A$ ?

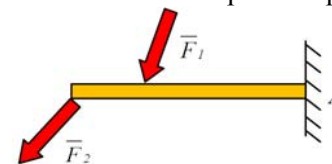


Рис. 2.23. К заданию 17

18. К телу, находящемуся в равновесии, приложены три непараллельные и пересекающиеся в одной точке силы. Сила  $F_1 = 4$  кН и  $F_2 = 3$  кН. Чему равна сила  $F_3$ ?

19. Как определить равнодействующую системы сходящихся сил аналитическим методом?

20. Что такое проекция силы на ось?

21. Как направлена сила  $F$ , если известны ее проекции на оси прямоугольной системы координат:

а)  $F_x = 0; F_y = F$ ; б)  $F_x = -F; F_y = 0$ ; в)  $F_x = F_y$ ; г)  $F_x = -F_y$ .

22. Определить проекцию равнодействующей системы трех сходящихся сил (рис. 2.24) на ось  $y$  и записать ее в виде алгебраического выражения.

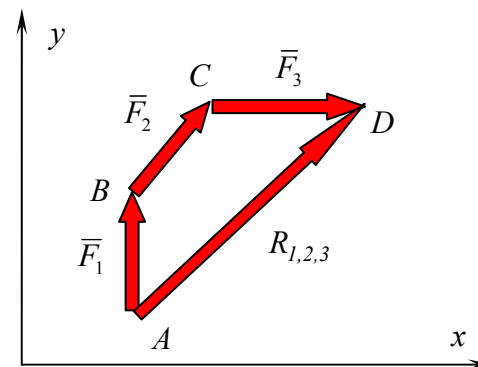


Рис. 2.24. К заданию 22

23. Как определить величину равнодействующей системы двух сил, если силы пересекаются под прямым углом?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

### Задача 1.1. Равновесие плоской системы сходящихся сил

**Постановка задачи.** Определить усилия в стержнях под действием плоской системы сходящихся сил аналитическим способом. Выполнить проверку правильности решения.

#### План решения.

1. Выделяем твердое тело, равновесие которого необходимо определить.
2. Изображаем активные силы.
3. Если твердое тело несвободно, то, применив принцип освобожденности от связей, прикладываем к нему соответствующие реакции связей.
4. Рассматриваем равновесие данного несвободного твердого тела, как тела свободного, находящегося под действием активных сил и реакций связи.
5. Проверяем, является ли данная задача статически определимой, т.е. число неизвестных величин не более двух.
6. Выбираем систему осей декартовых координат.
7. Составляем уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси декартовых координат:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0 \\ \sum F_{iy} = 0 \end{cases}$$

8. Решаем составленную систему уравнений равновесия и определяем искомые величины. Если какая-либо величина окажется отрицательной, то это означает, что направление силы противоположно тому, которое было указано на рисунке.

9. Делаем проверку, для чего необходимо составить уравнение проекций сил на какую-либо третью ось.

**Пример П1.1.** Невесомые стержни соединены шарнирами в точке  $A$  и там же приложена горизонтальная сила  $F = 100$  Н (рис. П1.1). Определить усилия в стержнях.

24. В чем заключается преимущество аналитического способа проекций определения равнодействующей перед геометрическим способом силового многоугольника?

25. Находится ли система сходящихся сил в равновесии, если ее равнодействующая и проекции на оси координат равны нулю?

26. Сколько и какие уравнения равновесия можно составить для уравновешенной плоской системы сходящихся сил?

27. Сформулируйте аналитическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил.

28. Какие и сколько элементов системы сил можно определить из уравнений равновесия плоской системы сходящихся сил?

29. Балка на двух опорах под действием силы  $\vec{F}$  уравновешена. Как будет направлена реакция  $R_A = -5$  кН (рис. 2.25)?

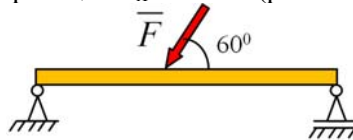


Рис. 2.25. К заданию 29

30. Составьте уравнения равновесия для тела, находящегося под действием сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_3$  (рис. 2.26).

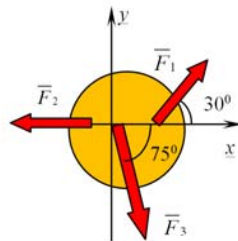


Рис. 2.26. К заданию 30



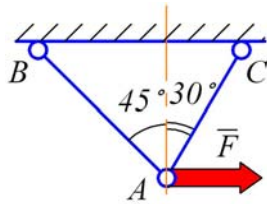


Рис. П1.1. К решению примера П1.1

**Решение.**

1. Выделяем узел A (рис. П1.2).

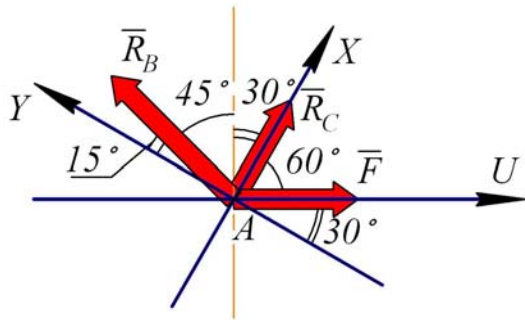


Рис. П1.2. Расчетная схема для решения примера П1.1

2. Изображаем активную силу  $\vec{F}$ .

3. Предполагая, что стержни растянуты, направление реакций  $\vec{R}_B$  и  $\vec{R}_C$  покажем от узла, вдоль стержня.

4. Выберем систему осей декартовых координат. Проведем ось  $OX$  вдоль неизвестной силы  $\vec{R}_C$ , зная, что в этом случае ее проекция на ось  $OY$  будет равна нулю.

5. Составляем уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = R_C + F \cos 60^\circ + R_B \cos 75^\circ = 0 & (\text{П1.1}) \\ \sum F_{iy} = R_B \cos 15^\circ - F \cos 30^\circ = 0 & (\text{П1.2}) \end{cases}$$

6. Из уравнения (П1.2) найдем реакцию связи  $R_B$ :

$$R_B = \frac{F \cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{100 \cos 30^\circ}{\cos 15^\circ} = 89,6 \text{ Н.}$$

Знак (+) указывает, что стержень  $AB$  растянут.

7. Из уравнения (П1.1) определим реакцию связи  $R_C$ .

$$R_C = -F \cos 60^\circ - R_B \cos 75^\circ = -100 \cos 60^\circ - 89,6 \cos 75^\circ = -73,2 \text{ Н.}$$

Знак (-) указывает, что стержень  $AC$  сжат, а не растянут, как мы предполагали.

8. Проверка. Составим уравнение проекции всех сил на ось  $U$ , которую проведем вдоль силы  $F$ .

$$\sum F_{iU} = 0,$$

$$\sum F_{iU} = F + R_C \cos 60^\circ - R_B \cos 45^\circ = 100 - 73,2 \cdot 0,5 - 89,6 \cdot 0,707 = 0.$$

Следовательно, усилия в указанных стержнях определены верно.

**Ответ:**  $R_B = 89,6 \text{ Н}$ ,  $R_C = -73,2 \text{ Н}$ .

*Условие задачи 1.1.* К узлу стержневой конструкции  $C$  приложены силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Определить усилия (реакции связей) невесомых стержней 1 и 2. Исходные данные к задаче 1.1 приведены в таблице П1.1, а расчетные схемы – в таблице П1.2.

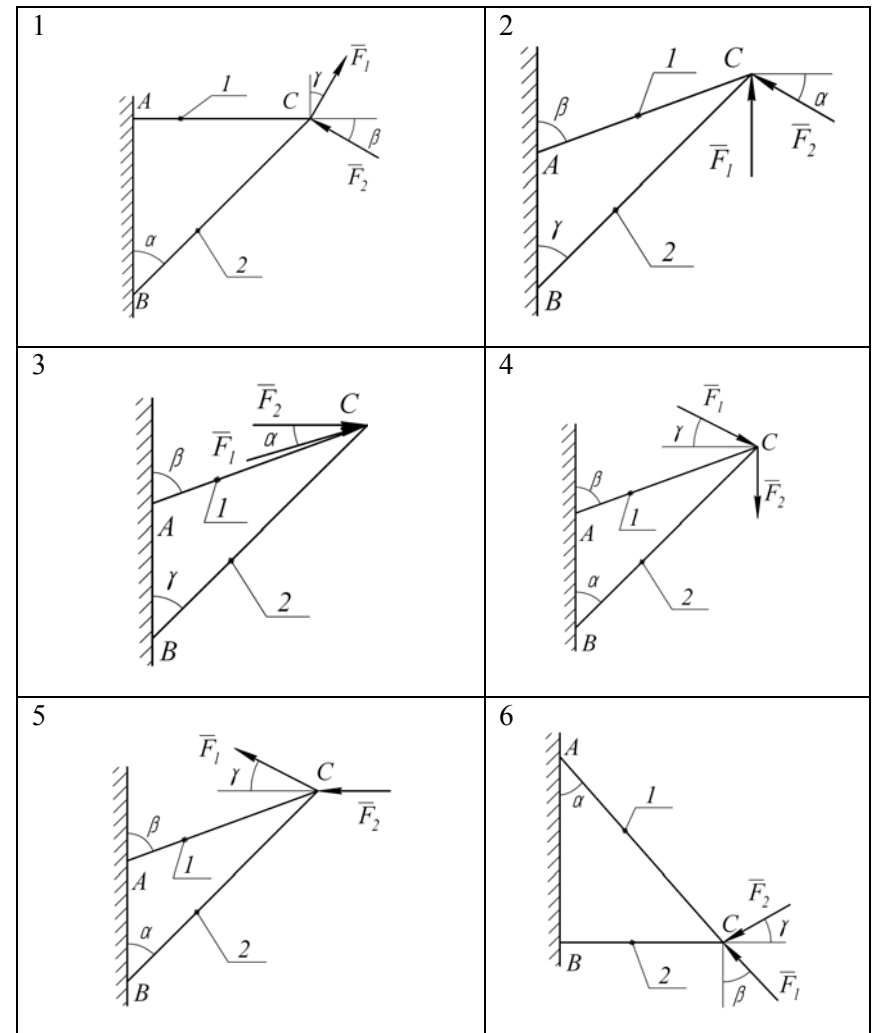
Таблица П1.1

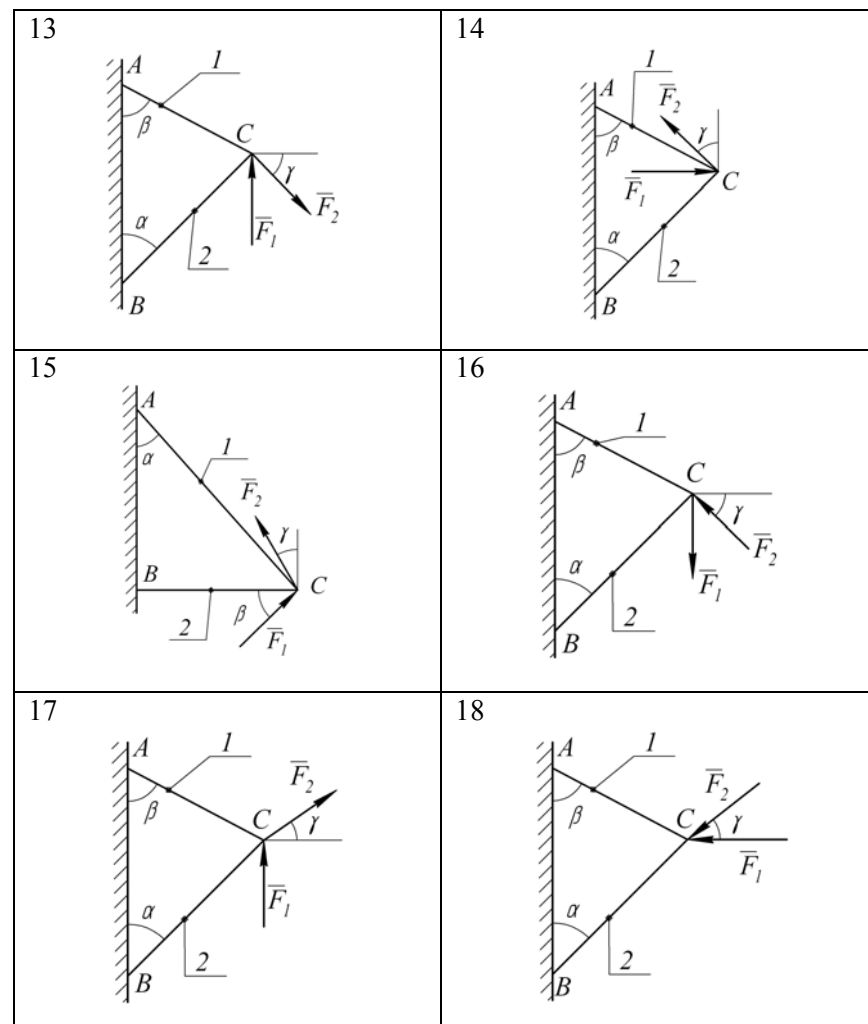
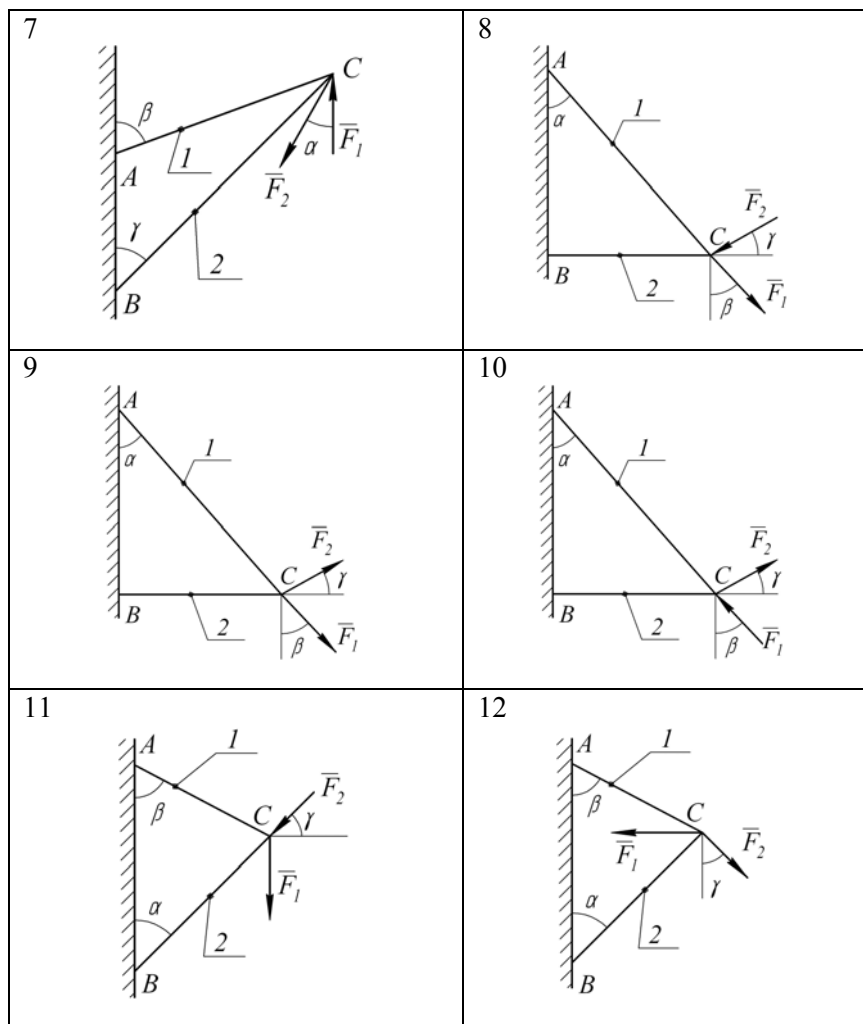
Исходные данные к задаче 1.1

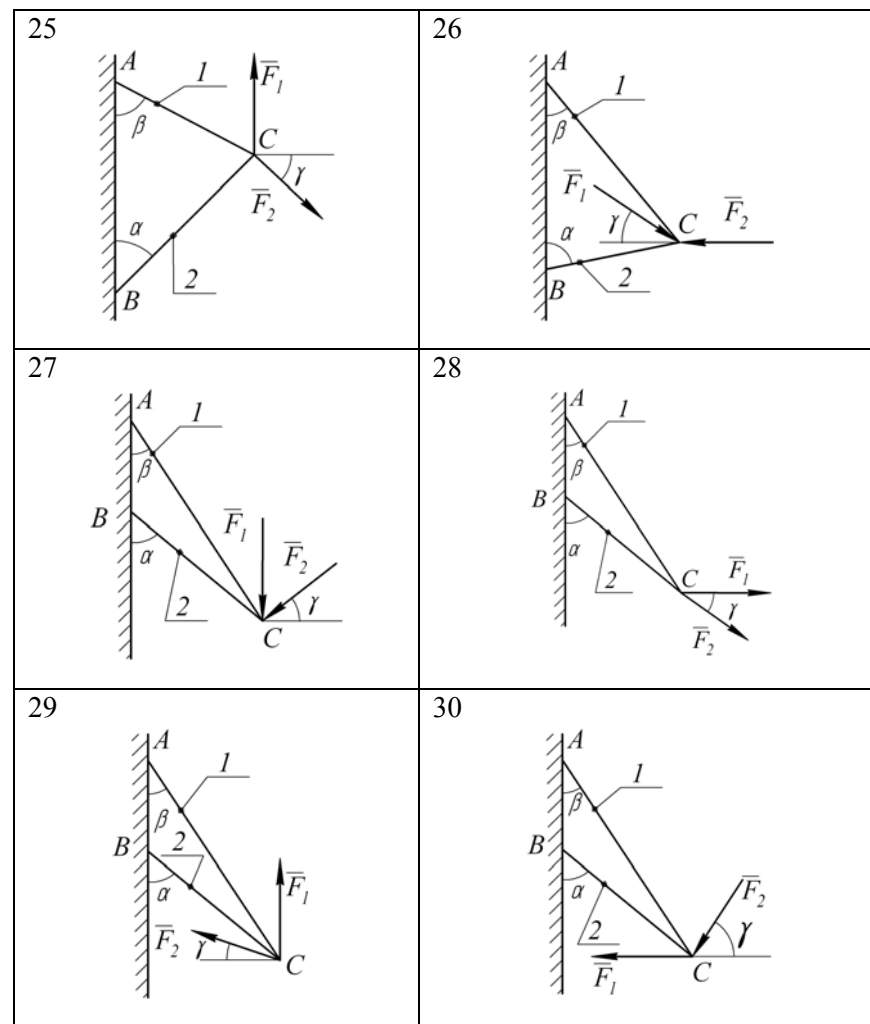
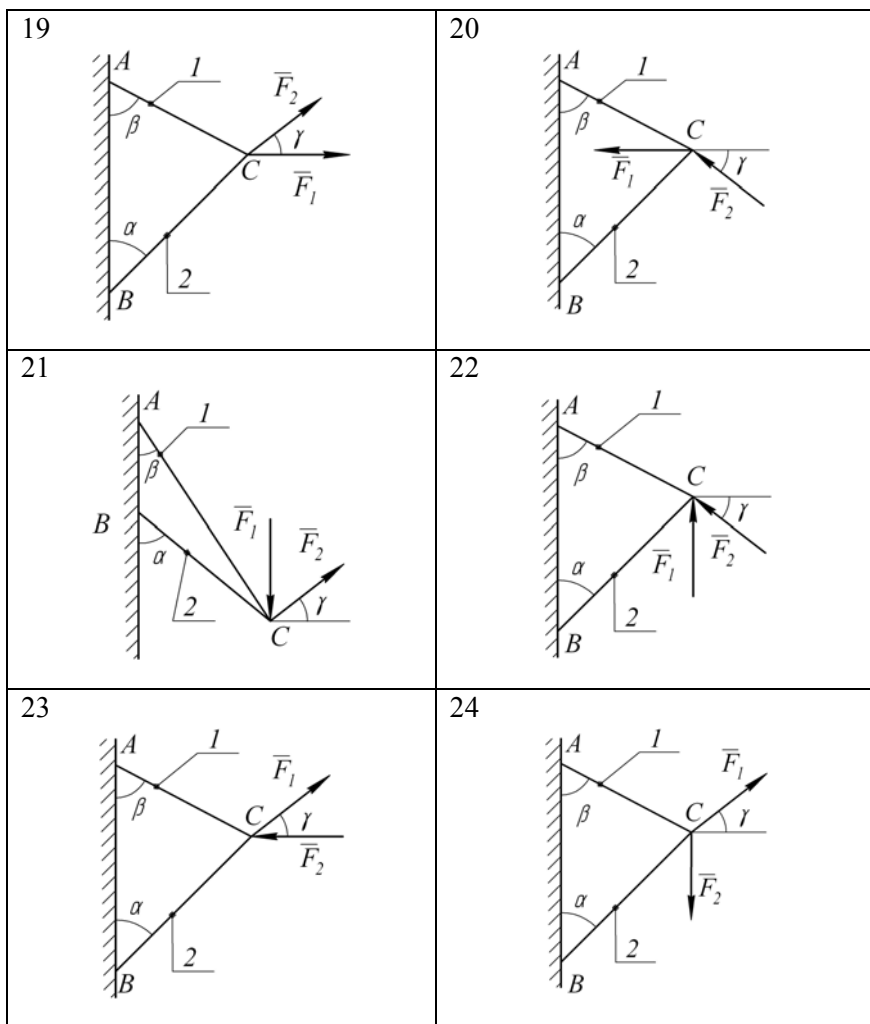
| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F_1$ , кН | Сила $F_2$ , кН | Угол $\alpha$ , град | Угол $\beta$ , град | Угол $\gamma$ , град |
|----------------|-------------|-----------------|-----------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| 01             | 1           | 10              | 15              | 45                   | 30                  | 30                   |
| 02             | 2           | 15              | 20              | 45                   | 45                  | 30                   |
| 03             | 3           | 10              | 20              | 30                   | 45                  | 30                   |
| 04             | 4           | 20              | 35              | 30                   | 60                  | 30                   |
| 05             | 5           | 5               | 30              | 30                   | 60                  | 45                   |
| 06             | 6           | 10              | 25              | 30                   | 60                  | 45                   |
| 07             | 7           | 5               | 45              | 30                   | 60                  | 45                   |

| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F_1$ , кН | Сила $F_2$ , кН | Угол $\alpha$ , град | Угол $\beta$ , град | Угол $\gamma$ , град |
|----------------|-------------|-----------------|-----------------|----------------------|---------------------|----------------------|
| 08             | 8           | 25              | 35              | 30                   | 45                  | 30                   |
| 09             | 9           | 5               | 10              | 60                   | 45                  | 30                   |
| 10             | 10          | 5               | 20              | 30                   | 60                  | 45                   |
| 11             | 11          | 15              | 35              | 30                   | 60                  | 30                   |
| 12             | 12          | 20              | 45              | 45                   | 60                  | 30                   |
| 13             | 13          | 5               | 40              | 45                   | 60                  | 60                   |
| 14             | 14          | 25              | 25              | 60                   | 60                  | 30                   |
| 15             | 15          | 20              | 25              | 60                   | 30                  | 45                   |
| 16             | 16          | 15              | 40              | 30                   | 45                  | 60                   |
| 17             | 17          | 10              | 40              | 30                   | 45                  | 30                   |
| 18             | 18          | 5               | 35              | 45                   | 45                  | 30                   |
| 19             | 19          | 10              | 10              | 60                   | 45                  | 60                   |
| 20             | 20          | 25              | 30              | 60                   | 45                  | 30                   |
| 21             | 21          | 20              | 40              | 60                   | 45                  | 60                   |
| 22             | 22          | 15              | 35              | 60                   | 60                  | 60                   |
| 23             | 23          | 15              | 5               | 30                   | 30                  | 45                   |
| 24             | 24          | 35              | 10              | 45                   | 30                  | 30                   |
| 25             | 25          | 15              | 30              | 60                   | 30                  | 30                   |
| 26             | 26          | 40              | 25              | 60                   | 30                  | 45                   |
| 27             | 27          | 15              | 25              | 60                   | 30                  | 45                   |
| 28             | 28          | 20              | 30              | 60                   | 30                  | 45                   |
| 29             | 29          | 5               | 25              | 45                   | 30                  | 30                   |
| 30             | 30          | 10              | 30              | 45                   | 30                  | 60                   |

Расчетные схемы к задаче 1.1







## Задача 1.2. Равновесие плоской стержневой системы

**Постановка задачи.** Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в шарнирах силами. Найти усилия в стержнях.

### План решения.

Рассматриваем равновесие внутренних шарниров системы, не соединенных с неподвижным основанием. Такие шарниры будем называть узлами. Действие каждого стержня заменяем его реакцией – силой, направленной из узла к стержню. Проекция реакции стержня на внешнюю нормаль к сечению называется *усилием*. Если в результате решения задачи реакция стержня, приложенная таким образом к узлу, оказывается отрицательной, то стержень сжат, в противном случае стержень растянут.

1. Вырезаем узел, соединенный только с двумя стержнями. Действие стержней заменяем их реакциями.

2. Для полученной системы сходящихся сил составляем уравнения равновесия в проекциях на выбранные для этого узла оси.

3. Решаем систему двух линейных уравнений и находим искомые усилия.

4. Вырезаем очередной узел системы, тот, к которому подходят не более двух стержней с неизвестными усилиями. Составляем и решаем уравнения равновесия в проекциях на оси, выбранные для этого узла. Этот пункт плана выполняем несколько раз для всех узлов до нахождения всех усилий.

5. Для проверки решения мысленно отделяем конструкцию от основания, заменяя действие рассеченных стержней найденными реакциями. Проверяем выполнение условий равновесия полученной системы сил.

**Пример П1.2.** Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании шарнирами  $E, D, C$  и нагружена в шарнире  $A$  горизонтальной силой  $F = 100$  кН (рис. П1.3). Даны углы:  $\angle DKA = 135^\circ$ ;  $\angle ABD = 60^\circ$ ;  $\angle DCB = 60^\circ$ ;  $\angle BDC = 30^\circ$ ;  $\angle DKE = 30^\circ$ . Найти усилия в стержнях.

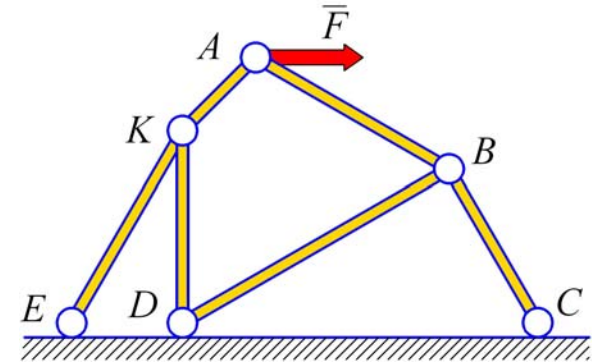


Рис. П1.3. Плоская шарнирно-стержневая конструкция

### Решение.

Конструкция состоит из шести стержней, соединенных тремя шарнирами (узлами). Узлы фермы находятся в равновесии. Для каждого узла  $A, B, K$  составляем по два уравнения равновесия в проекциях на выбранные оси. Из шести уравнений находим шесть искомых усилий.

1. Решение задачи начинаем с рассмотрения узла  $A$ , так как этот узел соединен только с двумя стержнями  $AB$  и  $AK$ . При вырезании узла действие каждого стержня заменяем силой, направленной от шарнира к стержню (рис. П1.4).

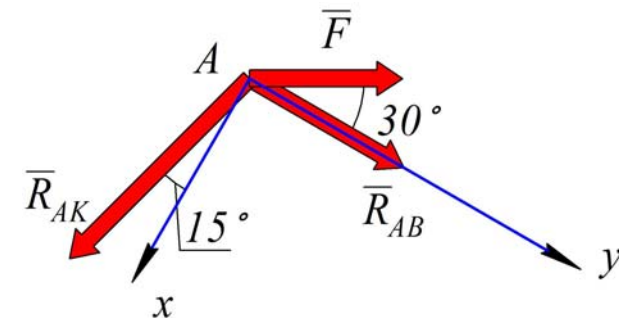


Рис. П1.4. Силы, действующие в узле  $A$

2. Составляем уравнения равновесия. Для упрощения уравнений ось  $y$  направляем по стержню  $AB$ . Получаем:

$$\sum F_{ix} = R_{AK} \cdot \cos 15^\circ - F \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = R_{AK} \cdot \sin 15^\circ + R_{AB} + F \cos 30^\circ = 0.$$

где  $F_{ix}$  – проекция силы  $i$ -ой на ось  $x$ , а  $F_{iy}$  – проекция силы  $i$ -ой на ось  $y$ .

3. Решаем уравнения. Из первого уравнения системы находим усилие  $R_{AK} = 51,76$  кН, из второго – усилие  $R_{AB} = -73,21$  кН.

4. Рассматриваем узел  $K$ . К нему подходят три стержня (рис. П1.5).

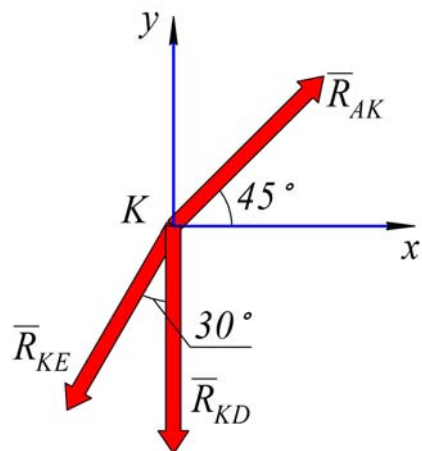


Рис. П1.5. Силы, действующие в узле  $K$

Усилие в одном из них уже известно –  $R_{AK} = 51,76$  кН. Усилия в двух других находим из уравнений для проекций:

$$\sum F_{ix} = -R_{KE} \cdot \sin 30^\circ + R_{AK} \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -R_{KE} \cdot \cos 30^\circ - R_{KD} + R_{AK} \sin 45^\circ = 0.$$

Находим  $R_{KE} = 73,21$  кН,  $R_{KD} = -26,79$  кН.

Составляем уравнения равновесия узла  $B$  в проекциях на оси, направленные по стержням  $BC$  и  $BD$  (рис. П1.6):

$$\sum F_{ix} = R_{BD} + R_{AB} \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum F_{iy} = R_{BC} - R_{AB} \cos 30^\circ = 0.$$

Решая уравнения, получаем:

$$R_{BD} = -R_{AB} \cdot \sin 30^\circ = 73,21 \cdot 0,5 = 36,6 \text{ кН},$$

$$R_{BC} = R_{AB} \cdot \cos 30^\circ = -73,21 \cdot 0,866 = -63,4 \text{ кН}.$$

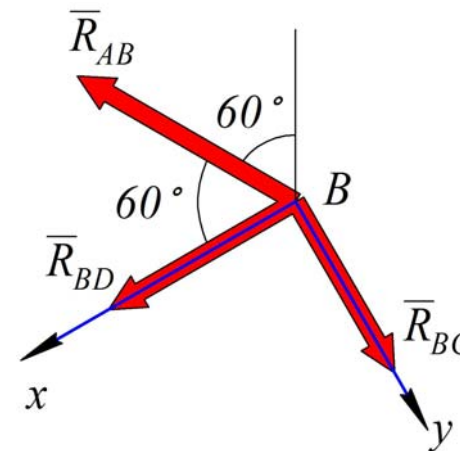


Рис. П1.6. Силы, действующие в узле  $B$

5. Проверка. Рассматриваем равновесие конструкции в целом. Горизонтальным сечением отсекаем форму от основания. Действия стержней заменяем силами, которые направляем, как и раньше, по внешним нормальям к сечениям стержней, т.е. вниз (рис. П1.7).

Система сил, действующих на ферму, не является сходящейся. Для такой системы справедливы три уравнения равновесия, одно из которых уравнение моментов. Составление уравнения моментов – тема задач статики произвольной плоской или пространственной системы сил.

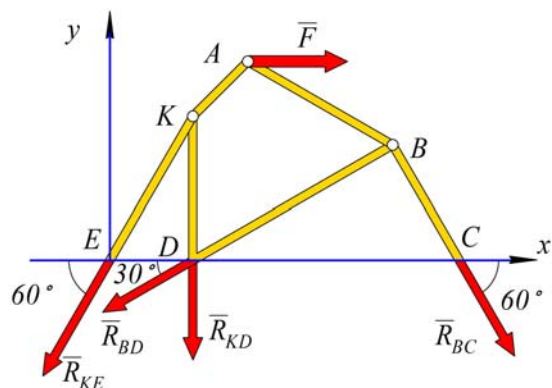


Рис. П1.7. Расчетная схема для проверки

Для того чтобы не выходить за пределы темы поставленной задачи, в решении которой используются только уравнения проекций, составим два уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  всех сил, действующих на ферму целиком:

$$\sum F_{ix} = -R_{KE} \cos 60^\circ - R_{BD} \cos 30^\circ + R_{BC} \cos 60^\circ + F = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -R_{KE} \sin 60^\circ - R_{KD} - R_{BD} \sin 30^\circ - R_{BC} \sin 60^\circ = 0.$$

Суммы равны нулю. Это подтверждает правильность решения. Результаты расчетов заносим в таблицу П1.3.

Таблица П1.3

Результаты определения усилий в стержнях

| $R_{AK}$ , кН | $R_{AB}$ , кН | $R_{KE}$ , кН | $R_{KD}$ , кН | $R_{BD}$ , кН | $R_{BC}$ , кН |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 51,76         | -73,21        | 73,21         | -26,79        | 36,60         | -63,40        |

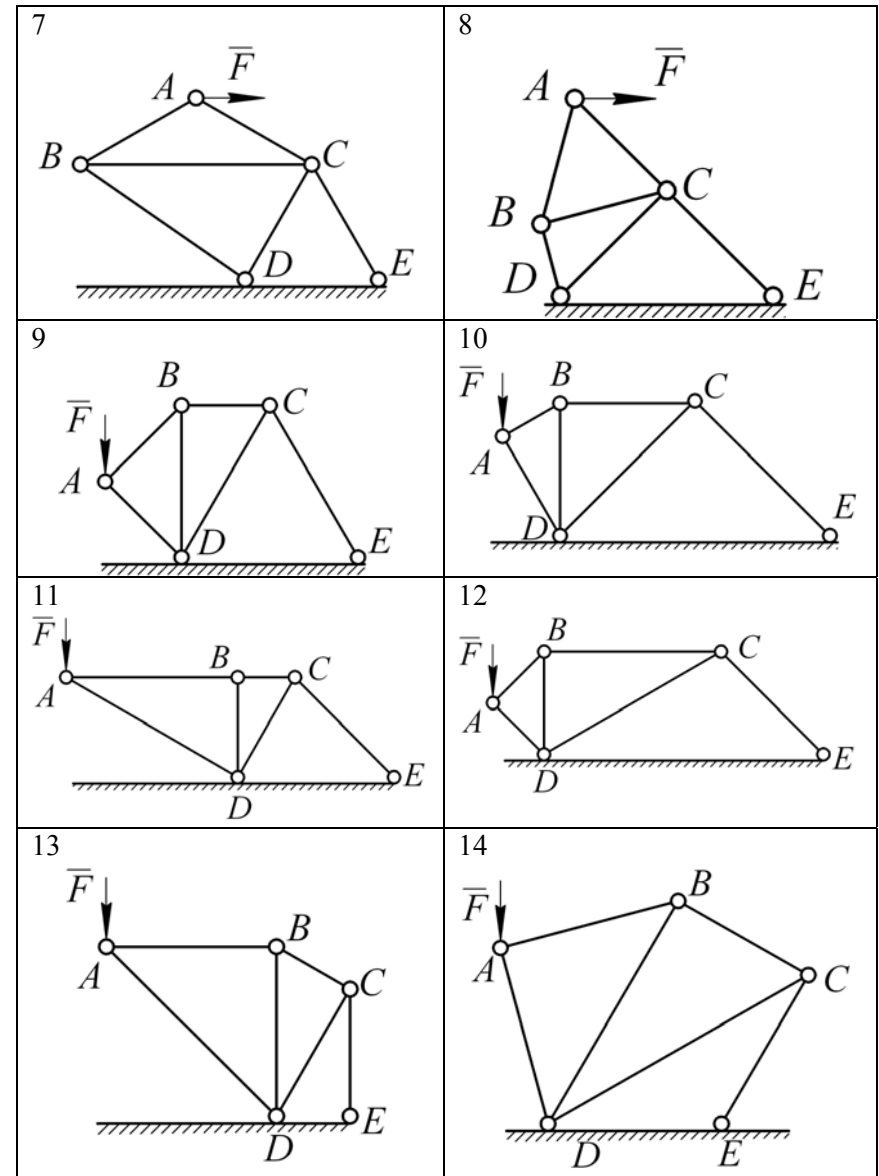
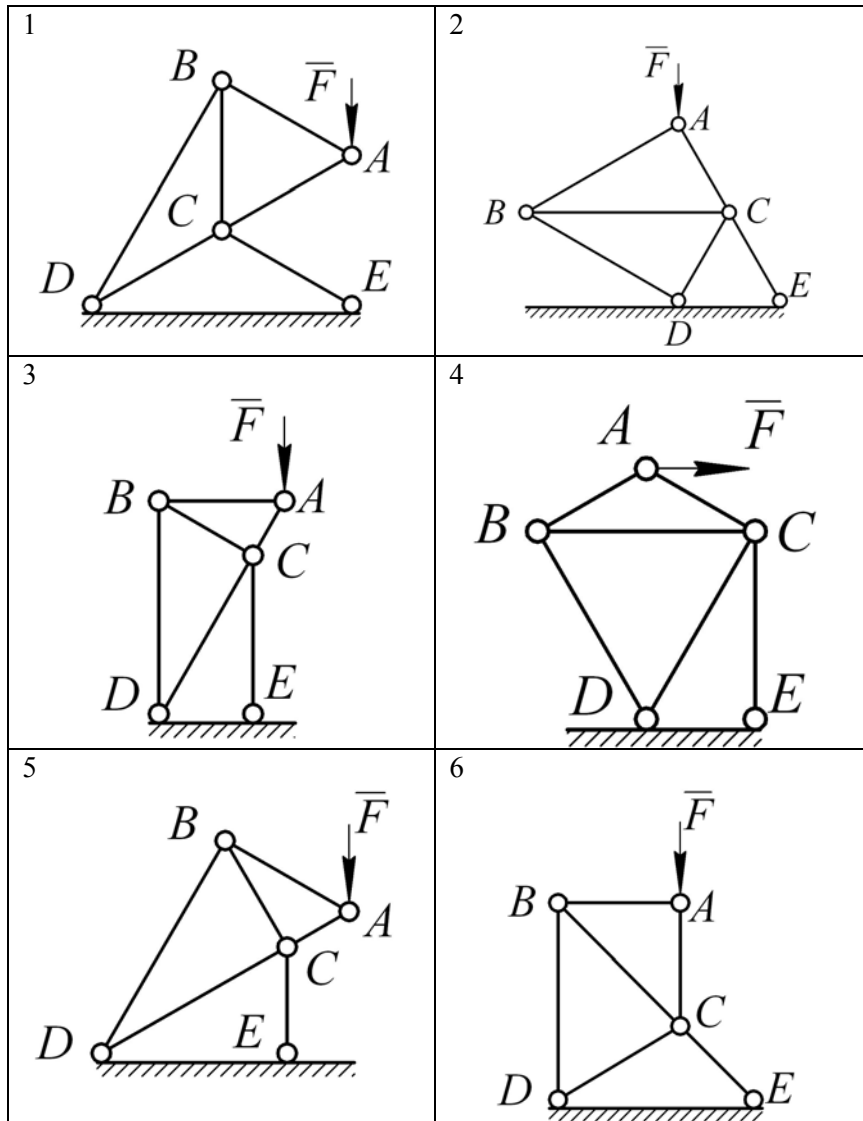
*Условие задачи 1.2.* Плоская шарнирно-стержневая конструкция закреплена на неподвижном основании и нагружена в одном шарнире вертикальной или горизонтальной силой  $F$ . Найти усилия в стержнях (в кН).

Исходные данные к задаче 1.2 приведены в таблице П1.4, а расчетные схемы — в таблице П1.5.

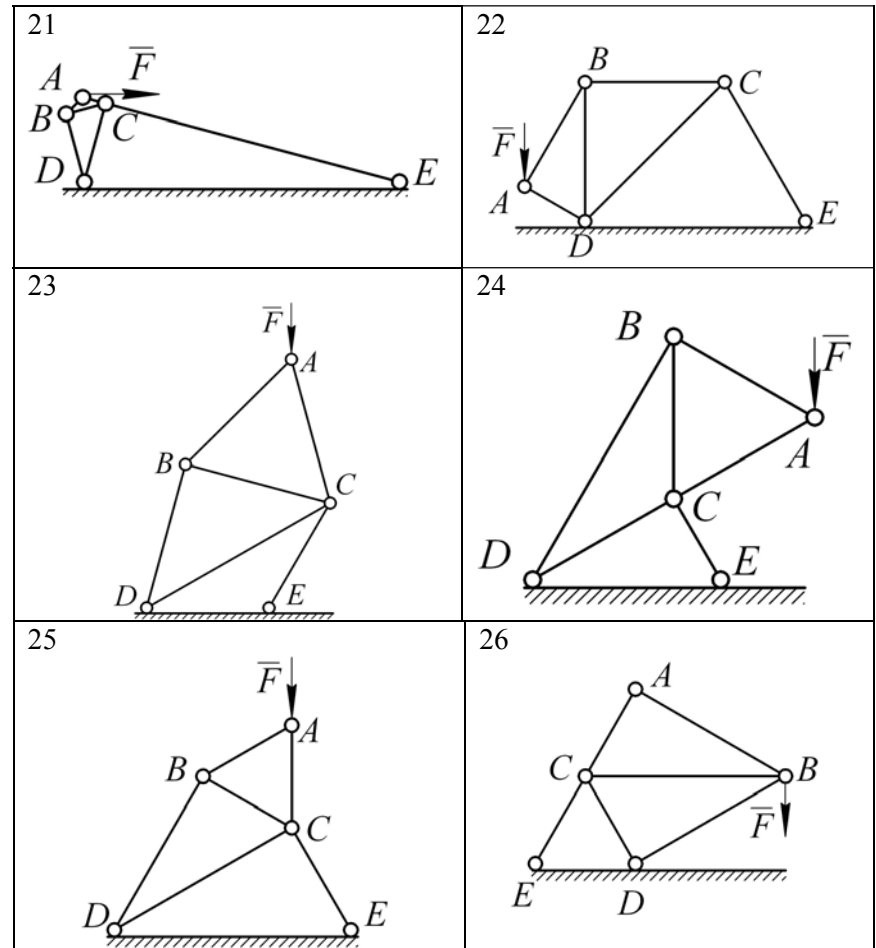
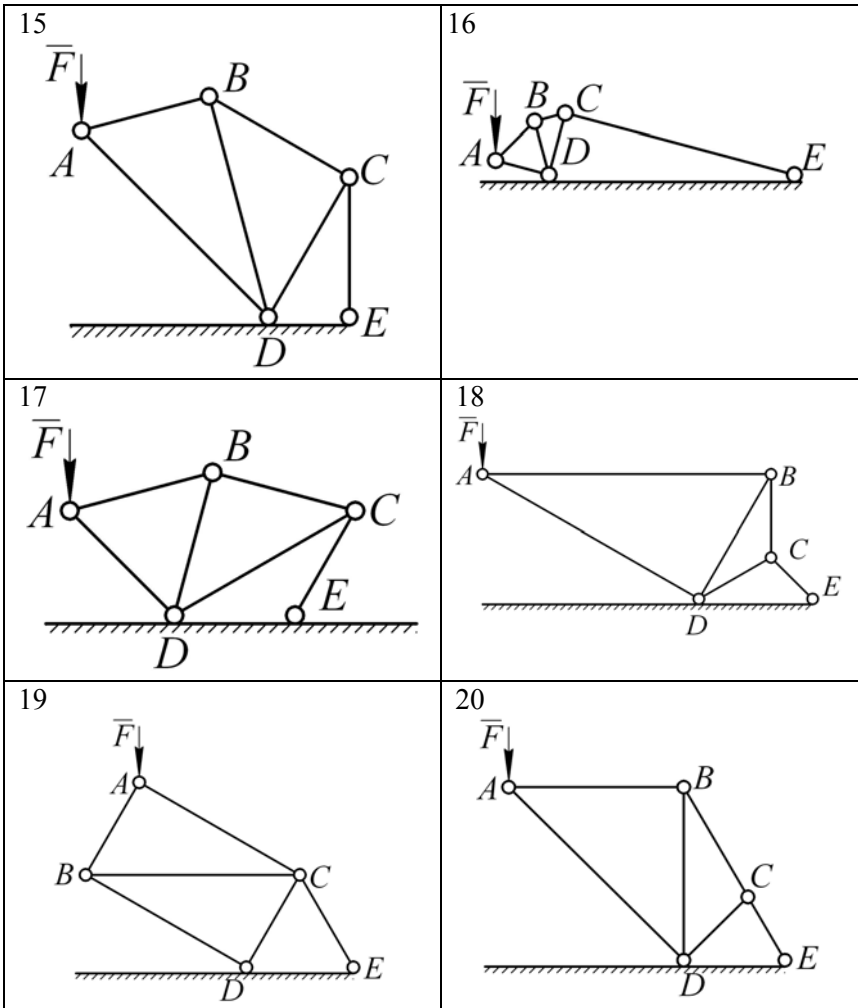
Исходные данные к задаче 1.2

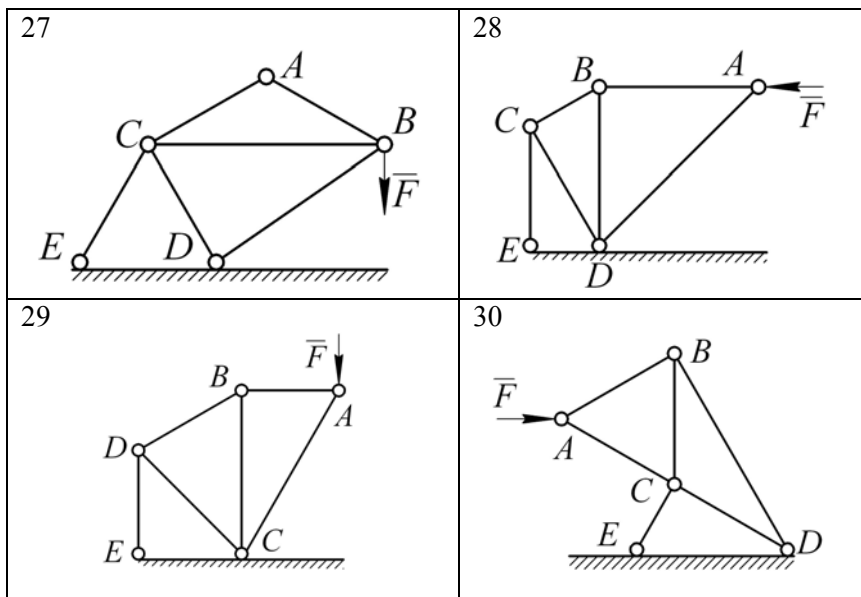
| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F$ , кН | $\angle ACB$ , град | $\angle ABC$ , град | $\angle BDC$ , град | $\angle BCD$ , град | $\angle CDE$ , град | $\angle CED$ , град |
|----------------|-------------|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 01             | 1           | 18            | 60                  | 60                  | 30                  | 120                 | 30                  | 30                  |
| 02             | 2           | 3             | 60                  | 45                  | 90                  | 60                  | 60                  | 60                  |
| 03             | 3           | 23            | 90                  | 30                  | 30                  | 90                  | 60                  | 90                  |
| 04             | 4           | 19            | 30                  | 30                  | 60                  | 60                  | 60                  | 90                  |
| 05             | 5           | 32            | 90                  | 30                  | 30                  | 90                  | 30                  | 90                  |
| 06             | 6           | 19            | 45                  | 45                  | 60                  | 75                  | 30                  | 45                  |
| 07             | 7           | 27            | 30                  | 30                  | 90                  | 60                  | 60                  | 60                  |
| 08             | 8           | 19            | 60                  | 60                  | 60                  | 30                  | 45                  | 45                  |
| 09             | 9           | 11            | 45                  | 45                  | 30                  | 60                  | 60                  | 60                  |
| 10             | 10          | 6             | 60                  | 30                  | 45                  | 45                  | 45                  | 45                  |
| 11             | 11          | 8             | 90                  | 60                  | 30                  | 60                  | 60                  | 45                  |
| 12             | 12          | 18            | 45                  | 45                  | 60                  | 30                  | 30                  | 45                  |
| 13             | 13          | 13            | 90                  | 45                  | 30                  | 90                  | 60                  | 90                  |
| 14             | 14          | 30            | 45                  | 45                  | 30                  | 60                  | 30                  | 120                 |
| 15             | 15          | 33            | 90                  | 45                  | 45                  | 90                  | 60                  | 90                  |
| 16             | 16          | 6             | 60                  | 60                  | 30                  | 60                  | 75                  | 15                  |
| 17             | 17          | 3             | 60                  | 60                  | 45                  | 45                  | 30                  | 120                 |
| 18             | 18          | 19            | 60                  | 90                  | 30                  | 120                 | 30                  | 45                  |
| 19             | 19          | 18            | 30                  | 60                  | 90                  | 60                  | 60                  | 60                  |
| 20             | 20          | 10            | 90                  | 45                  | 45                  | 105                 | 45                  | 60                  |
| 21             | 21          | 15            | 30                  | 30                  | 30                  | 60                  | 75                  | 15                  |
| 22             | 22          | 33            | 30                  | 60                  | 45                  | 45                  | 45                  | 60                  |
| 23             | 23          | 1             | 60                  | 60                  | 45                  | 45                  | 30                  | 120                 |
| 24             | 24          | 9             | 60                  | 60                  | 30                  | 120                 | 30                  | 60                  |
| 25             | 25          | 2             | 60                  | 60                  | 30                  | 60                  | 30                  | 60                  |
| 26             | 26          | 12            | 60                  | 45                  | 90                  | 60                  | 60                  | 60                  |
| 27             | 27          | 24            | 25                  | 25                  | 90                  | 60                  | 60                  | 60                  |
| 28             | 28          | 31            | 90                  | 45                  | 30                  | 90                  | 60                  | 90                  |
| 29             | 29          | 17            | 30                  | 90                  | 75                  | 45                  | 45                  | 90                  |
| 30             | 30          | 4             | 60                  | 60                  | 30                  | 120                 | 30                  | 60                  |

Расчетные схемы к задаче 1.2









### 3. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПАР СИЛ

#### 3.1. Момент силы относительно точки на плоскости

В том случае, когда тело неподвижно закреплено в какой-либо точке, а линия действия вектора силы не проходит через точку закрепления, то такая сила вызывает вращение тела вокруг этой точки (рис. 3.1).

*Центр вращения (полюс)* – точка, относительно которой тело вращается под действием силы.

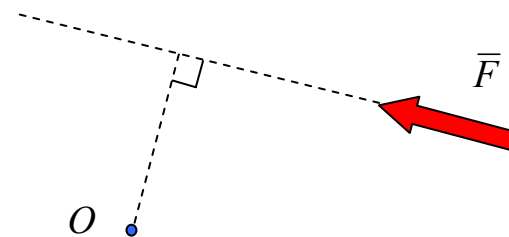


Рис. 3.1. Сила  $\vec{F}$ , связывающая вращение тела вокруг точки  $O$

Рассмотрим гайку, которую затягивают гаечным ключом определенной длины, прикладывая к концу ключа мускульное усилие. Если взять гаечный ключ в несколько раз длиннее, то прилагая то же усилие, гайку можно затянуть значительно сильнее. Из этого следует, что одна и та же сила может оказывать различное вращательное действие. Количественной мерой этого действия является момент силы. Понятие момента силы относительно точки на плоскости ввел в механику итальянский ученый и художник эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452–1519).

*Момент силы относительно точки на плоскости* – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на ее плечо (рис. 3.2.), взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

$$M_A(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (3.1)$$

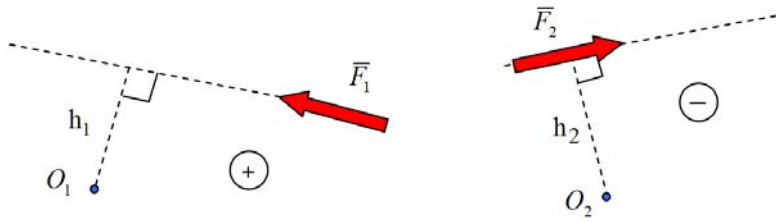


Рис. 3.2. Схема к определению момента силы относительно точки на плоскости

Точка, относительно которой берется момент, называется *центром момента*. *Плечом силы*  $h$  относительно точки называется кратчайшее расстояние от центра момента до линии действия силы.

Единица момента силы относительно точки на плоскости:

$$[M] = [F] \cdot [h] = \text{сила} \cdot \text{длина} = \text{ньютон} \cdot \text{метр} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Одна и та же сила относительно разных точек может давать и положительный и отрицательный момент (рис. 3.3).

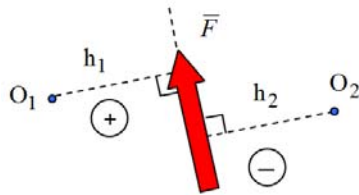


Рис. 3.3. Момент силы (+ или -) относительно разных точек на плоскости

Момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы, равен нулю, так как в этом случае плечо равно нулю.

Момент силы относительно точки не меняется при перенесении силы вдоль линии ее действия, так как модуль силы и плечо остаются неизменными (рис. 3.4).

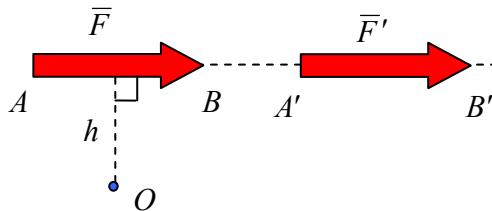


Рис. 3.4. Момент силы перемещаемой вдоль линии ее действия относительно точки

### 3.2. Пара сил и ее момент

Прежде чем рассмотреть вопрос о паре сил, хотелось бы привести краткую информацию о двух параллельных силах и о нахождении их равнодействующей.

Две параллельные силы, неравные по модулю и направленные в одну сторону, приводятся к равнодействующей, параллельной этим силам, равной их алгебраической сумме и направленной в ту же сторону.

$$R = F_1 + F_2. \quad (3.2)$$

Точка приложения равнодействующей делит отрезок между точками приложения этих сил внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил (рис. 3.5):

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (3.3)$$

**Пример 3.1.** Найти равнодействующую и ее точку приложения, если  $F_1 \parallel F_2$ ,  $F_1 = 20 \text{ Н}$ ,  $F_2 = 5 \text{ Н}$ ,  $AB = 0,4 \text{ м}$  (рис. 3.5).

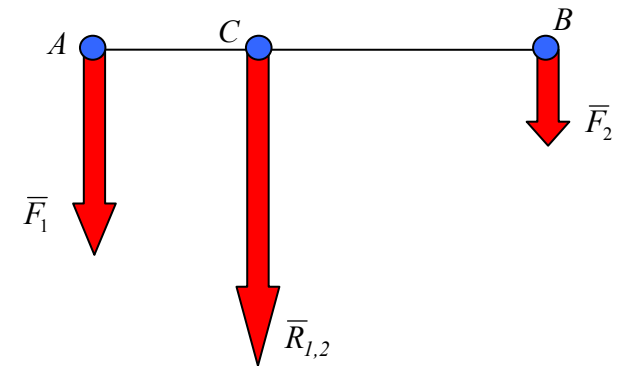


Рис. 3.5. Определение равнодействующей двух параллельных сил, направленных в одну сторону

**Решение.**

Находим равнодействующую сил  $R_{1,2} = F_1 + F_2 = 25 \text{ Н}$ .

Из условия  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}$  определяем  $BC = AB - AC$ ,

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC = F_2 \cdot (AB - AC), \quad F_1 \cdot AC + F_2 \cdot AC = F_2 \cdot AB,$$

$$AC = \frac{F_2 \cdot AB}{F_1 + F_2} = \frac{5 \cdot 0,4}{20 + 5} = 0,08 \text{ м.}$$

Тогда  $BC = 0,4 - 0,08 = 0,32 \text{ м.}$

**Ответ:**  $R = 25 \text{ Н, } AC = 0,08 \text{ м.}$

Две параллельные силы, неравные по модулю и направленные в противоположные стороны, приводятся к равнодействующей, параллельной этим силам, равной разности их модулей и направленной в сторону большей силы.

$$R = F_1 - F_2. \quad (3.4)$$

Точка приложения равнодействующей делит отрезок между приложениями сил внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям сил, и расположена за большей по модулю силой (рис. 3.6).

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{BC}. \quad (3.5)$$

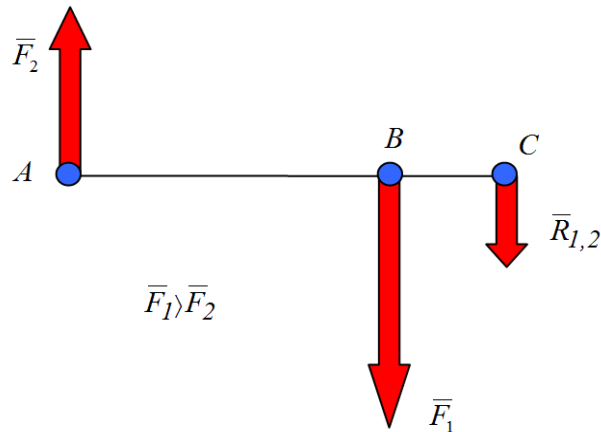


Рис. 3.6. Определение равнодействующей двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны

**Пример 3.2.** Найти равнодействующую и ее точку приложения, если  $F_1 \parallel F_2$ ,  $F_1 = 20 \text{ Н}$ ,  $F_2 = 5 \text{ Н}$ ,  $AB = 0,4 \text{ м}$  (рис. 3.6).

**Решение.**

Находим равнодействующую сил  $R_{1,2} = F_1 - F_2 = 20 - 5 = 15 \text{ Н}$ .

Из условия  $\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{BC}$  определяем  $AC = AB + BC$ ,

$$F_1 \cdot BC = F_2 \cdot AC = F_2 \cdot (BC + AB), \quad F_1 \cdot BC - F_2 \cdot BC = F_2 \cdot AB,$$

$$BC = \frac{F_2 \cdot AB}{F_1 - F_2} = \frac{5 \cdot 0,4}{20 - 5} = 0,13 \text{ м.}$$

Тогда  $AC = 0,4 + 0,13 = 0,53 \text{ м.}$

**Ответ:**  $R = 15 \text{ Н, } AC = 0,53 \text{ м.}$

Система двух параллельных сил, приложенных к одному твердому телу, равных по модулю и направленных в противоположные стороны, называется парой сил (рис. 3.7).

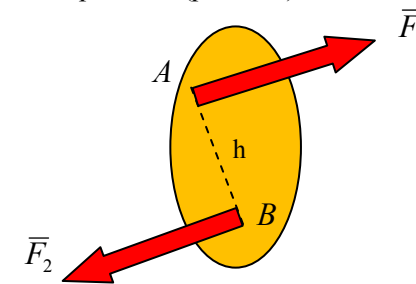


Рис. 3.7. Пара сил, приложенная к твердому телу

Мы знаем, что две равные по величине силы, действующие вдоль одной прямой в противоположных направлениях, уравниваются. Две сходящиеся силы любой величины можно сложить по правилу параллелограмма и заменить одной силой. Две параллельные силы, неравные по модулю и направленные в одну сторону или в противоположные стороны, могут быть приведены к равнодействующей. Пара сил не уравнивается, и не может быть заменена одной силой, и не может быть приведена к равнодействующей. Она, как и сила, является самостоятельной силовой единицей, характеризующей механическое взаимодействие материальных тел.

Пара производит на тело вращательное действие. Количественной мерой этого действия является момент пары. Если смотреть на плоскость, в которой она находится, то можно увидеть, что пара стремится поворачивать тело либо по ходу часовой стрелки, либо в обратном направлении. Поэтому момент пары сил является алгебраической величиной.

Момент пары сил на плоскости равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

Плечо пары сил  $h$  – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.

Пару сил обозначают  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ , а момент пары сил –  $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ .

Тогда момент пары сил, при условии, что  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ , будет равен

$$M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot h = -F_2 \cdot h = M. \quad (3.6)$$

Момент пары сил и момент силы имеют одинаковую размерность (Н·м).

Момент пары обладает следующими свойствами:

1. При переносе сил по линиям их действия момент пары не изменяется, так как при этом не изменяются ни величины сил, образующие пару, ни ее плечо.

2. Момент пары не зависит от положения центра моментов:

$$M_o(\text{пары}) = M_g(\text{пары}) = M_c(\text{пары}) = M. \quad (3.7)$$

Здесь символом  $M_o(\text{пары})$  условно обозначен момент пары относительно точки  $O$  и т.п.

Докажем это свойство. Пара состоит из двух сил, упростить ее невозможно. Поэтому, вычисляя момент пары, например, относительно точки  $O$ , найдем сумму моментов сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  относительно этой точки (рис. 3.8).

$$M_{o(\text{пары})} = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) = F_1(a+h) - F_2 \cdot a = F_1 a + F_1 h - F_2 a = F_1 \cdot h = M.$$

Таким же образом можно доказать остальную часть записанного выражения (3.7).

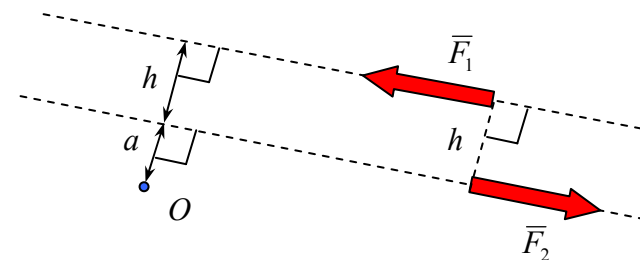


Рис. 3.8. Схема к определению независимости момента пары сил от выбора полюса

**Пример 3.3.** Силы  $(F_1, F_2)$ , равные 30 Н, образуют пару с плечом 0,5 м. Найти момент пары сил относительно точки  $O$ , если  $OB = 1,5$  м (рис. 3.9).

**Решение.**

Находим модуль момента пары сил  $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 30 \cdot 0,5 = 15$  Н·м.

Знак момента положительный, так как пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки.

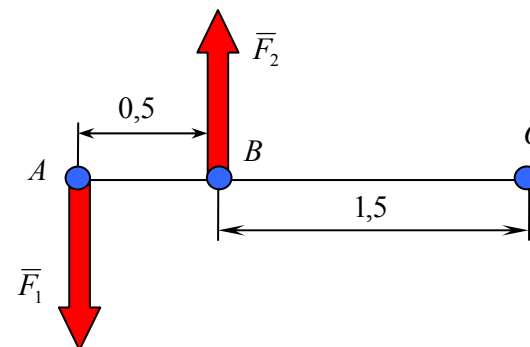


Рис. 3.9. Определение момента пары сил относительно точки  $O$

Найдем моменты сил  $F_1$  и  $F_2$  относительно точки  $O$ :

$$M_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot AO = 30 \cdot (0,5 + 1,5) = 60 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_o(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot BO = -30 \cdot 1,5 = -45 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_o(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = M_o(\vec{F}_1) + M_o(\vec{F}_2) = -45 + 60 = 15 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_o(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = M_o(\vec{F}_2, \vec{F}_1) = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, момент пары не зависит от положения точки, относительно которой вычисляются моменты сил.

3. Момент пары можно рассматривать, как момент одной из сил пары относительно той точки, к которой приложена другая сила пары:

$$M = M_B(\vec{F}_1) = M_A(\vec{F}_2). \quad (3.8)$$

В справедливости этого свойства нетрудно убедиться по рисунку 3.9, если вспомнить понятие алгебраического момента силы относительно точки.

### 3.3. Эквивалентность пар сил

Две пары сил называются эквивалентными, если, не изменяя действия данной пары сил на свободное твердое тело, ее можно заменить другой парой, расположенной в той же плоскости и имеющей тот же алгебраический момент.

Пусть на твердое тело действуют две пары сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  и  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2)$ , моменты которых алгебраически равны (рис. 3.10), т.е.

$$M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = M(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) \text{ или } F_1 \cdot a = Q_1 \cdot b.$$

Продолжим линии действия сил пары до их взаимного пересечения в точках  $A$  и  $B$ . На основании следствия из аксиом 3 и 4 перенесем силы  $F_1$  и  $F_2$  вдоль линий их действия в точки  $A$  и  $B$ . Соединим эти точки прямой линией и разложим силы  $F_1$  и  $F_2$  по направлению  $AB$  и вдоль линий действия сил  $Q_1$  и  $Q_2$ . Из равенства треугольников  $Akd$  и  $Bmn$  вытекает, что  $T_1 = T_2$  и  $S_1 = S_2$ . Силы  $T_1$  и  $T_2$  представляют собой уравновешенную систему, так как они равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположные стороны. На основании аксиомы 4 такую систему можно отбросить.

Силы  $S_1$  и  $S_2$ , представляя собой пару сил с плечом  $b$ . Таким образом, пара  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  равна паре  $(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ .

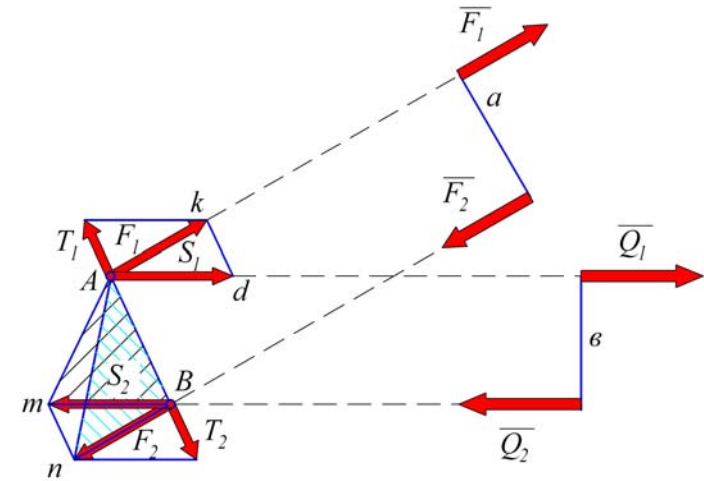


Рис. 3.10. Схема к определению эквивалентности пар сил

Рассмотрим треугольники  $AmB$  и  $AnB$ . Они имеют общее основание  $AB$ , а высоты их равны, следовательно, площадь  $\Delta AmB$  = площадь  $\Delta AnB$ .

Но удвоенная площадь  $\Delta AnB$  численно равна моменту пары  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ , а удвоенная площадь  $\Delta AmB$  численно равна моменту пары  $(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ , следовательно,  $M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = M(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$  или  $F_1 \cdot a = S_1 \cdot b$ .

По условиям теоремы  $F_1 \cdot a = Q_1 \cdot b$ , следовательно,  $S_1 \cdot b = Q_1 \cdot b$ , отсюда  $S_1 = Q_1$ ,  $S_2 = Q_2$ . Силы  $S_1$  и  $Q_1$  равны по модулю, действуют по одной прямой в одну сторону, следовательно, они эквивалентны друг другу; на этом же основании эквивалентны друг другу силы  $S_2$  и  $Q_2$ . Следовательно, пара  $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2) =$  паре  $(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ . Но выше доказано, что пара  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) =$  паре  $(\vec{S}_1, \vec{S}_2)$ .

Так как две пары порознь эквивалентны одной и той же третьей паре, то эти пары эквивалентны между собой, т. е.

$$\text{пара } (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \text{пара } (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2),$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, любые пары, расположенные в одной плоскости и имеющие одинаковые алгебраические моменты, между собой эквивалентны.

Это дает возможность не уточнять, из каких сил состоит пара и чему равно ее плечо. Поэтому пары сил на рисунках изображают при помощи условного знака в виде двух связанных антипараллельных сил, равных по величине, или круговых стрелок (рис. 3.11) с указанием только направлений, в которых эти пары стремятся поворачивать тело. В дополнение к этому дается величина (модуль) момента пары.



Рис. 3.11. Изображение пары сил на схемах (рисунках)

Из доказанной теоремы об эквивалентных парах вытекают следующие следствия:

1. Не изменяя механического состояния тела, любую пару можно преобразовывать, изменяя величину ее сил или плеча, но сохраняя величину и направление момента.

Пусть на тело действует момент  $M(\bar{F}_1, \bar{F}_2) = F_1 \cdot h_1$  (рис. 3.12). Требуется заменить эту пару эквивалентной с большим плечом  $h_2$ . По моменту  $M$  заданной пары и новому плечу  $h_2$  определим значения силы эквивалентной пары:

$$F_1' = \frac{M}{h_2} \quad (3.9)$$

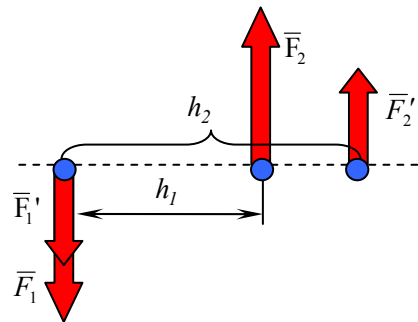


Рис. 3.12. Определение значения силы эквивалентной пары

2. Не изменяя механического состояния твердого тела, всякую пару сил можно как угодно перемещать в плоскости ее действия или переносить в другую плоскость, параллельную заданной. Действие пары при этом не изменится (это следствие применимо только к абсолютно твердому телу).

3. Действие пары сил полностью определяется ее моментом. Одному и тому же моменту может соответствовать множество различных пар. Все пары с одинаковым моментом эквивалентны по своему механическому действию.

4. Условия равновесия плоской системы параллельных сил будут справедливы, если вместе с такой системой действуют и пары сил, так как их можно повернуть в плоскости действия и поставить силы пары параллельно другим силам системы.

### 3.4. Сложение пар сил на плоскости

*Сложением пар сил* называется операция замены системы пар сил эквивалентной, но более простой системой сил. Как будет показано ниже, такой системой оказывается некоторая пара сил.

Докажем следующую теорему о сложении пар: систему пар сил, действующую в одной плоскости, можно эквивалентно заменить одной парой сил, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар.

Пусть на тело действуют три пары сил с моментами  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  (рис. 3.13, а). Пользуясь доказанной теоремой об эквивалентных парах, заменим заданные пары сил другими парами  $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ ,  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$ , и  $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ , имеющими общее плечо  $AB$  длиной  $d$ . Сохраняя численные значения моментов исходных пар, определим величины сил, образующих новые пары:

$$\begin{aligned} P_1 = P_2 &= \frac{|M_1|}{d}; \\ F_1 = F_2 &= \frac{|M_2|}{d}; \\ Q_1 = Q_2 &= \frac{|M_3|}{d}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

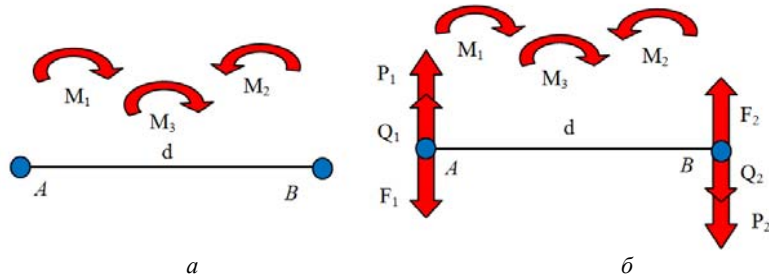


Рис. 3.13. Расчетная схема к доказательству о сложении пар

Тогда вместо заданной системы получим новую систему, эквивалентную данной, причем моменты данных и новых пар будут равны, т.е.

$$M_1 = -P_1 \cdot d = -P_2 \cdot d; \quad M_2 = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d; \quad M_3 = -Q_1 \cdot d = -Q_2 \cdot d. \quad (3.11)$$

Покажем на рисунке 3.13, б новые пары, учитывая направления моментов исходных пар.

Силы, действующие по одной прямой, заменим их равнодействующими:

$$\begin{aligned} R_1 &= P_1 + Q_1 - F_1; \\ R_2 &= P_2 + Q_2 - F_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Очевидно, что  $R_1 = R_2$  и  $R_1 \uparrow \downarrow R_2$ . Следовательно,  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$  образуют пару сил (рис. 3.14).

Момент этой результирующей пары:

$$M_{\text{рез}} = -R_1 d = -(P_1 + Q_1 - F_1)d = -P_1 d - Q_1 d + F_1 d = -M_1 + M_2 - M_3.$$

Поскольку  $M_1 < 0$ ,  $M_2 > 0$ ,  $M_3 < 0$ , то:

$$M_{\text{рез}} = -|M_1| + |M_2| - |M_3| = M_1 + M_2 + M_3. \quad (3.13)$$

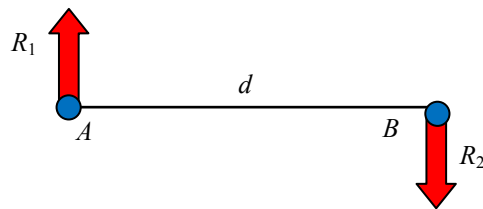


Рис. 3.14. Пара сил, образованная равнодействующими  $(\vec{R}_1, \vec{R}_2)$

Теорема доказана для системы, состоящей из трех пар. Эта система эквивалентно заменена одной парой, момент которой равен сумме алгебраических моментов заданных пар.

Полученный результат можно распространить на какое угодно число ( $n$ ) пар: любую систему пар, действующих на твердое тело в одной плоскости, можно заменить одной парой с моментом:

$$M_{\text{рез}} = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \Sigma M_i. \quad (3.14)$$

### 3.5. Условие равновесия системы пар сил

Сложение пар сил позволяет установить условие равновесия твердого тела под действием системы пар. Так как под действием одной пары сил тело будет вращаться, то в равновесии (без движения) оно может оказаться, только если силы такой пары или ее плечо будут равны нулю.

Под действием системы пар сил твердое тело может находиться в равновесии, если момент результирующей пары будет равен нулю или, что тоже самое, алгебраическая сумма моментов всех составляющих систему пар будет равна нулю:

$$M_{\text{рез}} = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n = \Sigma M_i = 0. \quad (3.15)$$

Из выражения (3.15) следует, чтобы уравновесить систему, состоящую из пар сил, необходимо приложить уравновешивающую пару, т. е. пару сил можно уравновесить другой парой сил с равными модулями и противоположно направленными моментами.

Пару сил невозможно уравновесить одной силой или какой-либо системой сил, отличной от пары сил.

**Пример 3.4.** Найти результирующую пару, которая уравновесила бы две пары сил с моментами  $M_1 = 14 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и  $M_2 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , приложенные к балке  $AB$  длиной 2 м (рис. 3.15).



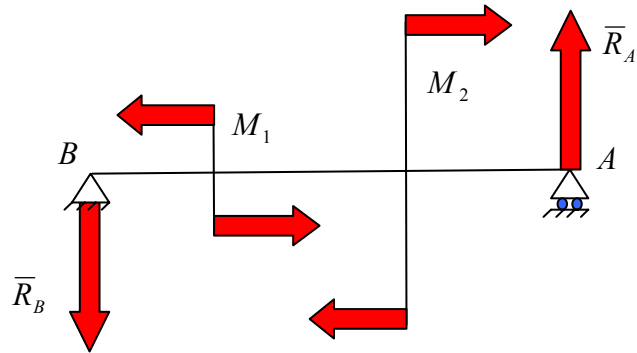


Рис. 3.15. К решению примера 3.4

**Решение.**

Используя принцип освобождения от связей, заменяем действие опор на балку реакциями  $R_A$  и  $R_B$ . Вектор силы  $\bar{R}_A$  перпендикулярен опорной поверхности. Вектор силы  $\bar{R}_B$  должен быть параллелен  $\bar{R}_A$ , так как они должны образовать эквивалентную результирующую пару.

Исходя из условия равновесия пар сил, запишем:

$$M_1 - M_2 + M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 0,$$

$$M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = M_2 - M_1 = 40 - 14 = 26 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Так как дана длина балки, то можно найти силы, образующие результирующую пару:

$$R_A = R_B = \frac{M(\bar{R}_A, \bar{R}_B)}{AB} = 13 \text{ Н}.$$

**Ответ:**  $M(\bar{R}_A, \bar{R}_B) = 26 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

Величина результирующего момента получилась с плюсом. Это означает, что направление реакций в точках  $A$  и  $B$  выбрано правильно.

**Вопросы и задания для самоконтроля**

1. Что произойдет с телом, если к нему приложить силу  $\bar{F}$  в точке  $A$  (рис. 3.16)?
2. Дайте определение центра вращения.
3. Дайте определение момента силы относительно точки на плоскости.
4. В каком случае момент силы  $\bar{F}$  относительно точки  $O$  будет иметь положительное значение (рис. 3.17)?

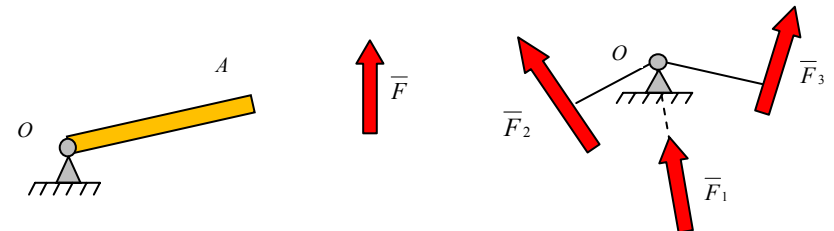


Рис. 3.16. К заданию 1

Рис. 3.17. К заданию 4

5. Выразите в математической форме определение момента силы.
6. Какое расстояние от силы  $\bar{F}$  до точки  $O$  является плечом силы относительно этой точки (рис. 3.18)?
7. Назовите единицы измерения момента силы.
8. В каком случае момент силы относительно точки  $O$  будет равняться нулю (рис. 3.19)?

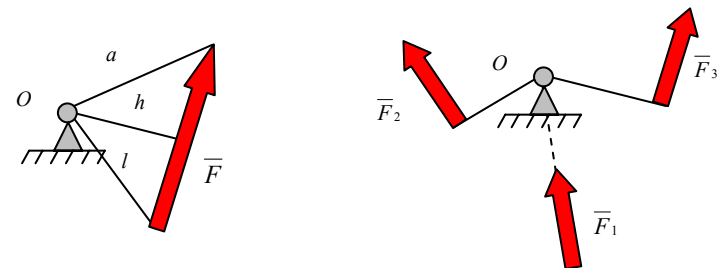


Рис. 3.18. К заданию 6

Рис. 3.19. К заданию 8

9. Определите момент силы  $F = 15$  кН относительно точки  $A$ , если сила  $\vec{F}$  приложена к телу, как показано на рисунке 3.20.  $AD = 4$  м,  $AC = 5$  м.

10. Определите, как будет располагаться равнодействующая сила двух параллельных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 3.21)?  $F_1 = 10$  кН,  $F_2 = 15$  кН,  $ab = 0,6$  м.

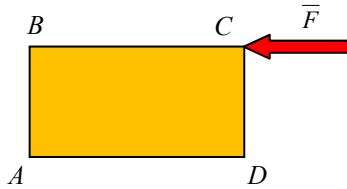


Рис. 3.20. К заданию 9

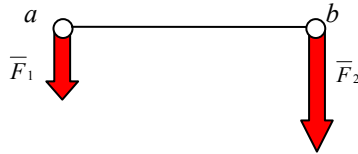


Рис. 3.21. К заданию 10

11. Чему будет равна равнодействующая двух параллельных сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 3.22)?  $F_1 = 20$  кН,  $F_2 = 10$  кН,  $ab = 0,8$  м.

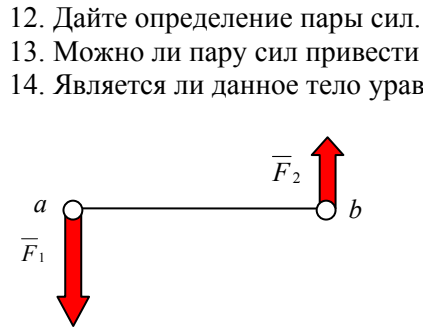


Рис. 3.22. К заданию 11

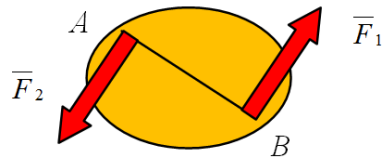
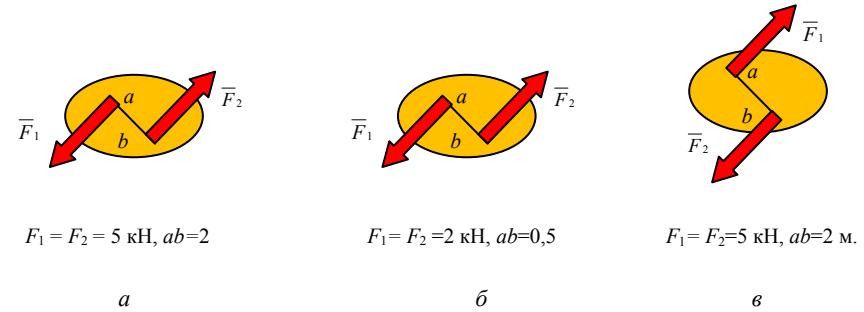


Рис. 3.23. К заданию 14

15. Какое действие оказывает на тело пара сил?
16. Как определяется момент пары сил на плоскости?
17. Какие из приведенных пар сил (рис. 3.24) соответствуют моменту равному  $M = -10$  Н·м?



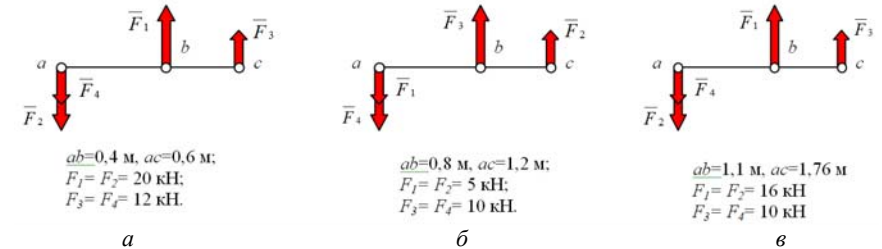
$F_1 = F_2 = 5$  кН,  $ab = 2$

$F_1 = F_2 = 2$  кН,  $ab = 0,5$

$F_1 = F_2 = 5$  кН,  $ab = 2$  м.

Рис. 3.24. К заданию 17

18. Зависит ли момент пары сил от выбора полюса?
19. Дайте определение эквивалентности пар сил.
20. В каком случае пары сил  $(F_1, F_2)$  и  $(F_3, F_4)$  будут эквивалентны (рис. 3.25)?



$ab = 0,4$  м,  $ac = 0,6$  м;  
 $F_1 = F_2 = 20$  кН;  
 $F_3 = F_4 = 12$  кН.

$ab = 0,8$  м,  $ac = 1,2$  м;  
 $F_1 = F_2 = 5$  кН;  
 $F_3 = F_4 = 10$  кН.

$ab = 1,1$  м,  $ac = 1,76$  м  
 $F_1 = F_2 = 16$  кН  
 $F_3 = F_4 = 10$  кН

Рис. 3.25. К заданию 20

21. На тело действует пара сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  (рис. 3.26, а). В каком случае механическое состояние тела под действием пары сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$  не изменится (рис. 3.26, б-з)?

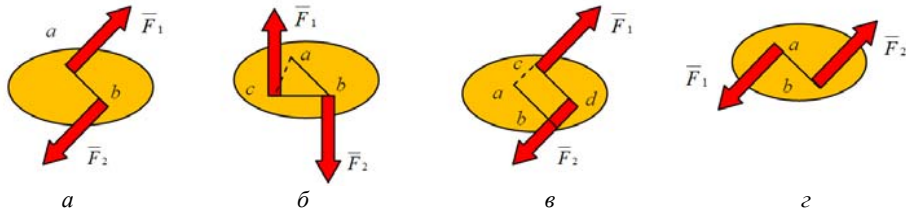


Рис. 3.26. К заданию 21

22. Что называется сложением пар?

23. Выразите в математической форме определение суммы пары сил.

24. Определите направление и величину пары сил эквивалентной парам сил, приложенным к телу (рис. 3.27).

$$M_1 = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}; M_2 = 12 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

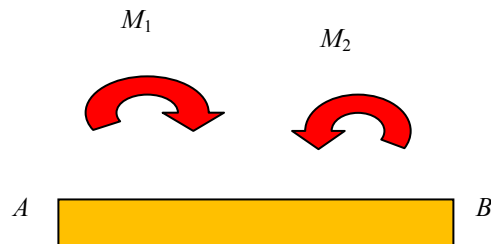


Рис. 3.27. К заданию 24

25. В каком случае тело под действием пары сил может находиться в равновесии?

26. Две силы по 100 Н образуют пару сил с плечом 0,5 м, а силы по 400 Н – пару с плечом 12,5 см. Могут ли эти пары уравновесить друг друга?

27. Можно ли уравновесить пару сил силой  $\vec{F}$ , равной по модулю силам, составляющим пару?

28. Выразите в математической форме условие равновесия системы пар сил.

29. Пара сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ , направленная по ходу часовой стрелки, уравновешивает две пары сил с моментами  $M_1$  и  $M_2$ . Как будет на-

правлен момент  $M_1$ , в случае если момент  $M_2$  направлен против хода часовой стрелки и в случае если момент  $M_2$  направлен по ходу часовой стрелки?

30. К концам отрезка длиной 1 м приложены две параллельные силы по 100 Н, направленные в противоположные стороны. Как изменится момент этой пары, если каждую силу повернуть по ходу часовой стрелки на  $60^\circ$ ?

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

### Задача 2.1. Момент силы относительно точки

**Постановка задачи.** Найти момент силы  $\vec{F}$  относительно начала координат.

#### План решения.

##### 1-ый способ.

1. Находим проекции силы на оси координат:

$$F_x = \pm F \cdot \cos \alpha; F_y = \pm F \cdot \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между осью и вектором силы. Если угол острый, то проекция положительная, если тупой – отрицательная. Если направление проекции силы совпадает с направлением оси, то проекция положительная, если не совпадает – отрицательная.

2. Определяем моменты силы относительно начала координат – точки  $O$ :

$$M_O(F_x) = \pm F_x \cdot h \text{ и } M_O(F_y) = \pm F_y \cdot h,$$

где  $h$  – плечо проекции силы относительно точки  $O$ .

Знак определяется по правилу векторного произведения. Если сила поворачивает тело относительно центра против часовой стрелки – момент положительный, по часовой стрелке – отрицательный.

3. Определяем момент  $M_O$  силы  $F$  относительно начала координат:

$$M_O(F) = \sqrt{(M_O(F_x))^2 + (M_O(F_y))^2}.$$

##### 2-ой способ.

1. Находим радиус-вектор точки приложения вектора силы относительно точки  $O$ .

2. Определяем момент  $M_O$  силы  $F$  относительно точки  $O$  по векторному произведению

$$M_O(F) = r_0 \cdot F.$$

**Пример П2.1.** Найти момент силы  $F = 20$  кН относительно начала координат при  $\alpha = 30^\circ$ .

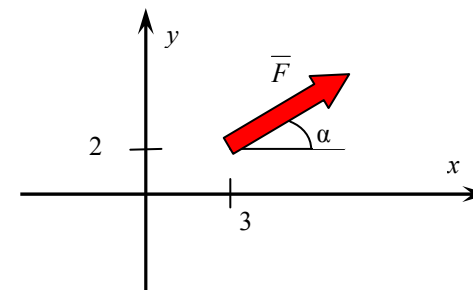


Рис. П2.1. К решению примера П2.1

#### Решение.

1. Находим проекции силы на оси координат:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha = 20 \cdot \cos 30^\circ = 17,32 \text{ кН}; F_y = F \cdot \sin \alpha = 20 \cdot \sin 30^\circ = 10 \text{ кН}.$$

Поскольку проекции силы совпадают с направлениями осей  $x$  и  $y$ , то проекции сил в обоих случаях положительные.

2. Определяем моменты  $M_O(F_x)$  и  $M_O(F_y)$ :

$$M_O(F_x) = -F_x \cdot h = -17,32 \cdot 2 = -34,64 \text{ кНм};$$

$$M_O(F_y) = F_y \cdot h = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кНм}.$$

Знак определяем по правилу векторного произведения. Проекция силы  $F_x$  поворачивает тело относительно центра по часовой стрелке, значит ее момент отрицательный. Проекция силы  $F_y$  поворачивает тело относительно центра против часовой стрелки, значит момент положительный.

3. Определяем момент  $M_O$  силы  $F$  относительно начала координат:

$$M_O(F) = \sqrt{(M_O(F_x))^2 + (M_O(F_y))^2} = \sqrt{(-34,64)^2 + 30^2} = 45,825 \text{ кНм}.$$

**Условие задачи 2.1.** Найти момент силы  $\vec{F}$  относительно начала координат. Исходные данные к задаче 2.1 приведены в таблице П2.1, а расчетные схемы – в таблице П2.2.

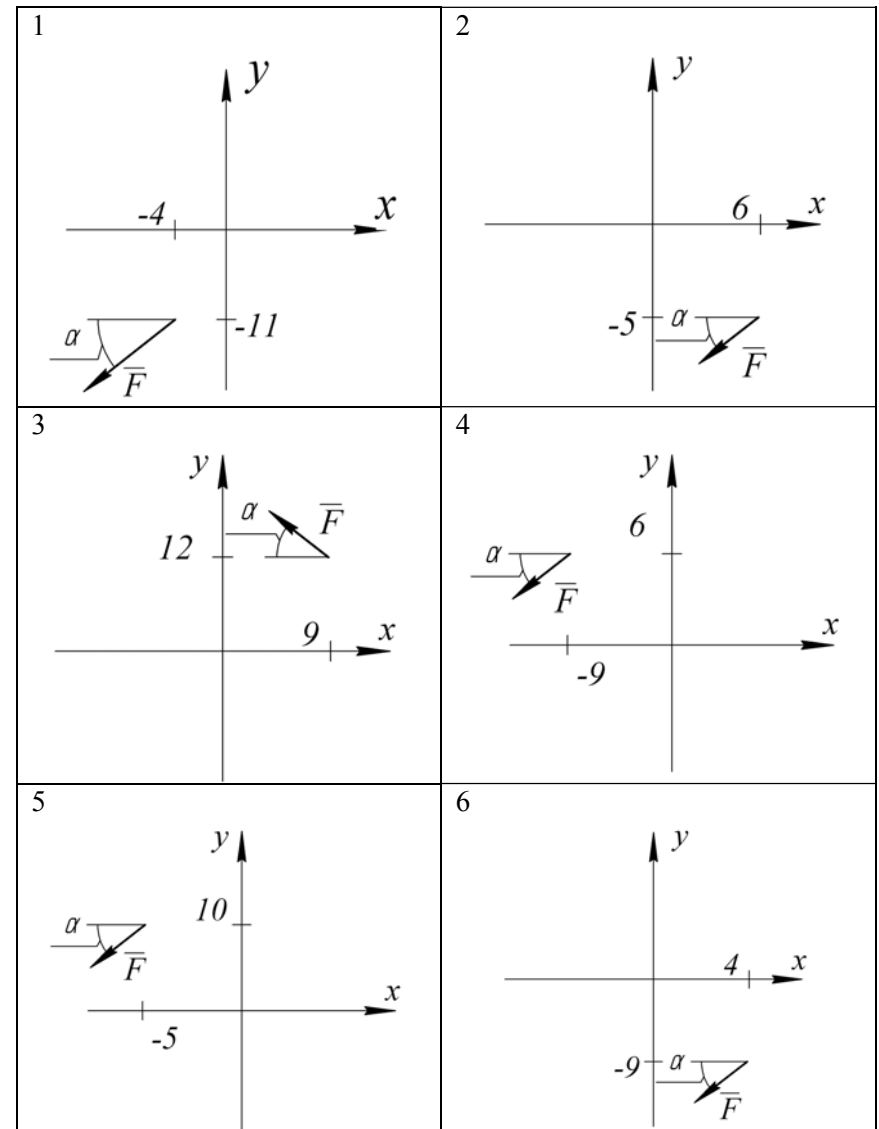
Таблица П2.1

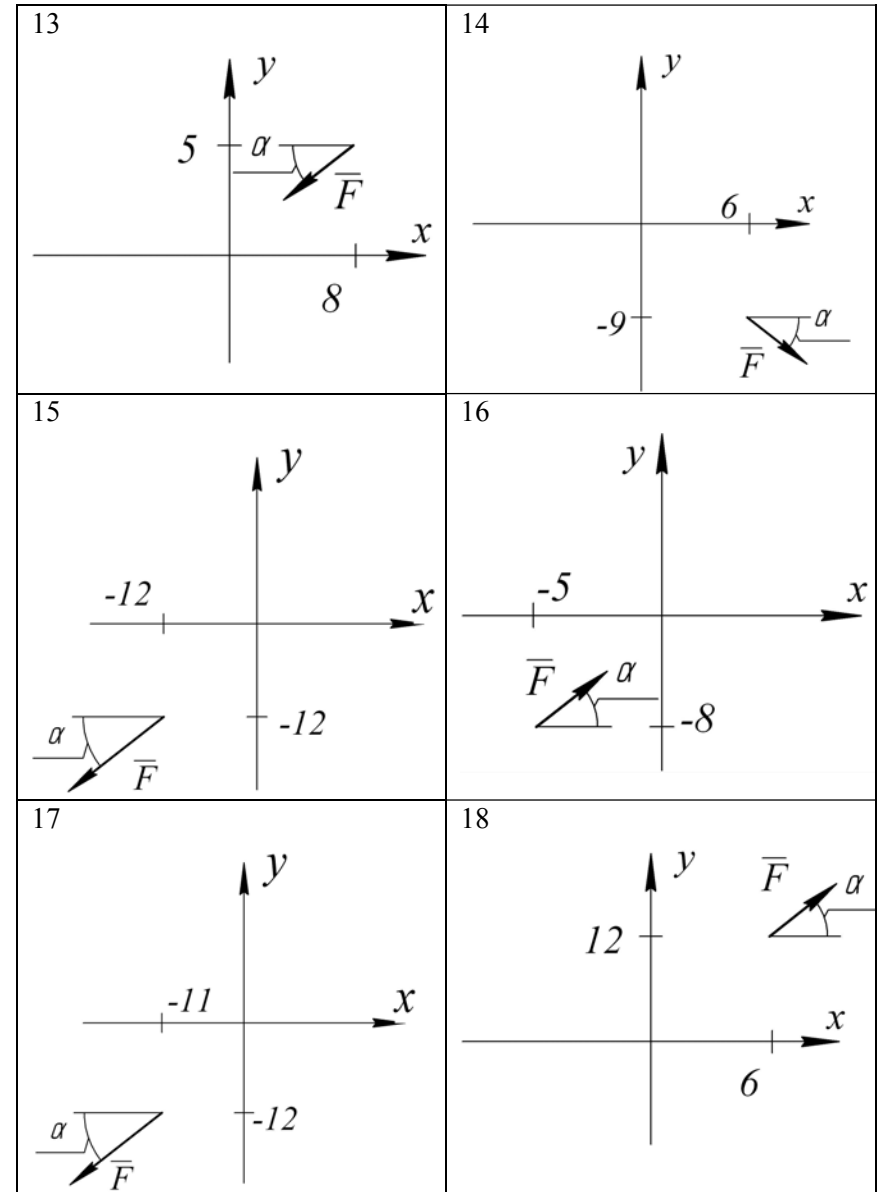
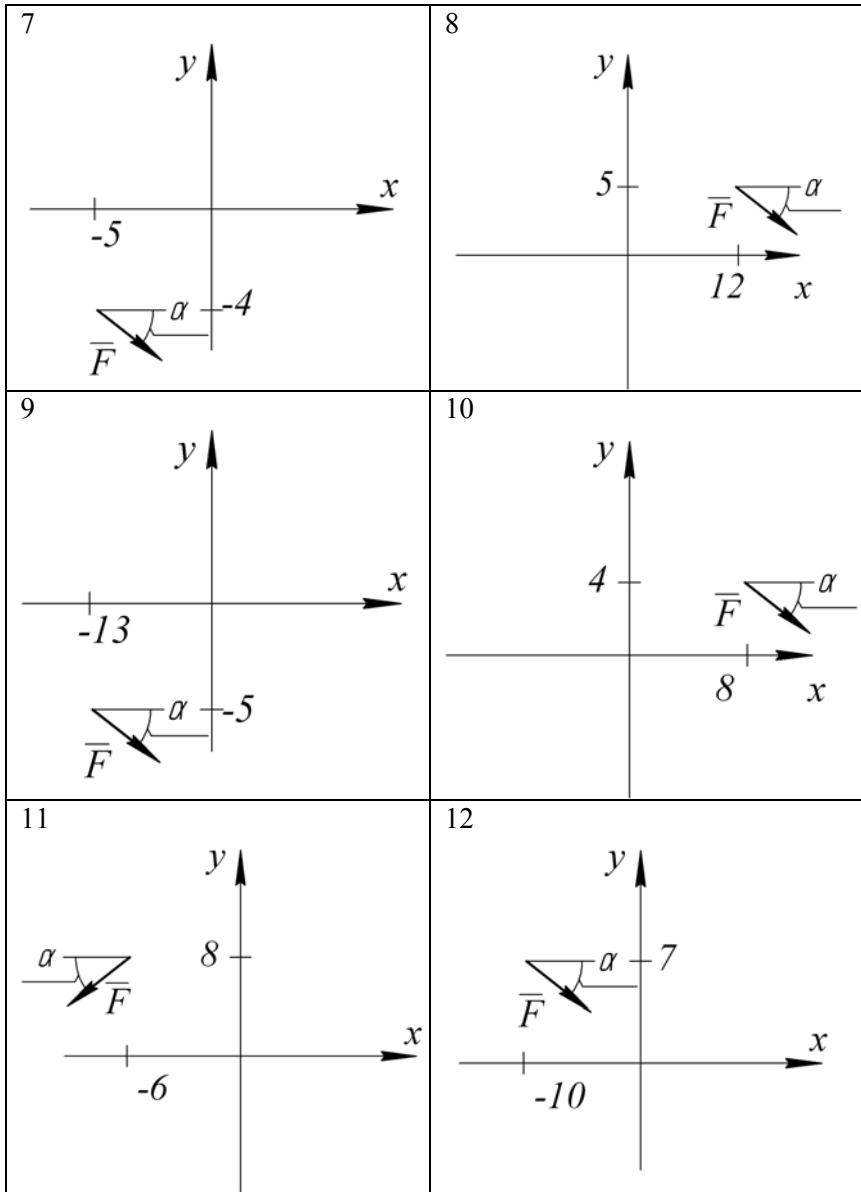
Исходные данные к задаче 2.1

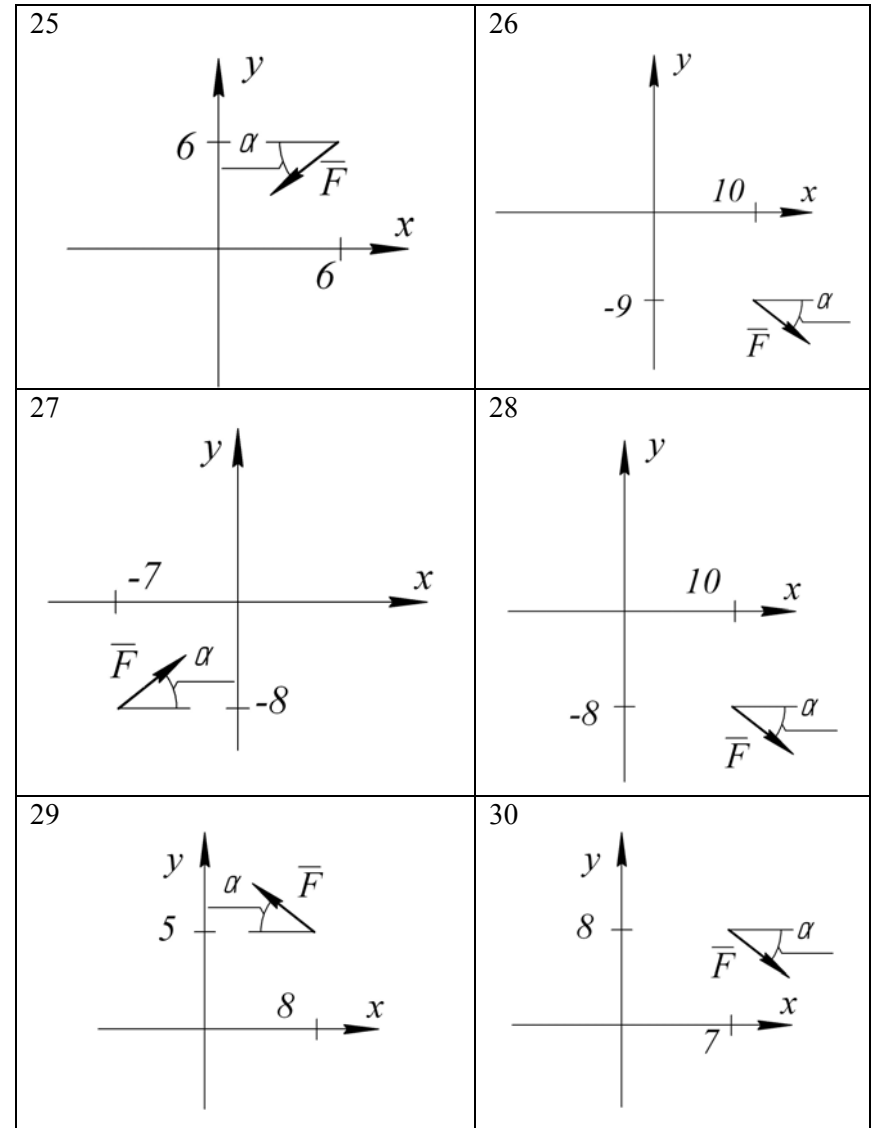
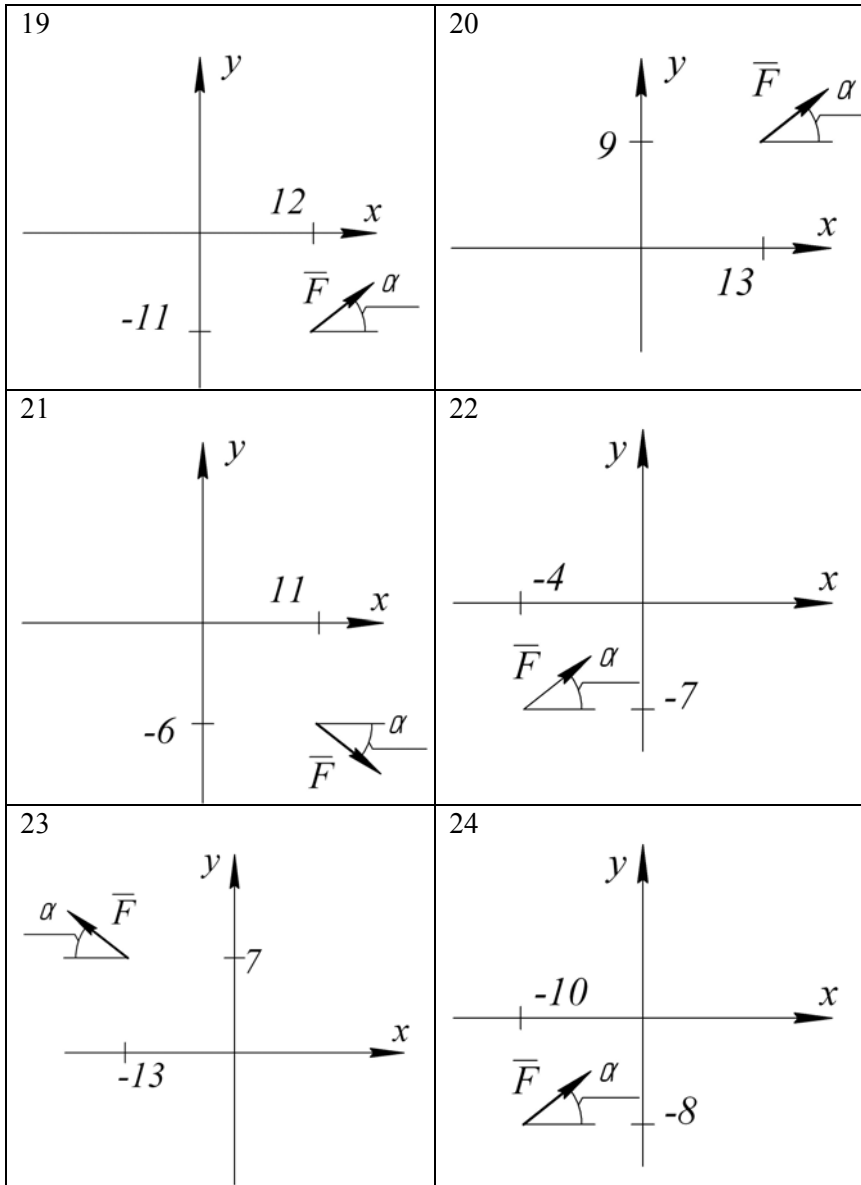
| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F$ , кН | Угол $\alpha$ , град |
|----------------|-------------|---------------|----------------------|
| 01             | 1           | 15            | 30                   |
| 02             | 2           | 20            | 45                   |
| 03             | 3           | 15            | 45                   |
| 04             | 4           | 20            | 45                   |
| 05             | 5           | 15            | 30                   |
| 06             | 6           | 10            | 30                   |
| 07             | 7           | 10            | 30                   |
| 08             | 8           | 15            | 30                   |
| 09             | 9           | 20            | 30                   |
| 10             | 10          | 20            | 45                   |
| 11             | 11          | 20            | 45                   |
| 12             | 12          | 10            | 45                   |
| 13             | 13          | 5             | 30                   |
| 14             | 14          | 15            | 45                   |
| 15             | 15          | 15            | 45                   |
| 16             | 16          | 10            | 30                   |
| 17             | 17          | 10            | 30                   |
| 18             | 18          | 5             | 45                   |
| 19             | 19          | 15            | 45                   |
| 20             | 20          | 15            | 45                   |
| 21             | 21          | 10            | 45                   |
| 22             | 22          | 5             | 45                   |
| 23             | 23          | 15            | 45                   |
| 24             | 24          | 20            | 30                   |
| 25             | 25          | 5             | 3/4                  |
| 26             | 26          | 15            | 30                   |
| 27             | 27          | 15            | 30                   |
| 28             | 28          | 10            | 45                   |
| 29             | 29          | 15            | 30                   |
| 30             | 30          | 5             | 30                   |

Таблица П2.2

Расчетные схемы к задаче 2.1







## 4. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

### 4.1. Приведение плоской системы сил к заданному центру

В плоской системе при наличии трех и более произвольно расположенных сил линии их действия не пересекаются.

Если возникла необходимость перенести линию действия одной силы параллельно ее направлению в другую точку тела, то используют правило параллельного переноса (метод Пуансо), а именно:

*механическое состояние твердого тела не изменится, если данную силу перенести параллельно самой себе в произвольную точку плоскости тела, добавив при этом соответствующую пару сил, момент которой равен моменту данной силы относительно рассматриваемой точки.*

Л. Пуансо (1777–1859) – выдающийся французский математик и физик.

Допустим, на тело в точке  $A$  действует сила  $\vec{F}$  (рис. 4.1), которую необходимо параллельно ее направлению перенести в точку  $O$ , не изменив механического состояния твердого тела.

Добавим к системе в точке  $O$  две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе, т.е.

$$\vec{F}'' = -\vec{F}' = -\vec{F} \quad (4.1)$$

Механическое состояние тела при этом не изменилось (аксиома о присоединении).

Систему сил  $(\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'')$ , эквивалентную силе  $\vec{F}$ , представим как силу  $\vec{F}'$ , перенесенную параллельно самой себе в произвольно выбранный центр приведения  $O$ , и пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$ , момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения  $O$ , являющегося заданной точкой приложения силы:

$$M(\vec{F}, \vec{F}'') = F \cdot h = M_O(\vec{F}). \quad (4.2)$$

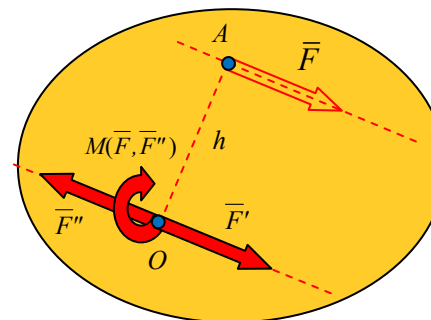


Рис. 4.1. Правило параллельного переноса (метод Пуансо)

Описанный выше перенос силы можно показать на примере. Рассмотрим колесо  $A$  радиуса  $r$ , вращающееся на оси в подшипниках (рис. 4.2). Пусть к ободу колеса по касательной приложена сила  $\vec{F}$  (такую силу называют окружной).

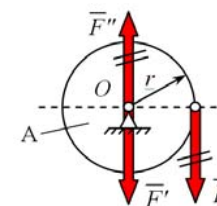


Рис. 4.2. Схема к определению действия силы  $\vec{F}$  на колесо

Для определения действия силы  $\vec{F}$  на колесо и подшипники применим метод Пуансо и перенесем эту силу параллельно самой себе на ось колеса в точку  $O$ . В результате получим силу  $\vec{F} = \vec{F}'$ , вызывающую давление на подшипники, и пару сил  $(\vec{F}, \vec{F}'')$  с моментом равным  $M_O(\vec{F}) = F \cdot r$ , которая будет вращать колесо.

Возможность параллельного переноса силы в другую точку тела по методу Пуансо позволяет привести к одной точке любое количество сил. Такую точку будем называть *центром приведения* (или просто *центром*).



К примеру, на тело действует система трех произвольных сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ . Приведем их к точке  $O$  – центру приведения (рис. 4.3, а). Перенесем параллельно линии действия векторов сил в точку  $O$  и получим систему сходящихся сил  $(\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{F}_3')$ . По методу Пуансо приложим в точке  $O$  равные и противоположно направленные силы  $\vec{F}_1'', \vec{F}_2'', \vec{F}_3''$ . Эти силы вместе с заданными образуют систему трех пар сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), (\vec{F}_2, \vec{F}_2''), (\vec{F}_3, \vec{F}_3'')$ .

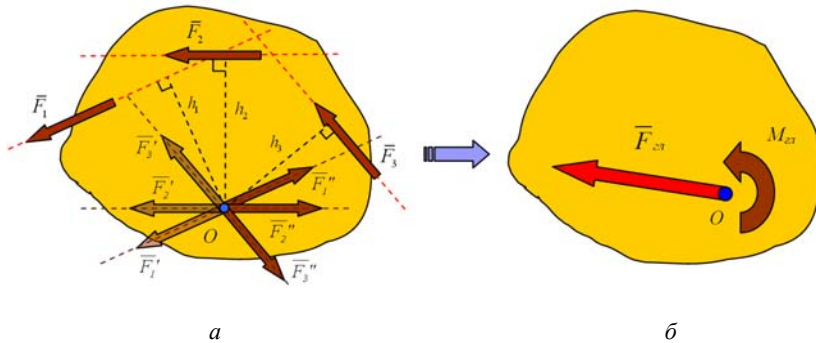


Рис. 4.3. Приведение системы произвольно расположенных сил к системе сходящихся сил и системе пар сил

Таким образом, вместо исходной системы произвольно расположенных сил получим систему сходящихся сил и систему пар сил.

Сходящиеся в центре приведения силы  $\vec{F}_1', \vec{F}_2', \vec{F}_3'$  можно сложить по правилу силового многоугольника и определить их равнодействующую (рис. 4.3, б).

Для системы произвольно расположенных сил эту равнодействующую называют главным вектором  $\vec{F}_{\text{гл}}$ , который определяется геометрической суммой всех сил данной системы

$$\vec{F}_{\text{гл}} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{\Sigma}. \quad (4.3)$$

К главному вектору применимы все законы системы сходящихся сил:

- модуль главного вектора

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(F_{ix})^2 + (F_{iy})^2}; \quad (4.4)$$

- направление главного вектора

$$\cos(F_{\text{гл}} \wedge x) = \frac{\sum F_{ix}}{F_{\text{гл}}}; \quad \cos(F_{\text{гл}} \wedge y) = \frac{\sum F_{iy}}{F_{\text{гл}}}. \quad (4.5)$$

Система пар приводится к одной результирующей паре (теорема о сложении пар), момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных сил относительно центра приведения. Для системы произвольно расположенных сил такой момент называют главным моментом.

$$M_{\text{гл}} = M_1 + M_2 + M_3 = M_0(F_1) + M_0(F_2) + M_0(F_3) = \sum M_0(F_i). \quad (4.6)$$

Таким образом, всякую плоскую систему произвольно расположенных сил можно заменить одной силой, равной главному вектору  $\vec{F}_{\text{гл}}$  и приложенной в центре приведения, и парой сил, момент которой равен главному моменту  $M_{\text{гл}}$  относительно этого центра.

Не следует считать, что главный вектор и главный момент имеют чисто формальное значение, введенное для удобства доказательства, и что их можно найти только с помощью вычислений. Нередко отдельно действующие на тело силы определить трудно или невозможно, а главный вектор или главный момент этих сил найти сравнительно легко. Так, например, число точек контакта и модули сил трения между вращающимся валом и подшипником скольжения, как правило, неизвестны, но главный момент этих сил можно определить простым измерением; второй пример: в характеристику электродвигателя входит не сила, с которой статор действует на ротор, а вращающий момент.

## 4.2. Свойства главного вектора и главного момента системы произвольно расположенных сил

Свойства главного вектора и главного момента заключаются в следующем:

1) модуль и направление главного вектора данной системы не зависят от выбора центра приведения, так как при любом центре приведения силовой многоугольник, построенный на данных силах, будет один и тот же;

2) величина и знак главного момента в общем случае зависят от выбора центра приведения, так как при перемене центра приведения меняются плечи сил, а модули их остаются неизменными;

3) главный вектор и равнодействующая системы сил векторно равны, но в общем случае не эквивалентны.

Пусть известны главный вектор  $\vec{F}_{\text{гл}}$  и главный момент  $M_{\text{гл}}$  какой-то плоской системы сил (рис. 4.4). Определим равнодействующую этой системы.

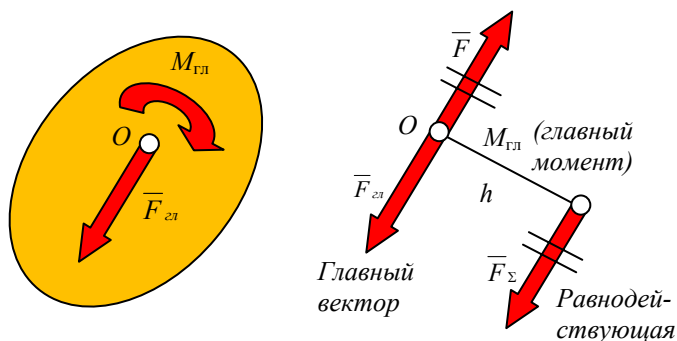


Рис. 4.4. Схема к определению равнодействующей данной системы

Пользуясь известным свойством пары сил, преобразуем главный момент  $M_{\text{гл}}$  так, чтобы силы пары  $(\vec{F}, \vec{F}_{\Sigma})$  были параллельны и по модулю равны главному вектору  $\vec{F}_{\text{гл}}$ :

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F} = \vec{F}_{\text{гл}}, \quad M_{\text{гл}} = (\vec{F}_{\Sigma}, \vec{F}). \quad (4.7)$$

Причем сила  $\vec{F}$  приложена к точке O противоположно  $\vec{F}_{\text{гл}}$ .

Далее систему  $(\vec{F}_{\Sigma}, \vec{F})$ , как взаимно уравновешенную, отбросим:

$$(\vec{F}_{\text{гл}}, M_{\text{гл}}) = (\vec{F}_{\text{гл}}, \vec{F}, \vec{F}_{\Sigma}) = \vec{F}_{\Sigma}. \quad (4.8)$$

В результате получили одну силу  $\vec{F}_{\Sigma}$  эквивалентную главному вектору и главному моменту, т. е. равнодействующую системы, причем

$$\vec{F}_{\Sigma} = \vec{F}_{\text{гл}}. \quad (4.9)$$

Модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{(\sum F_{ix})^2 + (\sum F_{iy})^2} = F_{\text{гл}}, \quad (4.10)$$

а положение линии действия равнодействующей определяется плечом  $h$  по формуле

$$h = M_{\text{гл}} / F_{\text{гл}}.$$

В результате можно считать установленным, что главный вектор и равнодействующая векторно равны, но не эквивалентны;

4) главный вектор и равнодействующая эквивалентны лишь в частном случае, когда главный момент системы равен нулю; последнее возможно в случае, когда центр приведения находится на линии действия равнодействующей.

Изучив свойства главного вектора и главного момента, укажем четыре возможных случая приведения плоской системы произвольно расположенных сил.

1.  $F_{\text{гл}} \neq 0, M_{\text{гл}} \neq 0$ , т. е. главный вектор и главный момент не равны нулю. В этом случае система сил эквивалентна равнодействующей, которая равна по модулю главному вектору, параллельна ему, направлена в ту же сторону, но по другой линии действия.

2.  $F_{\text{гл}} \neq 0, M_{\text{гл}} = 0$ . В этом случае система сил эквивалентна равнодействующей, линия действия которой проходит через центр приведения и совпадает с главным вектором.

3.  $F_{\text{гл}} = 0, M_{\text{гл}} \neq 0$ . В этом случае система эквивалентна паре. Так как модуль и направление главного вектора во всех случаях не зависят от выбора центра приведения, то в рассматриваемом случае величина и знак главного момента тоже не зависят от центра приведения, ибо одна и та же система сил не может быть эквивалентна различным парам.

4.  $F_{\text{гл}} = 0, M_{\text{гл}} = 0$ . В этом случае система сил эквивалентна нулю, т. е. находится в равновесии.

### 4.3. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сил

Если система сил имеет равнодействующую, то момент равнодействующей относительно любого центра, расположенного в плоскости действия сил, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно того же центра.

Теорему о моменте равнодействующей впервые доказал французский ученый Вариньон (1654–1722), поэтому ее называют теоремой Вариньона. Она имеет очень важное значение в механике и часто используется для доказательства многих теорем. Мы будем постоянно пользоваться ею и при решении задач.

Пусть плоская система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$  имеет равнодействующую  $\vec{F}_P$ , приложенную в точке  $O$  (рис.4.5).

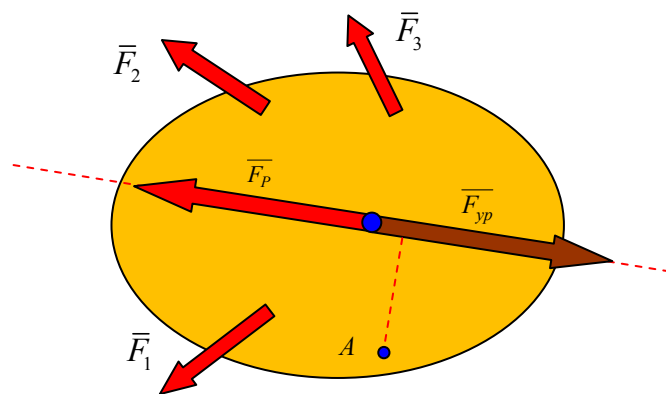


Рис. 4.5. Определение равнодействующей системы сил

Такая система не находится в равновесии, поскольку  $\vec{F}_P \neq 0$ . Уравновесим эту систему силой  $\vec{F}_{up}$ , равной равнодействующей  $\vec{F}_P$ , направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$  и уравновешивающей силы  $\vec{F}_{up}$  находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) + M_A(\vec{F}_{up}) = 0. \quad (4.11)$$

Поскольку сила  $\vec{F}_{up}$ , равная равнодействующей  $\vec{F}_P$ , направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то  $M_A(\vec{F}_{up}) = -M_A(\vec{F}_P)$ . Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) - M_A(\vec{F}_P) = 0 \quad \text{или} \quad M_A(\vec{F}_P) = \sum M_A(\vec{F}_i), \quad (4.12)$$

что и требовалось доказать.

Удобство применения теоремы Вариньона заключается в том, что, минуя непосредственное определение равнодействующей, можно вычислить ее момент относительно точки, зная моменты всех слагаемых сил относительно той же точки.

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей системы сил.

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислить плечо силы (рис. 4.6).

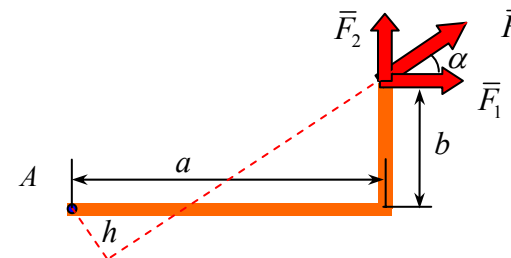


Рис. 4.6. Определение момента относительно точки A

Силу  $\vec{F}$  разложим на составляющие  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . Тогда момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $A$  можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(\bar{F}) = -F_1 \cdot b + F_2 \cdot a = -(F \cdot \cos \alpha) \cdot b + (F \cdot \sin \alpha) \cdot a.$$

**Пример 4.1.** Система сил приведена к равнодействующей. Определить момент равнодействующей  $F_{RA} = 100$  Н относительно начала координат, если  $x_A = 0,15$  м,  $y_A = 0,12$  м (рис. 4.7).

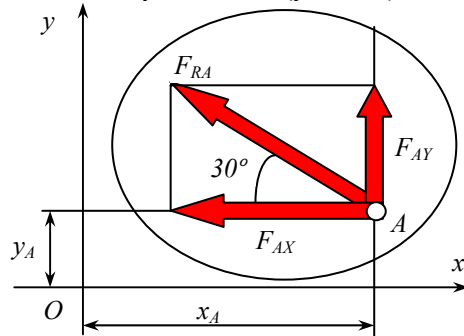


Рис. 4.7. Расчетная схема к примеру 4.1

**Решение.**

Применим теорему Вариньона

$$M_O(\bar{F}_{RA}) = M_O(\bar{F}_{AX}) + M_O(\bar{F}_{AY}).$$

Находим моменты проекций равнодействующей относительно точки  $O$ :

$$M_O(\bar{F}_{AX}) = y_A \cdot F_{RA} \cdot \cos 30^\circ = 0,12 \cdot 100 \cdot 0,866 = 10,4 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_O(\bar{F}_{AY}) = x_A \cdot F_{RA} \cdot \sin 30^\circ = 0,15 \cdot 100 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_O(\bar{F}_{RA}) = 10,4 + 7,5 = 17,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

**Ответ:**  $M_O(\bar{F}_{RA}) = 17,9 \text{ Н} \cdot \text{м}.$

#### 4.4. Условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил

Действие произвольной плоской системы сил на тело можно определить после приведения этой системы к одному центру. Если после приведения главный вектор и главный момент имеют значимые

величины, то тело будет находиться в движении. В равновесии тело будет только тогда, когда главный вектор и главный момент будут равны нулю. Учитывая определения главного вектора и главного момента, можно утверждать:

1) главный вектор  $\bar{F}_{\text{гл}}$  будет равен нулю, если геометрическая сумма проекций всех сил системы на оси координат будет равна нулю;

2) главный момент  $M_{\text{гл}}$  будет равен нулю, если алгебраическая сумма моментов пар будет равна нулю, а именно:

$$F_{\text{гл}} = 0, \quad M_{\text{гл}} = 0. \quad (4.13)$$

Но  $F_{\text{гл}} = \sum F_i$  и равенство  $F_{\text{гл}} = 0$  означает, что силовой многоугольник, построенный на силах данной системы, должен быть замкнут, следовательно, алгебраическая сумма проекций сил на каждую из двух осей координат  $x$  и  $y$  должна равняться нулю, т. е.

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0. \quad (4.14)$$

Главный момент  $M_{\text{гл}} = \sum M_0(F_i)$  и равенство  $M_{\text{гл}} = 0$  означают, что алгебраическая сумма моментов сил данной системы относительно любого центра приведения равняется нулю, следовательно:

$$\sum M(F_i) = 0. \quad (4.15)$$

Итак, для равновесия плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на оси координат  $x$  и  $y$  равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов этих сил относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.

Частным случаем системы произвольных сил является система параллельных сил.

Проведем оси координат так, чтобы одна из осей была параллельна, а другая – перпендикулярна направлениям действующих сил

(рис. 4.8). Тогда проекции всех сил на ось  $x$  будут равны нулю, а на ось  $y$  – равны модулям этих сил.

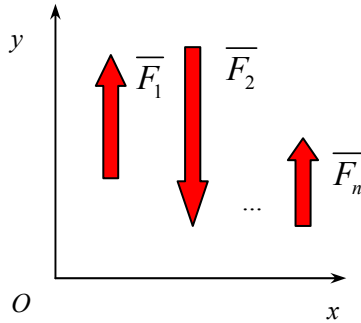


Рис. 4.8. Система параллельных сил

Уравнения равновесия для системы параллельных сил имеют вид:

$$\sum \bar{F}_{ix} = 0; \quad \sum M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (4.16)$$

Из уравнений (4.13) выводят три формы уравнений равновесия, которые используют при решении задач статики.

*Первая (основная) форма уравнений равновесия:*

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_0(\bar{F}_i) = 0, \quad (4.17)$$

т. е. для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на оси координат и алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки на этой плоскости.

*Вторая форма уравнений равновесия:*

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum F_{ix} = 0, \quad (4.18)$$

т. е. для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы моментов всех сил относительно двух любых точек плоскости и сумма проекций всех сил на какую-либо ось, не перпендикулярную к прямой, проходящей через центры моментов.

*Третья форма уравнений равновесия:*

$$\sum M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum M_B(\bar{F}_i) = 0, \quad \sum M_C(\bar{F}_i) = 0, \quad (4.19)$$

т. е. для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы моментов всех сил относительно трех любых, но не лежащих на одной прямой, точек плоскости.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение плоской системы произвольно расположенных сил.
2. Как привести силу к заданному центру?
3. Сформулируйте теорему о приведении произвольной системы сил к простейшему виду (теорема Пуансо).
4. Можно ли силу  $F = 10$  Н разложить на две параллельные составляющие, направленные в противоположные стороны, из которых одна 100 Н, а другая 110 Н? Если можно, то покажите, как это сделать.
5. Что такое главный вектор?
6. Что такое главный момент?
7. Определите главный вектор системы произвольно расположенных сил  $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3)$ , если  $F_1 = 10$  кН,  $F_2 = 20$  кН,  $F_3 = 15$  кН,  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 70^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$  (рис. 4.9).
8. На деталь с наружным диаметром  $D = 20$  мм и внутренним диаметром  $d = 10$  мм (рис. 4.10) действуют силы  $F_1 = 12$  кН и  $F_2$ . Чему равна сила  $F_2$ ?

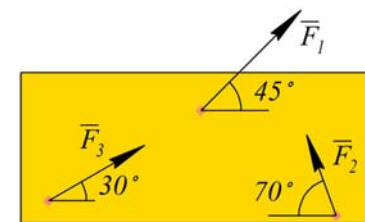


Рис. 4.9. К заданию 7

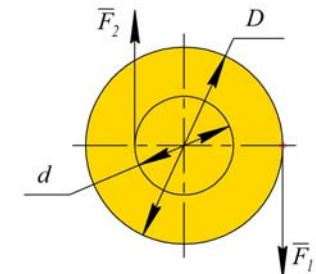


Рис. 4.10. К заданию 8

9. К концу бруса длиной 1 м, жестко заделанному в стену, приложена сила 100 Н под углом  $30^\circ$  к брусу. Определите главный вектор и главный момент заделки.

10. В чем сходство и в чем различие между главным вектором плоской системы сил и ее равнодействующей?

11. Как зависит главный момент от выбора центра приведения?

12. К какому простейшему виду можно привести произвольную пространственную систему сил, если главный вектор равен нулю, а главный момент не равен нулю?

13. К какому простейшему виду можно привести плоскую систему произвольно расположенных сил, если главный вектор не равен нулю, а главный момент равен нулю?

14. Привести к простейшему виду систему сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3)$ , изображенную на рисунке 4.11. Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  направлены к противоположным сторонам, а сила  $\vec{F}_3$  – по диагонали прямоугольника  $ABCD$ , сторона  $AD$  которого равна  $a$ .  $|F_1| = |F_2| = \frac{1}{2}|F_3| = F$ .

15. Вдоль сторон равностороннего треугольника направлены три равные по модулю силы  $|F_1| = |F_2| = |F_3| = F$ . Длина стороны треугольника  $a$  (рис. 4.12). Привести систему сил к простейшему виду.

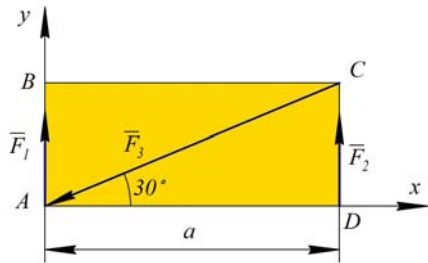


Рис. 4.11. К заданию 14

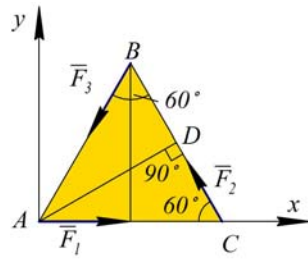


Рис. 4.12. К заданию 15

16. Сформулируйте теорему Вариньона о моменте равнодействующей.

17. Применима ли теорема Вариньона к плоской системе сходящихся сил?

18. Определите момент силы  $F = 10$  Н, приложенной к середине стороны ромба  $BC$ , относительно точки  $A$  (рис. 4.13), приложенной к ромбу  $ABCD$ .

19. Момент равнодействующей системы сил относительно точки  $O$  (рис. 4.14) равен 20 кНм. Расстояние  $BE = 1/3BC$ ,  $BC = 42$  м. Чему равна равнодействующая  $\vec{F}_R$ ?

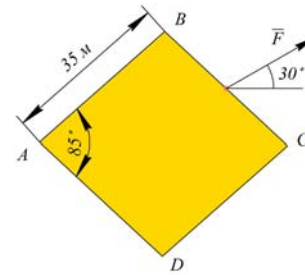


Рис. 4.13. К заданию 18

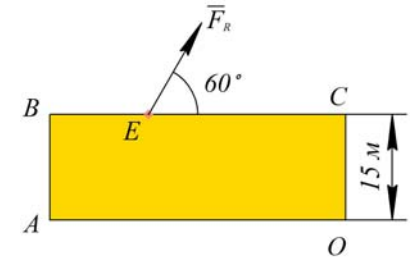


Рис. 4.14. К заданию 19

20. Сформулируйте условие равновесия плоской системы произвольно расположенных сил.

21. Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для произвольной плоской системы сил?

22. Перечислите векторные и аналитические условия равновесия произвольной плоской системы сил.

23. Сколько и какие уравнения равновесия можно составить для плоской системы параллельных сил?

24. Находится ли тело под действием сил  $F_1 = 12$  кН и  $F_2 = 15$  кН в равновесии (рис. 4.15)?

25. Составьте уравнения равновесия для системы параллельных сил, указанной на рисунке 4.16. Размеры даны в метрах.



Рис. 4.15. К заданию 24

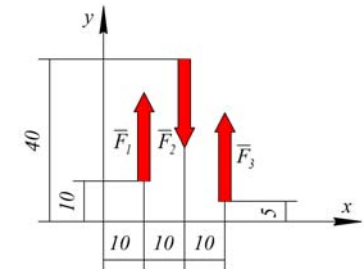


Рис. 4.16. К заданию 25

26. Тело под действием системы сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ) находится в равновесии (рис. 4.17). Как при этом будет располагаться сила  $\vec{F}_2$ ? Размеры даны в метрах.

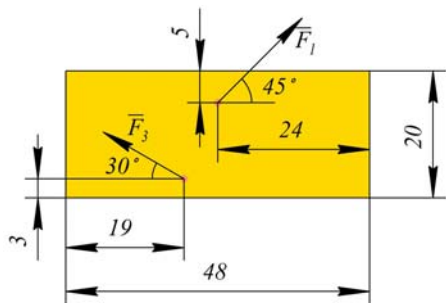


Рис. 4.17. К заданию 26

27. Брус находится в равновесии, опираясь на гладкую вертикальную стену и шероховатый горизонтальный пол. Сила тяжести бруса приложена посередине. Можно ли определить направление полной реакции пола?

28. Однородный шар весом  $\vec{G}_1$  и гири весом  $\vec{G}_2$  подвешены на веревках в точке  $O$ , как показано на рисунке 4.18. Расстояние  $OM = 40$  см. Определить, какой угол  $\varphi$  образует прямая  $OM$  с вертикалью при равновесии.

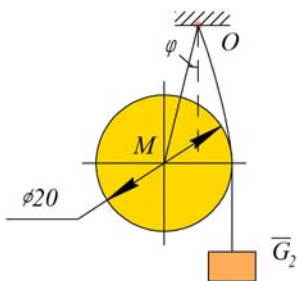


Рис. 4.18. К заданию 26

29. Два однородных стержня одинаковой длины соединены шарнирно в точке  $C$  и шарнирно закреплены в точках  $A$  и  $B$ . Вес каждого

стержня равен  $\vec{G}$ . В точке  $C$  к системе стержней подвешен груз  $\vec{Q}$ . Расстояние  $AB = d$ . Расстояние от точки  $C$  до горизонтальной прямой  $AB$  равно  $b$ . Определить реакции шарниров  $A$  и  $B$  (рис. 4.19).

30. К гладкой стене прислонена однородная лестница  $AB$  под углом  $45^\circ$  к горизонту (рис. 4.20). Вес лестницы  $20$  Н. В точке  $D$  на расстоянии, равном  $1/3$  длины лестницы, от нижнего конца находится человек весом  $60$  Н. Найти давление лестницы на опору  $A$  и на стену.

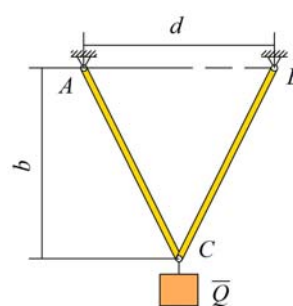


Рис. 4.19. К заданию 29

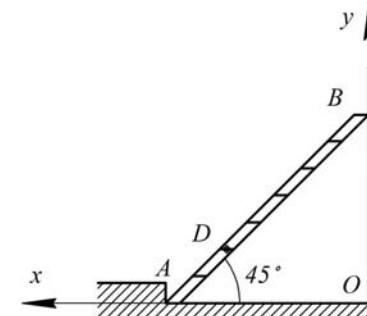


Рис. 4.20. К заданию 30

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

### Задача 3.1. Равновесие плоской системы произвольно расположенных сил

**Постановка задачи.** Определить реакции связей (опорные реакции) балок под действием плоской системы произвольно расположенных сил.

#### План решения.

1. Изображаем балку вместе с действующими активными нагрузками.
2. Выбираем расположение координатных осей, совмещая ось  $x$  с осью балки, а ось  $y$  направляем перпендикулярно оси  $x$ .
3. Производим необходимые преобразования заданных активных сил: силу, наклоненную к оси балки под углом  $\alpha$ , заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими, а равномерно распределенную нагрузку – ее равнодействующей, приложенной в середине участка распределения нагрузки.
4. Освобождаем балку от опор, заменяя их действие реакциями опор, направленными вдоль выбранных осей координат.
5. Составляем уравнения равновесия для плоской системы произвольно расположенных сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор.
6. Проверяем правильность найденных опорных реакций по уравнению, которое не было использовано для решения задачи.

**Пример ПЗ.1.** Определить опорные реакции балки, изображенной на рисунке ПЗ.1, под действием плоской системы произвольно расположенных сил.

#### Решение.

1. Изображаем балку с действующими на нее нагрузками (рис. ПЗ.1, а).
2. Выбираем расположение координатных осей  $x$  и  $y$ .
3. Силу  $F$  заменяем ее составляющими:

$$F_x = F \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 17,3 \text{ кН} \text{ и } F_y = F \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН}.$$

Равнодействующая  $q \cdot CD = 10 \cdot 2 = 20$  кН равномерно распределенной нагрузки приложена в середине участка  $CD$ , в точке  $K$  (рис. ПЗ.1, б). Освобождаем балку от опор, заменив их опорными реакциями (рис. ПЗ.1, в).

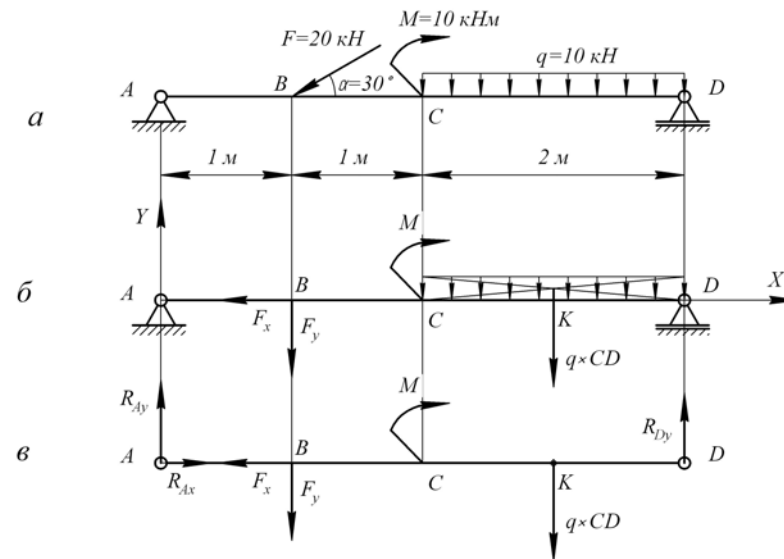


Рис. ПЗ.1. К решению примера ПЗ.1

4. Составляем уравнения равновесия балки под действием активных сил и опорных реакций и определяем неизвестные реакции опор.

Из уравнения равновесия сил, а именно суммы моментов всех действующих на балку сил, составленного относительно одной из точек опор, именно точки  $A$ , сразу определяем одну из неизвестных вертикальных реакций  $R_{Dy}$ :

$$\sum M_A(F_i) = -F_y \cdot AB - M - q \cdot CD \cdot AK + R_{Dy} \cdot AD = 0. \quad (\text{ПЗ.1})$$



$$\text{Тогда } R_{Dy} = \frac{F_y \cdot AB + M + q \cdot CD \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 10 \cdot 2 \cdot 3}{4} = 20 \text{ кН.}$$

Определяем другую вертикальную реакцию: исходя из уравнения равновесия  $R_{Ay}$  – сумма моментов всех действующих сил относительно точки  $D$ :

$$\sum M_D(F_i) = -R_{Ay} \cdot AD + F_y \cdot BD - M + q \cdot CD \cdot KD = 0. \quad (\text{ПЗ.2})$$

Тогда

$$R_{Ay} = \frac{F_y \cdot BD - M + q \cdot CD \cdot KD}{AD} = \frac{10 \cdot 3 - 10 + 10 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 10 \text{ кН.}$$

$R_{Ax}$  будем определять исходя из третьего уравнения равновесия – суммы проекций всех сил на ось  $x$ :

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} - F_x = 0. \quad (\text{ПЗ.3})$$

Откуда  $R_{Ax} = F_x = 17,3 \text{ кН.}$

Проверяем правильность найденных значений опорных реакций, для чего определим сумму проекций всех сил на ось  $Y$ .

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - F_y - q \cdot CD + R_{Dy} = 10 - 10 - 10 \cdot 2 + 20 = 0.$$

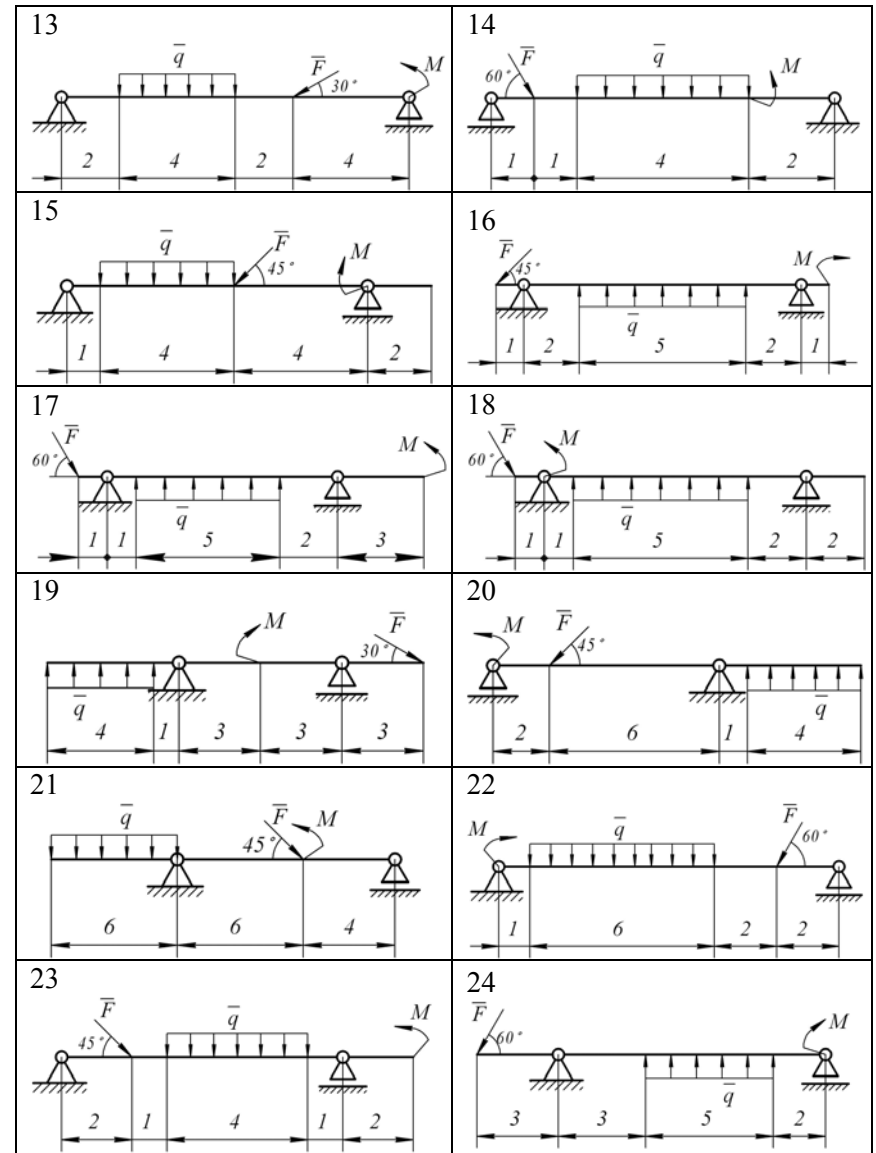
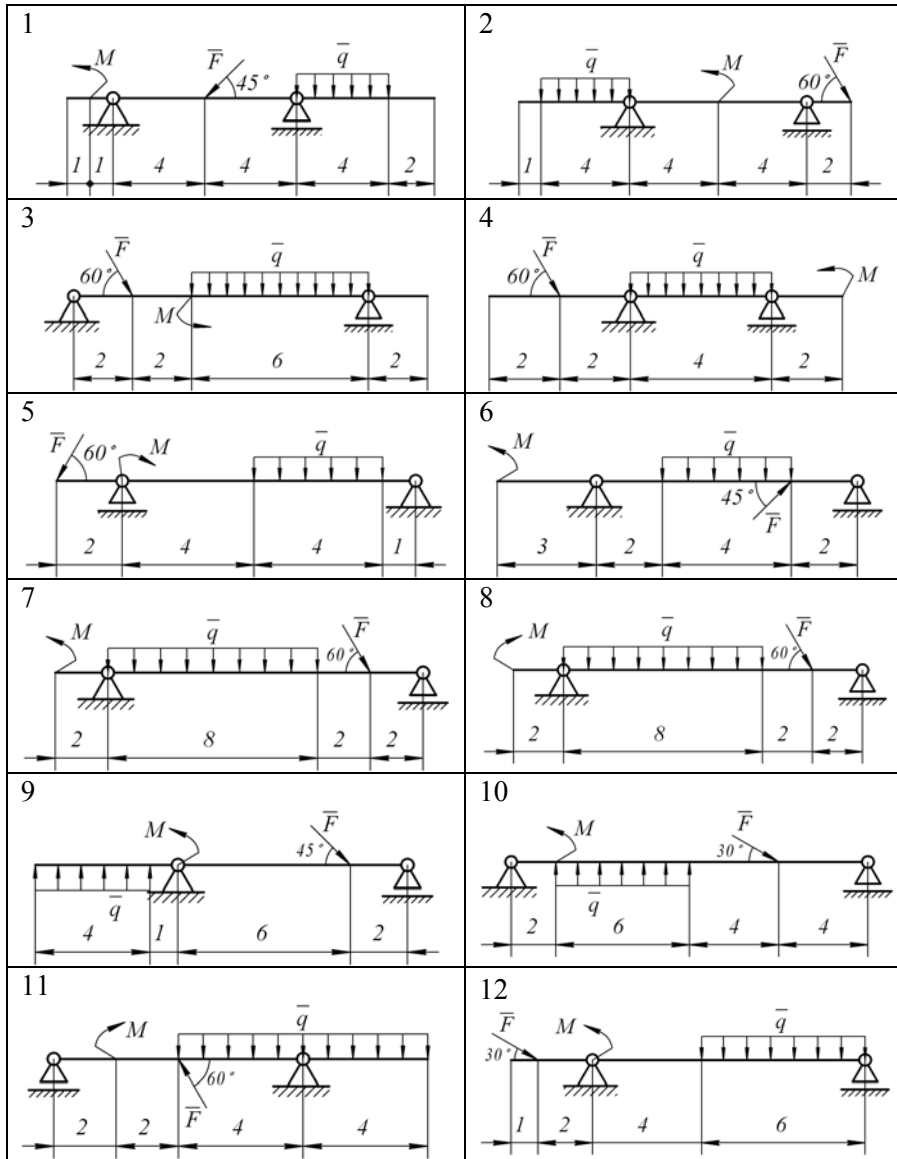
Условие равновесия  $\sum Y_i = 0$  выполняется, следовательно, опорные реакции балки под действием плоской системы произвольно расположенных сил определены верно.

*Условие задачи 3.1.* Определить опорные реакции балки под действием плоской системы произвольно расположенных сил. Необходимые для расчета данные принимаются из таблицы ПЗ.1. Размеры, указанные на расчетных схемах (таблица ПЗ.2), даны в метрах.

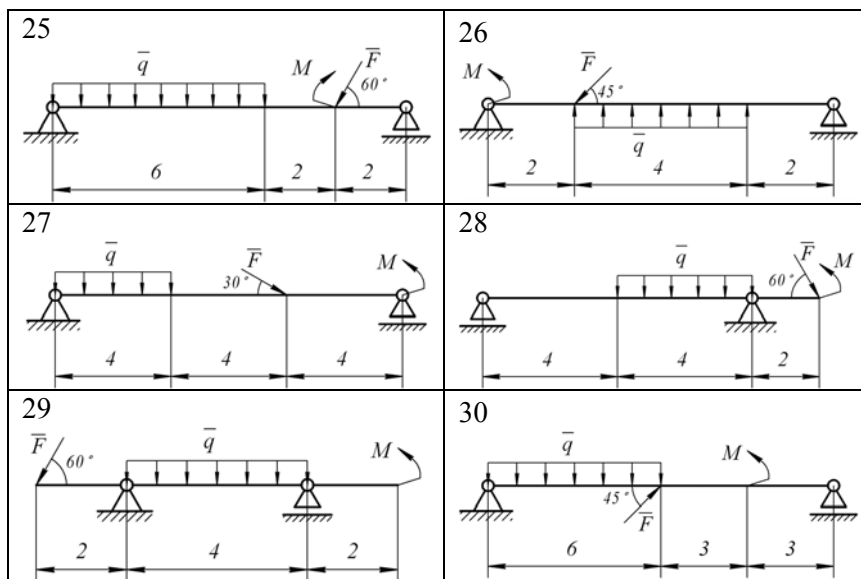
Исходные данные к задаче 3.1

| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F$ , кН | Распределенная нагрузка $q$ , кН/м | Момент $M$ , кН·м |
|----------------|-------------|---------------|------------------------------------|-------------------|
| 01             | 1           | 8             | 2                                  | 14                |
| 02             | 2           | 12            | 4                                  | 20                |
| 03             | 3           | 14            | 3                                  | 18                |
| 04             | 4           | 20            | 2                                  | 25                |
| 05             | 5           | 10            | 4                                  | 18                |
| 06             | 6           | 30            | 5                                  | 28                |
| 07             | 7           | 12            | 6                                  | 22                |
| 08             | 8           | 16            | 2                                  | 25                |
| 09             | 9           | 10            | 4                                  | 24                |
| 10             | 10          | 15            | 8                                  | 40                |
| 11             | 11          | 20            | 6                                  | 60                |
| 12             | 12          | 16            | 4                                  | 34                |
| 13             | 13          | 22            | 6                                  | 44                |
| 14             | 14          | 18            | 8                                  | 38                |
| 15             | 15          | 24            | 6                                  | 42                |
| 16             | 16          | 16            | 8                                  | 44                |
| 17             | 17          | 26            | 6                                  | 30                |
| 18             | 18          | 14            | 10                                 | 50                |
| 19             | 19          | 12            | 6                                  | 38                |
| 20             | 20          | 24            | 12                                 | 26                |
| 21             | 21          | 10            | 4                                  | 44                |
| 22             | 22          | 18            | 8                                  | 40                |
| 23             | 23          | 26            | 10                                 | 30                |
| 24             | 24          | 14            | 6                                  | 26                |
| 25             | 25          | 28            | 10                                 | 50                |
| 26             | 26          | 14            | 8                                  | 34                |
| 27             | 27          | 20            | 6                                  | 42                |
| 28             | 28          | 12            | 4                                  | 30                |
| 29             | 29          | 10            | 10                                 | 42                |
| 30             | 30          | 16            | 6                                  | 36                |

Расчетные схемы к задаче 3.1



## Задача 3.2. Равновесие плоской составной конструкции



**Постановка задачи.** Плоская рама состоит из двух частей, соединенных одним шарниром. На раму действует момент и силы. Учитывая собственный вес рамы и действующие активные силы, найти реакции опор.

**План решения.**

Составная конструкция, состоящая из двух тел, соединенных между собой шарниром, содержит четыре неизвестные реакции опор. Так как для одного тела под действием плоской системы сил можно составить только три независимых уравнения равновесия, то для определения реакций опор составной конструкции необходимо рассматривать равновесие каждой части в отдельности.

*1-й способ*

1. Расчленяем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте расчленения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела, образованного при расчленении, составляем по три уравнения равновесия.

3. Решаем систему шести уравнений. Определяем реакции опор.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

*2-й способ*

1. Расчленяем систему на два тела по сочленяющему шарниру. В месте расчленения прикладываем реакции отброшенной части. Внешние связи заменяем их реакциями.

2. Для каждого тела, образованного при расчленении, составляем уравнения моментов относительно точки сочленения. Полученные уравнения дополняем двумя уравнениями равновесия для всей конструкции в целом.

3. Решаем систему четырех уравнений. Определяем реакции опор.

4. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы.

**Пример ПЗ.2.** Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке  $C$  шарниром. На раму действует момент  $M = 100$  кНм, горизонтальная сила  $F = 20$  кН и наклонная сила  $Q = 10$  кН. Учитывая собственный вес рамы  $G$ , выраженного в виде погонного  $\rho = 4$  кН/м, найти реакции опор (рис. ПЗ.2). Дано:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 50^\circ$ ,  $AB = 4$  м,  $BC = 6$  м,  $CD = 4$  м,  $DE = 2$  м,  $KC = 2$  м,  $AN = NB$ .

**Решение.**

1-й способ.

1. Расчленим конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру  $C$ . Получаем две части (рис. ПЗ.3–ПЗ.4). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

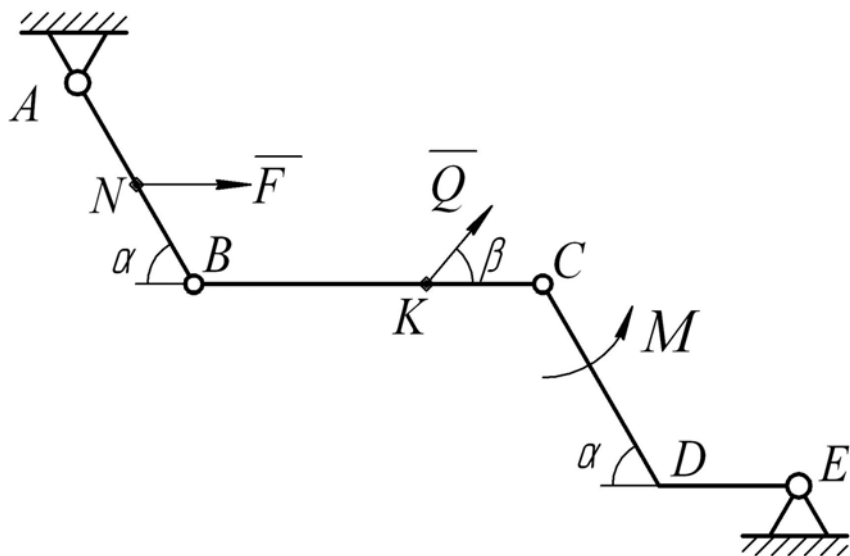


Рис. ПЗ.2. К решению примера ПЗ.2

В точке  $A$  прикладываем реакции  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$ , в точке  $E$  — реакции  $R_{Ex}$  и  $R_{Ey}$ . К каждому телу в точке  $C$  прикладываем реакции отброшенной части. Согласно 3-му закону Ньютона, реакции  $R_{Cx}$  и  $R_{Cy}$  для разных частей равны по величине и направлены в противоположные стороны.

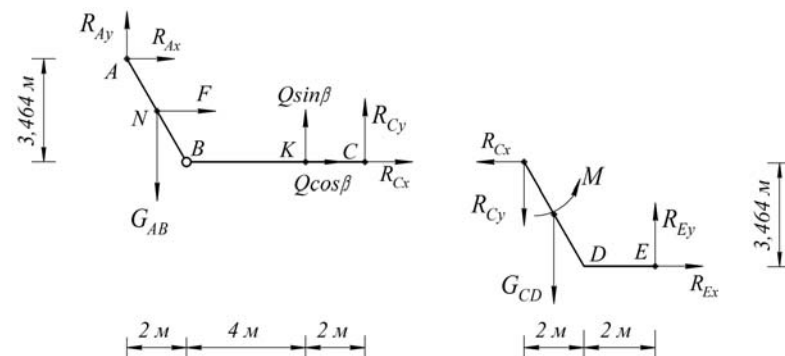


Рис. ПЗ.3. Схема действия активных и реактивных сил на левую часть конструкции

Рис. ПЗ.4. Схема действия активных и реактивных сил на правую часть конструкции

Система уравнений равновесия двух тел, образованных при разбиении, замыкается – имеем шесть уравнений равновесия (по три уравнения на каждую часть) и шесть неизвестных  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{Ex}$ ,  $R_{Ey}$ ,  $R_{Cx}$ ,  $R_{Cy}$ .

2. Для каждой отдельной части составляем по три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}^{(\text{лев})} = R_{Ax} + F + Q \cos \beta + R_{Cx} = 0, \quad (\text{ПЗ.4})$$

$$\sum F_{iy}^{(\text{лев})} = R_{Ay} + Q \sin \beta + R_{Cy} - G_{AB} - G_{BC} = 0, \quad (\text{ПЗ.5})$$

$$\sum M_C(F_i^{(\text{лев})}) = -R_{Ax} \cdot AB \cdot \sin \alpha - R_{Ay} \cdot (AB \cdot \cos \alpha + BC) - F \cdot NB \cdot \sin \alpha - Q \cdot KC \cdot \sin \beta + G_{AB} \cdot (NB \cdot \cos \alpha + BC) + G_{BC} \cdot (BC / 2) = 0, \quad (\text{ПЗ.6})$$

$$\sum F_{ix}^{(\text{прав})} = -R_{Cx} + R_{Ex} = 0, \quad (\text{ПЗ.7})$$

$$\sum F_{iy}^{(\text{прав})} = -R_{Cy} + R_{Ey} - G_{CD} - G_{DE} = 0, \quad (\text{ПЗ.8})$$

$$\sum M_C(F_i^{(\text{прав})}) = R_{Ex} \cdot CD \cdot \sin \alpha + R_{Ey} \cdot (DE + CD \cdot \cos \alpha) + M - G_{DE} \cdot (DE / 2 + CD \cdot \cos \alpha) - G_{CD} \cdot (CD / 2) \cdot \cos \alpha = 0. \quad (\text{ПЗ.9})$$

3. Решаем систему уравнений (ПЗ.4–ПЗ.9) относительно неизвестных  $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Ex}, R_{Ey}, R_{Cx}, R_{Cy}$ . Можно использовать любой способ решения системы линейных уравнений. Рекомендуем наиболее эффективный для таких систем метод исключения Гаусса.

Если для решения использовать компьютер, систему лучше записать в матричном виде, предварительно вычислив правые части системы уравнений (ПЗ.4–ПЗ.9) и коэффициенты при неизвестных. Величины сил тяжести участков вычисляем через погонный вес  $\rho$  по формуле  $G = \rho L$ , где  $L$  – длина соответствующего участка. В нашем случае:

$$G_{AB} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, G_{BC} = 4 \cdot 6 = 24 \text{ кН},$$

$$G_{CD} = 4 \cdot 4 = 16 \text{ кН}, G_{DE} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ кН}.$$

Система уравнений (ПЗ.4–ПЗ.9) имеет следующий матричный вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & X_A \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & Y_A \\ -3,464 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & & X_E \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & & Y_E \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & & X_C \\ 0 & 0 & 3,464 & 4 & 0 & 0 & & Y_C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 73,202 \\ -14,943 \\ -99,632 \\ 71,282 \\ -99,632 \\ 47,284 \end{vmatrix}$$

Результаты расчетов заносим в таблицу ПЗ.3.

Таблица ПЗ.3

Результаты определения реакций опор

| $R_{Ax}$ , кН | $R_{Ay}$ , кН | $R_{Ex}$ , кН | $R_{Ey}$ , кН | $R_{Cx}$ , кН | $R_{Cy}$ , кН |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 73,202        | -14,943       | -99,632       | 71,282        | -99,632       | 47,281        |

5. Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия для целой (нерасчлененной) системы (рис. ПЗ.5):

$$\begin{aligned} \sum M_E(F_i^{(уел)}) = & -R_{Ax} \cdot ((AB + CD) \cdot \cos \alpha + BC + DE) + M - F \cdot (NB + CD) \cdot \sin \alpha - \\ & -R_{Ax} \cdot (AB + CD) \cdot \sin \alpha - Q \cdot CD \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - \\ & -Q \cdot (KC + CD \cdot \cos \alpha + DE) \cdot \sin \beta + \\ & +G_{AB} \cdot ((NB + CD) \cos \alpha + BC + DE) + \\ & +G_{BC} \cdot (BC / 2 + CD \cdot \cos \alpha + DE) + \\ & +G_{CD} \cdot ((CD / 2) \cdot \cos \alpha + DE) + G_{DE} \cdot (DE / 2) = 0. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$\begin{aligned} \sum M_A(F_i^{(уел)}) = & R_{Ex} \cdot ((AB + CD) \cdot \cos \alpha + BC + DE) + M + F \cdot AN \cdot \sin \alpha + \\ & +R_{Ex} \cdot (AB + CD) \cdot \sin \alpha + Q \cdot AB \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta + \\ & +Q \cdot (BK + AB \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \beta - \\ & -G_{DE} \cdot (DE / 2 + (AB + CD) \cos \alpha + BC) - \\ & -G_{CD} \cdot ((AB + CD / 2) \cdot \cos \alpha + BC) - \\ & -G_{BC} \cdot (BC / 2 + AB \cdot \cos \alpha) - G_{AB} \cdot (AB / 2) \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.11})$$

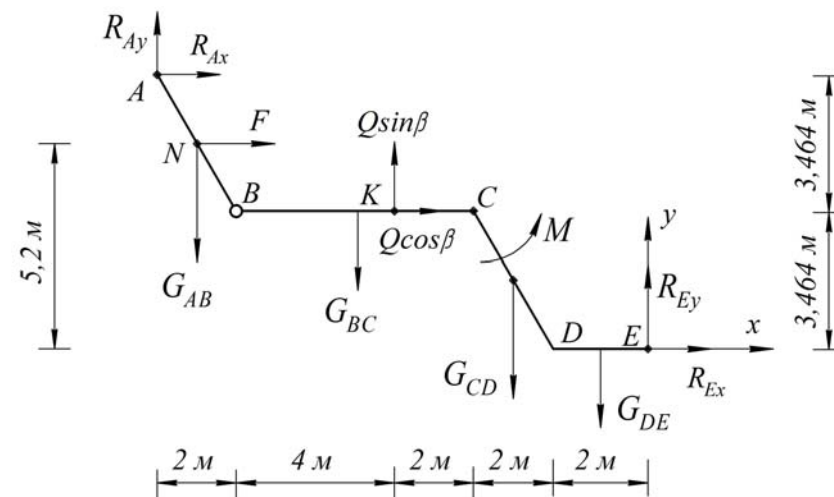


Рис. ПЗ.5. Схема к составлению уравнений равновесия для целой (нерасчлененной) системы

Подставляем в уравнения ПЗ.10 и ПЗ.11 известные активные силы и определенные выше значения реакций опор.

$$\begin{aligned} \sum M_E(F_i^{(\text{нен})}) &= -(-14,943) \cdot ((4+4) \cdot \cos 60^\circ + 6+2) + 100 - 20 \cdot (2+4) \cdot \sin 60^\circ - \\ &- 73,202 \cdot (4+4) \cdot \sin 60^\circ - 10 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 50^\circ - \\ &- 10 \cdot (2+4 \cdot \cos 60^\circ + 2) \cdot \sin 50^\circ + 16 \cdot ((2+4) \cos 60^\circ + 6+2) + \\ &+ 24 \cdot (6/2 + 4 \cdot \cos 60^\circ + 2) + 16 \cdot ((4/2) \cdot \cos 60^\circ + 2) + 8 \cdot (2/2) = 0. \\ \sum M_A(F_i^{(\text{нен})}) &= 71,282 \cdot ((4+4) \cdot \cos 60^\circ + 6+2) + 100 + 20 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ + \\ &+ (-99,632 \cdot (4+4) \cdot \sin 60^\circ + 10 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ \cdot \cos 50^\circ + \\ &+ 10 \cdot (4+4 \cdot \cos 60^\circ) \cdot \sin 50^\circ - 8 \cdot (2/2 + (4+4) \cos 60^\circ + 6) - \\ &- 16 \cdot ((4+4/2) \cdot \cos 60^\circ + 6) - 24 \cdot (6/2 + 4 \cdot \cos 60^\circ) - 16 \cdot (4/2) \cdot \cos 60^\circ = 0. \end{aligned}$$

### 2-й способ

1. Расчленим конструкцию на два тела по сочленяющему шарниру  $C$ . Получаем две части (рис. ПЗ.3–ПЗ.4). Внешние связи конструкции заменяем реакциями.

2. Относительно шарнира  $C$  для каждой части конструкции составляем уравнения моментов (ПЗ.6) и (ПЗ.9). Для всей системы в целом составляем уравнения моментов (ПЗ.10, ПЗ.11) относительно опор  $A$  и  $E$ .

3. Решаем систему четырех уравнений (ПЗ.6, ПЗ.9, ПЗ.10, ПЗ.11) относительно четырех неизвестных, замечая, что система распадается на две: уравнения (ПЗ.6) и (ПЗ.10) для  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  и уравнения (ПЗ.9) и (ПЗ.11) для  $R_{Ex}$  и  $R_{Ey}$ .

Делаем проверку решения, составляя уравнения равновесия целой (нерасчлененной) системы (рис. ПЗ.5):

$$\sum F_{ix}^{(\text{нен})} = R_{Ax} + F + Q \cos \beta + R_{Ex} = 0,$$

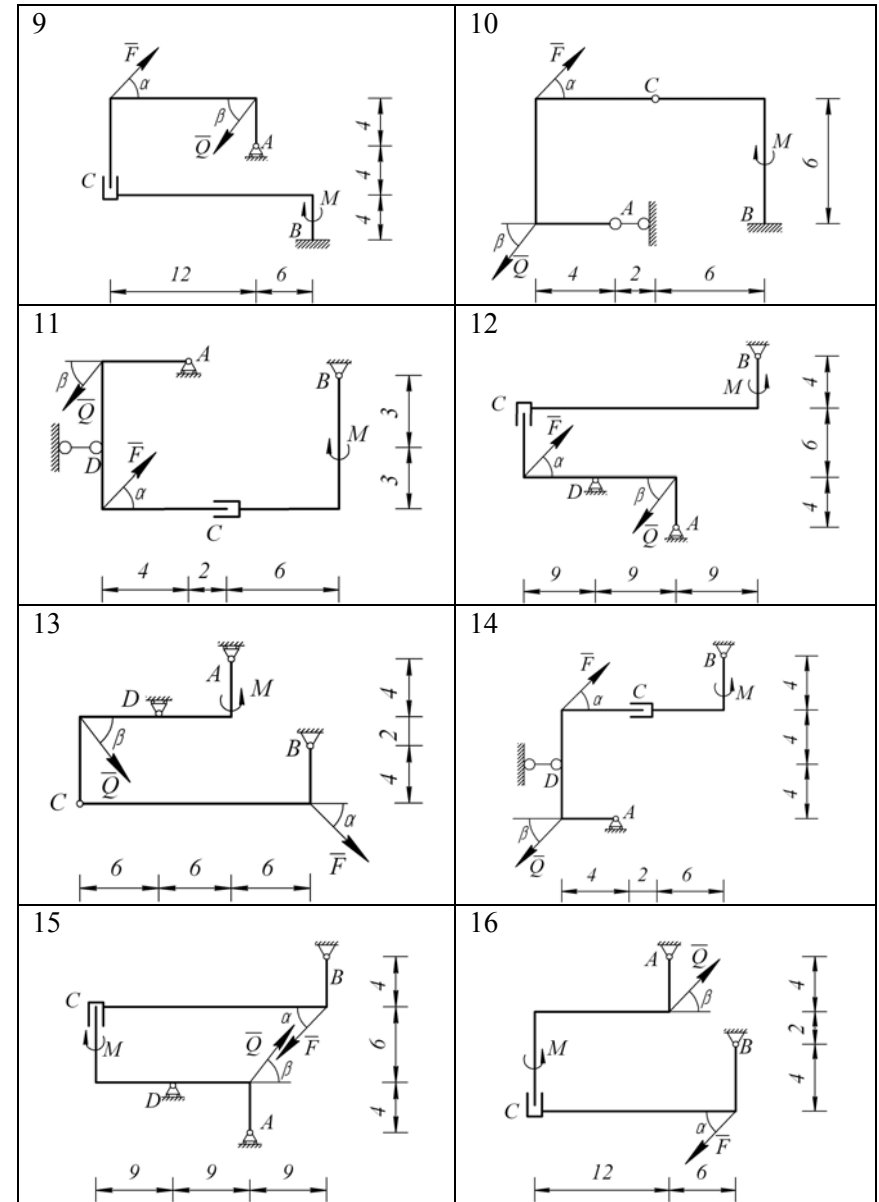
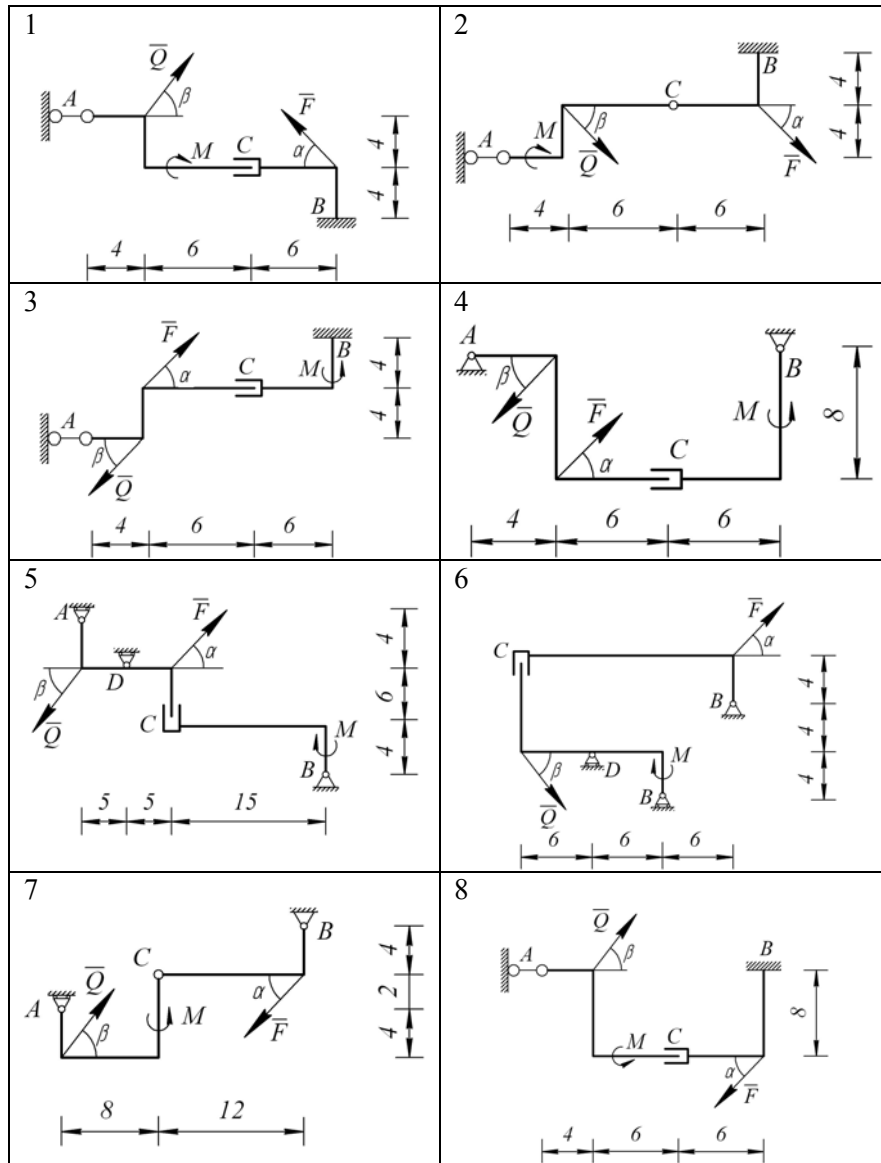
$$\sum F_{iy}^{(\text{нен})} = R_{Ay} + Q \sin \beta - G_{AB} - G_{BC} + R_{Ey} - G_{CD} - G_{DE} = 0.$$

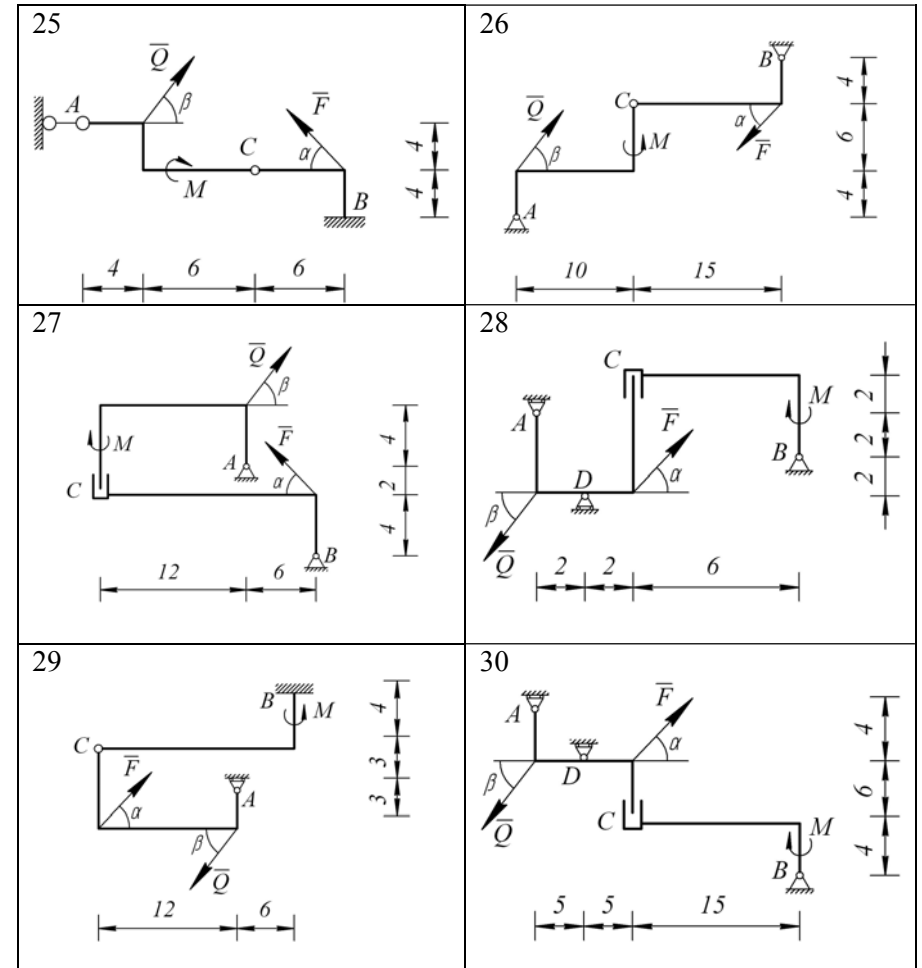
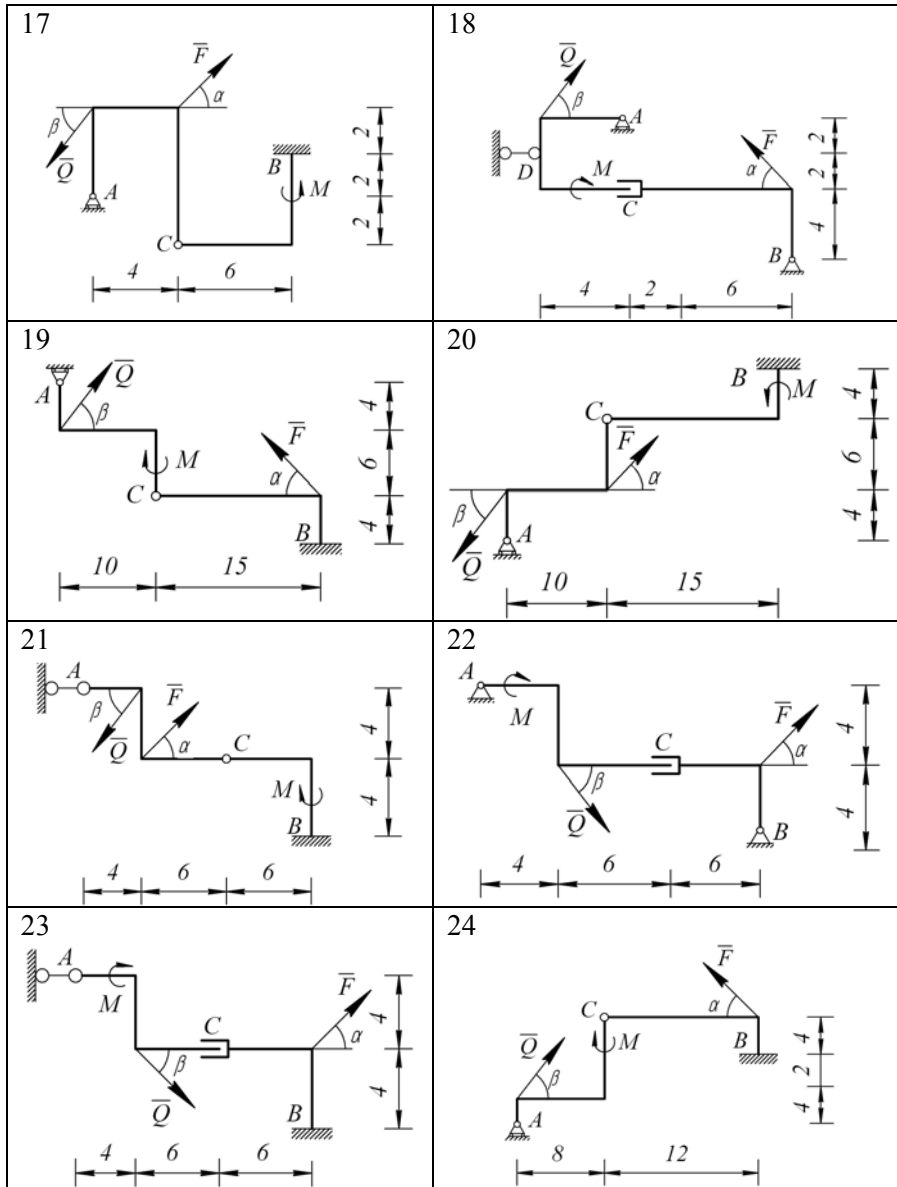
*Условие задачи 3.2.* Плоская рама состоит из двух частей, соединенных в точке  $C$  шарниром или скользящей заделкой. На раму действуют: момент  $M$ , наклонные силы  $F$  и  $Q$ , собственный вес рамы  $G$  в виде  $\rho$ . Исходные данные для задачи 3.2 приведены в таблице ПЗ.4. Размеры на расчетных схемах (таблица ПЗ.5) даны в метрах.

Исходные данные к задаче 3.2

| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F$ , кН | Сила $Q$ , кН | Угол $\alpha$ , град | Угол $\beta$ , град | Погонный вес $\rho$ , кН/м | Момент $M$ , кНм |
|----------------|-------------|---------------|---------------|----------------------|---------------------|----------------------------|------------------|
| 01             | 1           | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 6                          | 90               |
| 02             | 2           | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 5                          | 60               |
| 03             | 3           | 30            | 40            | 30                   | 45                  | 6                          | 50               |
| 04             | 4           | 10            | 20            | 30                   | 60                  | 2                          | 70               |
| 05             | 5           | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 4                          | 110              |
| 06             | 6           | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 4                          | 30               |
| 07             | 7           | 30            | 40            | 30                   | 45                  | 1                          | 50               |
| 08             | 8           | 10            | 20            | 30                   | 60                  | 6                          | 90               |
| 09             | 9           | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 6                          | 100              |
| 10             | 10          | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 5                          | 60               |
| 11             | 11          | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 4                          | 80               |
| 12             | 12          | 40            | 50            | 60                   | 45                  | 4                          | 20               |
| 13             | 13          | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 3                          | 100              |
| 14             | 14          | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 4                          | 60               |
| 15             | 15          | 20            | 30            | 60                   | 30                  | 4                          | 40               |
| 16             | 16          | 40            | 50            | 60                   | 45                  | 2                          | 110              |
| 17             | 17          | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 5                          | 120              |
| 18             | 18          | 10            | 20            | 30                   | 60                  | 4                          | 110              |
| 19             | 19          | 30            | 40            | 30                   | 45                  | 5                          | 130              |
| 20             | 20          | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 5                          | 40               |
| 21             | 21          | 10            | 20            | 30                   | 60                  | 5                          | 70               |
| 22             | 22          | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 2                          | 80               |
| 23             | 23          | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 6                          | 80               |
| 24             | 24          | 20            | 30            | 60                   | 30                  | 5                          | 60               |
| 25             | 25          | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 5                          | 90               |
| 26             | 26          | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 1                          | 60               |
| 27             | 27          | 50            | 60            | 45                   | 30                  | 2                          | 120              |
| 28             | 28          | 60            | 70            | 45                   | 60                  | 4                          | 30               |
| 29             | 29          | 30            | 40            | 30                   | 45                  | 2                          | 30               |
| 30             | 30          | 40            | 50            | 60                   | 45                  | 5                          | 10               |

Расчетные схемы к задаче 3.2







### Задача 3.3. Расчет системы трех тел, соединенных шарниром

**Постановка задачи.** Определить реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных в одной точке шарниром.

#### План решения.

1. Расчленим конструкцию на три отдельных тела и сочленяющий шарнир в качестве четвертого тела. Считая, что каждое из трех тел в точке сочленения взаимодействует только с осью шарнира, действие оси шарнира на тело заменяем ее реакциями.

2. Записываем по три уравнения равновесия для каждого из тел и два уравнения равновесия в проекциях для системы сил, приложенных к оси шарнира.

3. Решаем систему 11 уравнений с 11 неизвестными.

4. Выполняем проверку решения, составляя дополнительное уравнение равновесия для нерасчлененной конструкции.

**Пример ПЗ.3.** Определить реакции опор конструкции, состоящей из трех тел, соединенных в точке  $C$  шарниром. В точке  $B$  конструкция опирается на неподвижный шарнир, в точках  $D$  и  $E$  – подвижные шарниры, в точке  $A$  – горизонтальный опорный стержень.

На конструкцию действуют:

- силы  $F = 40$  кН,  $P = 20$  кН,  $Q = 10$  кН;

- сосредоточенные моменты  $M_1 = 100$  кНм,  $M_2 = 30$  кНм (рис. ПЗ.6).

ПЗ.6).

Углы, образуемые силами  $F$  и  $P$ , составляют:  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

Размеры на рисунке указаны в метрах.

#### Решение.

1. Расчленим конструкцию на три отдельных тела  $ADC$ ,  $CB$ ,  $CE$  и сочленяющий шарнир  $C$  в качестве четвертого тела.

Считая, что каждое из трех тел в точке сочленения взаимодействует только с осью шарнира  $C$ , действие оси шарнира на тело заменяем ее реакциями (рис. ПЗ.7).

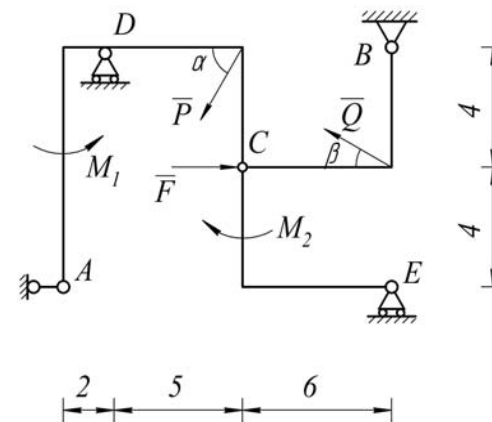


Рис. ПЗ.6. К решению примера ПЗ.3

2. Для каждого из тел ( $ADC$ ,  $BC$ ,  $EC$ ) записываем по три уравнения равновесия – два уравнения проекций и уравнение моментов относительно точки  $C$  (в качестве моментной точки можно выбрать любую, в том числе и не принадлежащую телу). Для системы сил, сходящихся в шарнире  $C$ , составляем два уравнения равновесия в проекциях (рис. ПЗ.7).

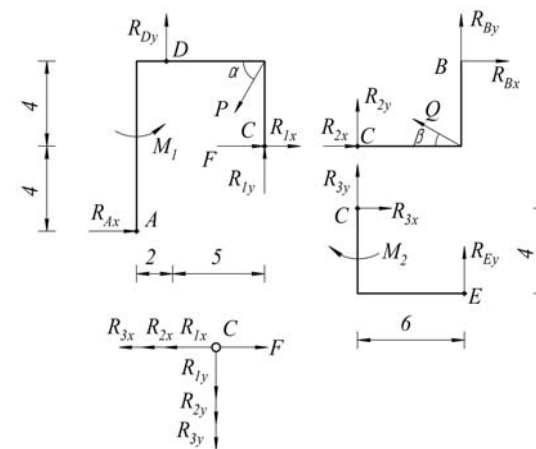


Рис. ПЗ.7. Расчетная схема к примеру ПЗ.3

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix}^{(AC)} &= R_{1x} - P \cos \alpha + R_{Ax} + F = 0, \\ \sum F_{iy}^{(AC)} &= R_{1y} - P \sin \alpha + R_{Dy} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П3.12})$$

$$\sum M_C(F_i^{(AC)}) = R_{Ax} \cdot 4 - R_{Dy} \cdot 5 + M_1 + P \cos \alpha \cdot 4 = 0,$$

$$\begin{aligned} \sum F_{ix}^{(BC)} &= R_{2x} - Q \cos \beta + R_{Bx} = 0, \\ \sum F_{iy}^{(BC)} &= R_{2y} + Q \sin \beta + R_{By} = 0, \\ \sum M_C(F_i^{(BC)}) &= -R_{Bx} \cdot 4 + R_{By} \cdot 6 + Q \sin \beta \cdot 6 = 0, \end{aligned} \quad (\text{П3.13})$$

$$\begin{aligned} \sum F_{ix}^{(EC)} &= R_{3x} = 0, \\ \sum F_{iy}^{(EC)} &= R_{3y} + R_{Ey} = 0, \\ \sum M_C(F_i^{(EC)}) &= R_{Ey} \cdot 6 - M_2 = 0, \end{aligned} \quad (\text{П3.14})$$

$$\begin{aligned} \sum F_{ix}^{(C)} &= -R_{1x} - R_{2x} - R_{3x} + F = 0, \\ \sum F_{iy}^{(C)} &= -R_{1y} - R_{2y} - R_{3y} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П3.15})$$

3. Решаем систему 11 уравнений с 11 неизвестными. Результаты расчетов в кН записываем в таблицу П3.6.

Таблица П3.6

Результаты определения реакций опор конструкции

| $R_{Ax}$ | $R_{Dy}$ | $R_{Bx}$ | $R_{By}$ | $R_{Ey}$ | $R_{1x}$ | $R_{1y}$ | $R_{2x}$ | $R_{2y}$ | $R_{3x}$ | $R_{3y}$ |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| -10,90   | 19,28    | -10,44   | -11,96   | 5,00     | 20,90    | -1,96    | 19,10    | 6,96     | 0        | -5,00    |

5. Выполняем проверку решения, составляя дополнительное уравнение равновесия для нерасчлененной системы (рис. П3.8). Моментную точку  $K$  выбираем так, чтобы в уравнения вошли все проверяемые величины  $R_{Ax}$ ,  $R_{Dy}$ ,  $R_{Bx}$ ,  $R_{By}$ ,  $R_{Ey}$ :

$$\begin{aligned} \sum M_K(F_i^{(цел)}) &= R_{Ax} \cdot 4 + R_{Dy} \cdot 2 + M_1 - M_2 + P \cdot \cos \alpha \cdot 4 - P \cdot \sin \alpha \cdot 7 + \\ &+ Q \cdot \sin \beta \cdot 13 + R_{Ey} \cdot 13 + R_{By} \cdot 13 - R_{Bx} \cdot 4 = 0. \end{aligned}$$

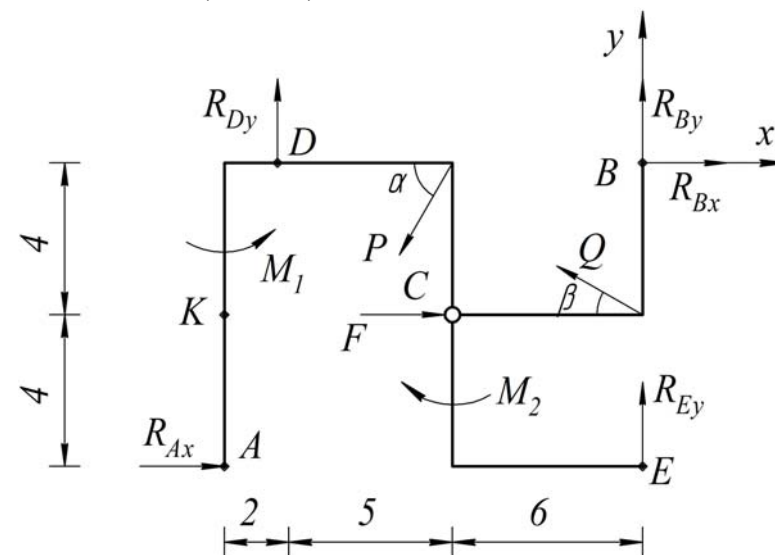


Рис. П3.8. Расчетная схема к составлению уравнения равновесия для нерасчлененной системы

*Замечание.* Предложенный способ расчета не является единственным. Например, если из трех частей, соединенных в одном шарнире, можно отделить одну, имеющую в качестве опоры подвижный шарнир (часть  $CE$ , рис. П3.6), то получится система двух тел, одно из которых ( $CE$ ) имеет три неизвестные реакции. Определить эти реакции можно из системы трех уравнений равновесия этой части.

Затем следует рассмотреть оставшуюся часть, состоящую из двух еще нерасчлененных тел. В качестве дополнительной нагрузки к ним будут приложены (в противоположную сторону) две реакции отброшенной третьей части.

*Условие задачи 3.3.* Определить реакции опор конструкции (в кН), состоящей из трех тел, соединенных в точке  $C$  шарниром. Исходные данные приведены в таблице П3.7. Размеры на расчетных схемах (таблица П3.8) указаны в метрах.

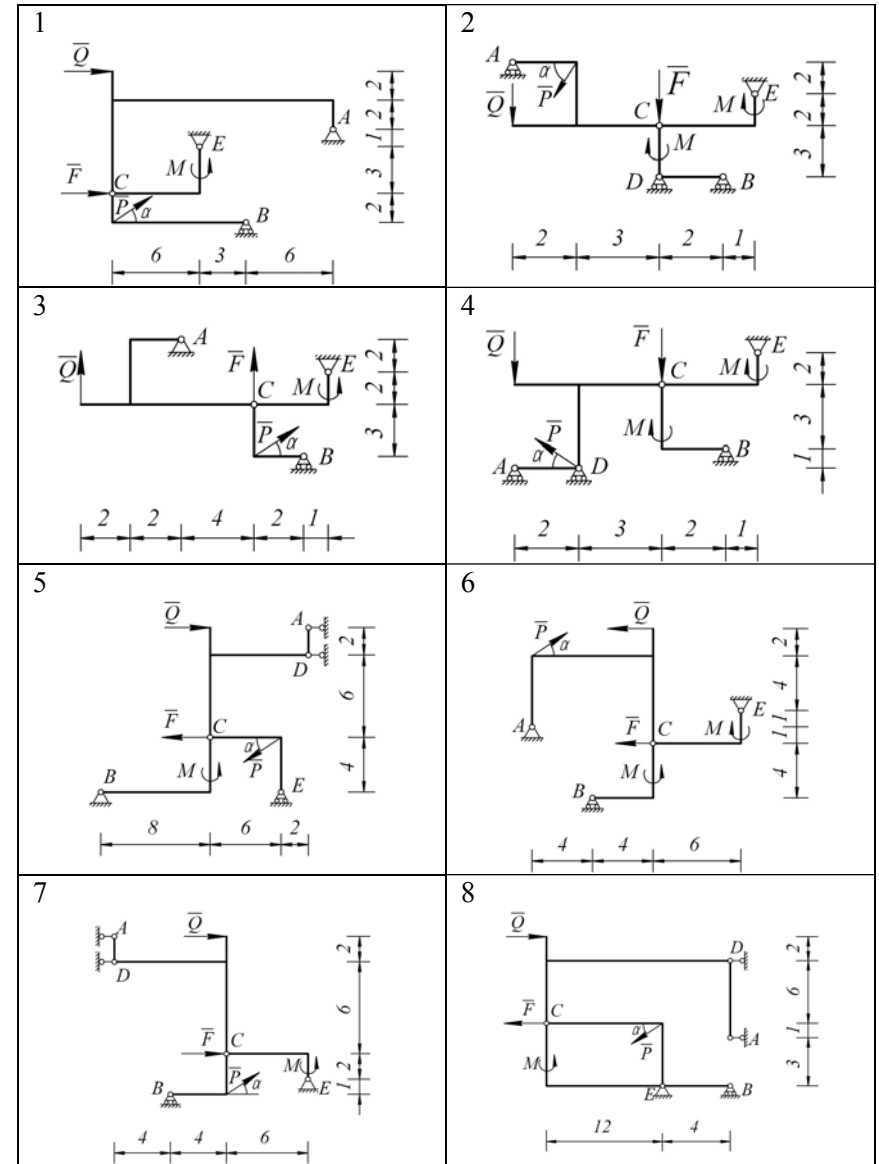
Таблица ПЗ.7

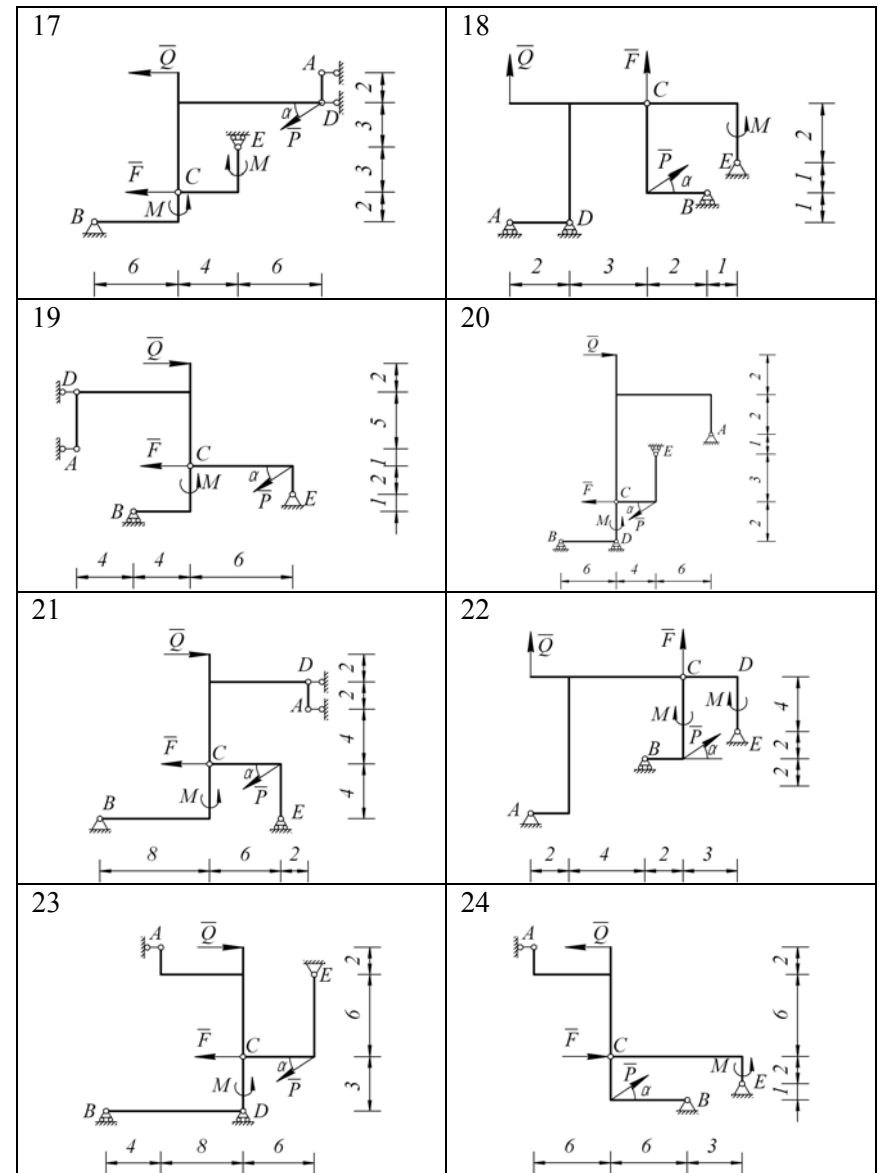
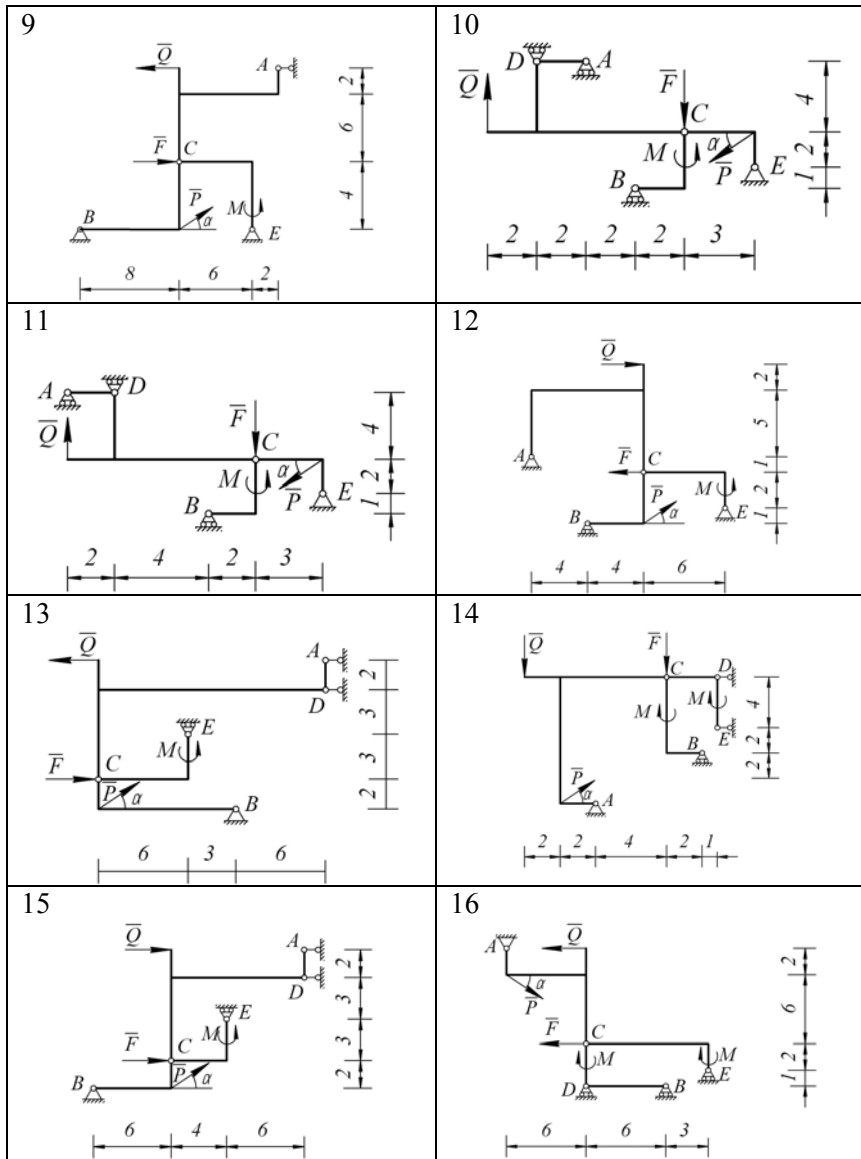
Исходные данные к задаче 3.3

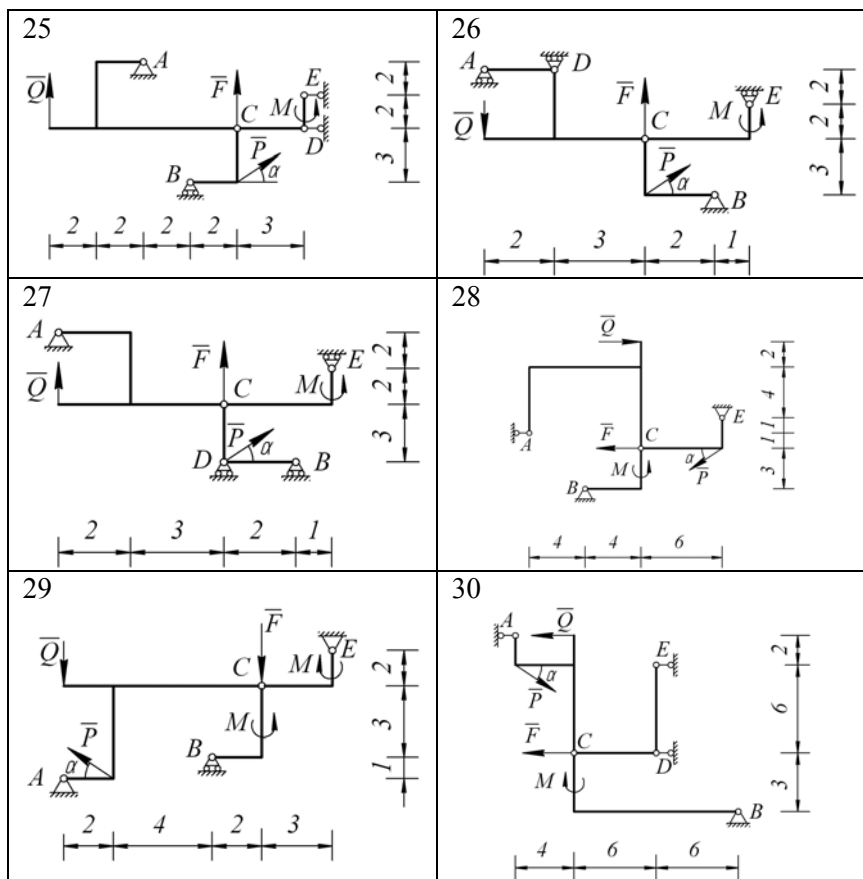
| Номер варианта | Номер схемы | Сила $P$ , кН | Сила $Q$ , кН | Сила $F$ , кН | Момент $M$ , кНм | Угол $\alpha$ , град |
|----------------|-------------|---------------|---------------|---------------|------------------|----------------------|
| 01             | 1           | 9             | 11            | 2             | 4                | 30                   |
| 02             | 2           | 1             | 9             | 4             | 4                | 60                   |
| 03             | 3           | 14            | 8             | 2             | 4                | 30                   |
| 04             | 4           | 16            | 22            | 6             | 4                | 60                   |
| 05             | 5           | 13            | 2             | 8             | 5                | 30                   |
| 06             | 6           | 30            | 26            | 2             | 3                | 60                   |
| 07             | 7           | 17            | 22            | 6             | 5                | 30                   |
| 08             | 8           | 7             | 9             | 6             | 6                | 30                   |
| 09             | 9           | 18            | 2             | 1             | 5                | 60                   |
| 10             | 10          | 21            | 22            | 6             | 5                | 30                   |
| 11             | 11          | 6             | 30            | 6             | 5                | 30                   |
| 12             | 12          | 33            | 18            | 2             | 5                | 30                   |
| 13             | 13          | 9             | 30            | 6             | 4                | 60                   |
| 14             | 14          | 14            | 6             | 7             | 6                | 60                   |
| 15             | 15          | 29            | 17            | 6             | 3                | 30                   |
| 16             | 16          | 16            | 7             | 9             | 6                | 60                   |
| 17             | 17          | 28            | 22            | 8             | 3                | 60                   |
| 18             | 18          | 18            | 17            | 6             | 6                | 30                   |
| 19             | 19          | 4             | 20            | 6             | 5                | 30                   |
| 20             | 20          | 21            | 17            | 9             | 3                | 30                   |
| 21             | 21          | 23            | 29            | 8             | 5                | 30                   |
| 22             | 22          | 7             | 28            | 1             | 5                | 30                   |
| 23             | 23          | 16            | 7             | 4             | 3                | 30                   |
| 24             | 24          | 21            | 20            | 1             | 6                | 60                   |
| 25             | 25          | 15            | 6             | 7             | 3                | 30                   |
| 26             | 26          | 16            | 17            | 8             | 4                | 60                   |
| 27             | 27          | 12            | 22            | 9             | 4                | 30                   |
| 28             | 28          | 7             | 3             | 1             | 3                | 30                   |
| 29             | 29          | 10            | 2             | 2             | 3                | 60                   |
| 30             | 30          | 26            | 8             | 5             | 4                | 60                   |

Таблица ПЗ.8

Расчетные схемы к задаче 3.3







## 5. СИСТЕМА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИЛ

### 5.1. Условие равновесия плоской системы параллельных сил

Как известно, для произвольной плоской системы сил можно составить, три независимых уравнения равновесия (параграф 4.4). Существует ряд приемов, позволяющих упростить системы сил, следовательно, упростить решение задач на равновесие.

Если на тело действует система параллельных сил, подробно рассмотренная в главе 3 (параграф 3.2), то неизвестные реакции (например, для балок) не будут иметь одного из компонентов: при вертикальном направлении сил не будет горизонтальных составляющих реакций у шарнирно-неподвижных опор.

Условия равновесия плоской системы параллельных сил являются частным случаем условий равновесия. Если ось  $u$  расположить параллельно линиям действия системы параллельных сил, то уравнение равновесия  $\sum X = 0$  обратится в тождество, а  $\sum Y = \sum F_i$ , т. е. алгебраическая сумма проекции сил системы на ось  $u$  будет равна алгебраической сумме этих сил. Тогда условия равновесия плоской системы параллельных сил запишутся следующим образом:

$$\sum F_i = 0, \sum M = 0 \quad (5.1)$$

и сформулируются так: для равновесия плоской системы параллельных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма всех сил равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно любой точки плоскости также равнялась нулю.

Так как все виды аналитических условий равновесия действительны для любых прямоугольных осей координат, то в процессе решения одной задачи или при проверке решения оси координат можно изменить, т. е. одни уравнения проекций сил составить для одной системы координат, а другие – для новой системы координат. Этот прием в некоторых случаях упрощает решение или проверку решения задач. При этом следует помнить, что число уравнений равновесия, составляемых для решения (но не для проверки решения), не должно быть больше числа условий равновесия, соответствующих системе сил, рассматриваемых в задаче.

При решении задач статики аналитическим способом целесообразно составлять уравнения равновесия так, чтобы в каждом из них была только одна неизвестная величина. Во многих случаях этого можно достигнуть, если рационально выбрать оси координат и центры моментов.

## 5.2. Центр системы параллельных сил

Как уже отмечалось выше, две параллельные и не равные по модулю силы, направленные в одну сторону, приводятся к одной силе – равнодействующей, которая равна их сумме, параллельна им, направлена в ту же сторону, а линия действия ее делит расстояние между силами обратно пропорционально их модулям. При действии двух параллельных и не равных по модулю сил, направленных в разные стороны, они приводятся также к одной силе – равнодействующей, которая равна их разности, параллельна им, направлена в сторону большей силы, а линия действия ее лежит за большей силой на расстоянии, обратно пропорциональном модулям этих сил.

Поскольку силу можно переносить по линии ее действия, то точка приложения силы (равнодействующей) по существу не определена. Если все силы повернуть на один и тот же угол и вновь провести сложение сил, то получаем другое направление линии действия равнодействующей. Точка пересечения этих двух линий действия равнодействующих может рассматриваться как точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол. Такая точка называется *центром параллельных сил*.

Пусть в точках  $A_1, A_2, A_3$  приложены три параллельные силы  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$  (рис. 5.1). Сложим силы  $\bar{F}_1$  и  $\bar{F}_2$  и определим их равнодействующую  $\bar{R}_{1,2}$ . Затем сложим силы  $\bar{R}_{1,2}$  и  $\bar{F}_3$  и найдем равнодействующую всех сил  $\bar{R}_F$ .

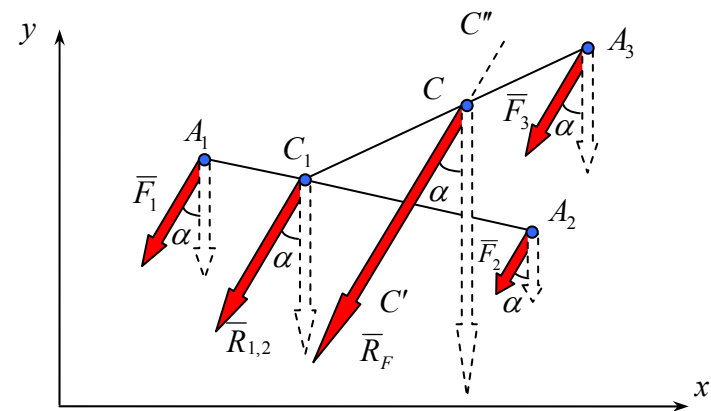


Рис. 5.1. Определение равнодействующей  $\bar{R}_F$  параллельных сил  $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$

Модуль равнодействующей равен сумме модулей составляющих сил:

$$R_F = R_{1,2} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3 = \sum F_i. \quad (5.2)$$

Положение точек  $C_1$  и  $C$  можно определить из соответствующих пропорций:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{C_1 A_2}{A_1 C_1}, \quad \frac{R_{1,2}}{F_3} = \frac{C A_3}{C_1 C}.$$

В общем случае за точку приложения равнодействующей может быть взята любая точка на линии ее действия, например, точки  $C'$  или  $C''$ , но только одна точка  $C$ , которая определена при сложении сил, обладает важным свойством:

*если повернуть все данные силы вокруг точек их действия в одну сторону на одинаковые углы  $\alpha$ , не нарушая параллельности, то действие их равнодействующей, повернувшись на тот же угол, будет опять проходить через точку  $C$ .*

Точку  $C$  назовем *центром системы параллельных сил*.

Центр системы параллельных сил или центр параллельных сил – точка приложения равнодействующей, не изменяющей своего положения при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Координаты центра параллельных сил можно определить из уравнений:

$$\begin{aligned} X_C &= \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}, \\ Y_C &= \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + F_3 \cdot y_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где в числителе – сумма произведений алгебраических значений каждой силы на координаты точки приложения; в знаменателе – алгебраическая сумма всех сил.

Уравнения (5.3) дают возможность определить координаты центра параллельных сил при любом их направлении. Значения сил подставляются в уравнения со своими знаками в соответствии с их расположением в системе координат.

### 5.3. Центр тяжести плоских фигур и определение его координат

*Элементарной частицей тела* называется такая малая частица, положение которой в пространстве определяется координатами одной точки. Рассмотрим тело, состоящее из большого количества элементарных частиц. Силы тяжести каждой частицы, направленные к центру Земли, образуют систему сходящихся сил, но для тел, размеры которых малы по сравнению с размерами Земли, с достаточной степенью точности можно считать эти силы системой параллельных сил.

Таким образом, на отдельные частицы, из которых состоит твердое тело, действуют силы тяжести практически параллельно (при расстоянии между частицами в 31 м угол между вертикалями сил их тяжести составляет 1").

Равнодействующая сила тяжести всех частиц тела, с которой тело притягивается к земле, *называется силой тяжести G этого тела*.

Как бы мы не изменяли положение тела в пространстве, силы тяжести его отдельных частиц останутся параллельными одна другой (и вертикальными), а из параграфа 5.2 следует, что равнодействующая

параллельных сил всегда проходит через одну и ту же точку – центр данной системы параллельных сил или центр тяжести тела.

*Центр тяжести* – центр приложения равнодействующей сил тяжести (веса) материального тела, а именно: точка, неизменно связанная с телом, через которую проходит линия действия силы тяжести данного тела при любом положении тела в пространстве.

При определении положения центра тяжести тела используются следующие гипотезы:

1) линии действия сил тяжести, приложенные к отдельным частям тела, параллельны (рассматриваемые тела имеют размеры много меньше радиуса Земли и углом между линиями действия сил тяжести частиц тел можно пренебречь);

2) ускорение свободного падения  $g = \text{const}$  (высота рассматриваемых тел много меньше радиуса Земли и изменением величины ускорения свободного падения по высоте тела можно пренебречь);

3) рассматриваемые тела – однородные (нет включений материалов с другой плотностью) и сплошные (нет пустот).

Тогда координаты центра тяжести твердого плоского тела можно определить по формулам, аналогичным уравнениям для центра параллельных сил (5.3):

$$X_C = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} = \frac{\sum G_i x_i}{G}; \quad Y_C = \frac{\sum G_i y_i}{\sum G_i} = \frac{\sum G_i y_i}{G}, \quad (5.4)$$

где  $G_i$  – сила тяжести произвольной частицы тела,

$X_i, Y_i$  – координаты этой частицы;

$G$  – сила тяжести всего тела ( $\sum G_i = G$ ).

В случае однородных тел по таким же формулам можно определять координаты центра тяжести объемов, площадей и линий. Например, для абсциссы  $x_c$  получим следующие формулы:

1) сила тяжести элементарной частицы, выраженная через объем  $V_i$ , равна

$$G_i = \gamma V_i,$$

где  $\gamma$  – плотность материала (для однородного тела величина постоянная). Тогда

$$X_C = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} = \frac{\gamma \sum V_i x_i}{\gamma \sum V_i},$$

следовательно, для объема

$$X_C = \frac{\sum V_i x_i}{\sum V_i}; \quad (5.5)$$

2) если тело представляет собой однородную пластинку толщиной  $h$ , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через площадь  $A_i$ , равна

$$G_i = \gamma h A_i,$$

тогда

$$X_C = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} = \frac{\gamma h \sum A_i x_i}{\gamma h \sum A_i},$$

следовательно, для площади

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}; \quad (5.6)$$

3) если тело представляет собой однородную проволоку постоянного поперечного сечения  $A$ , то сила тяжести элементарной частицы, выраженная через длину  $l_i$ , равна

$$G_i = \gamma A l_i,$$

тогда

$$X_C = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} = \frac{\gamma A \sum l_i x_i}{\gamma A \sum l_i},$$

следовательно, для линии

$$X_C = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}. \quad (5.7)$$

Положение центра тяжести однородных тел можно определить следующим образом. Выделим *элементарный объем*  $dV = dx dy dz$ . Сила тяжести такого объема равна  $dG = \gamma dV$ , где  $\gamma = \text{const}$  – плотность материала. Замена суммирования дискретных сил тяжести  $\Delta G_i$  непрерывным распределением приводит к интегральным выражениям по объему тела для определения координат центров тяжести, например, координаты  $x_C$ :

$$x_C = \frac{\int x dG}{\int dG} = \frac{\iiint x \gamma dx dy dz}{\iiint \gamma dx dy dz} = \frac{\int x dV}{\int dV}. \quad (5.8)$$

В частном случае плоского тела (постоянной толщины  $h = \text{const}$ )  $dV = h dx dy = h dS$ :

$$x_C = \frac{\iint x h dx dy}{\iint h dx dy} = \frac{\int x dS}{\int dS}. \quad (5.9)$$

Для линейного тела (постоянного поперечного сечения  $S = \text{const}$ , ось – плоская кривая)  $dV = S dL$ :

$$x_C = \frac{\int x S dL}{\int S dL} = \frac{\int x dL}{\int dL}. \quad (5.10)$$

Для простейших плоских фигур положение центра тяжести определяется следующим образом:

- прямоугольник:  $dA = b dy$  (рис. 5.2).

$$y_C = \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int_0^h y b dy}{\int_0^h b dy} = \frac{b \int_0^h y dy}{b \int_0^h dy} = \frac{b \frac{y^2}{2} \Big|_0^h}{bh} = \frac{h}{2}, \quad (5.11)$$

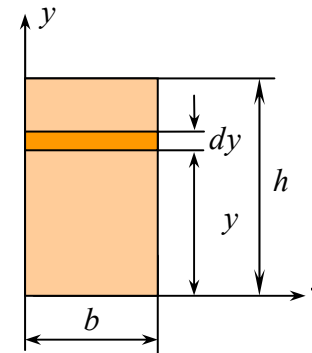


Рис. 5.2. Схема к определению координаты  $y_C$  центра тяжести прямоугольника



- круговой сектор:  $dA = \frac{1}{2}R(Rd\varphi) = \frac{1}{2}R^2d\varphi$  (рис. 5.3);

$$x_c = \frac{\int x dS}{\int dS} = \frac{2 \int_0^\alpha \frac{2}{3} R \cos \varphi \frac{R^2}{2} d\varphi}{2 \int_0^\alpha \frac{R^2}{2} d\varphi} = \frac{\frac{2}{3} R^3 \sin \varphi \Big|_0^\alpha}{R^2 \varphi \Big|_0^\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \alpha}{\alpha}; \quad (5.12)$$

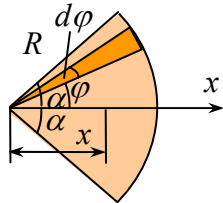


Рис. 5.3. Схема к определению координаты  $x_c$  центра тяжести кругового сектора

- треугольник:  $\frac{b_y}{b} = \frac{h-y}{h}$ ;  $b_y = \frac{h-y}{h}b$ ;  $dA = b_y dy = \frac{h-y}{h} b dy$  (рис. 5.4);

$$y_c = \frac{\int y dS}{\int dS} = \frac{\int_0^h y \frac{h-y}{h} b dy}{\int_0^h \frac{h-y}{h} b dy} = \frac{\frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy}{\frac{b}{h} \int_0^h (h-y) dy} = \frac{\frac{b}{h} \left( h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h}{\frac{b}{h} \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{1}{2}bh} = \frac{h}{3} \quad (5.13)$$

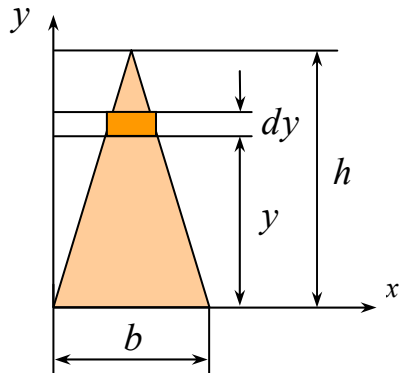


Рис. 5.4. Схема к определению координаты  $y_c$  центра тяжести треугольника

#### 5.4. Методы определения положения центра тяжести сложных фигур

В настоящее время для определения положения центра тяжести сложных фигур используют шесть методов, а именно: метод разбиения, метод отрицательных площадей, метод симметрии, метод интегрирования, метод подвешивания, а также экспериментальный метод.

**Метод разбиения** – сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются (рис. 5.5).

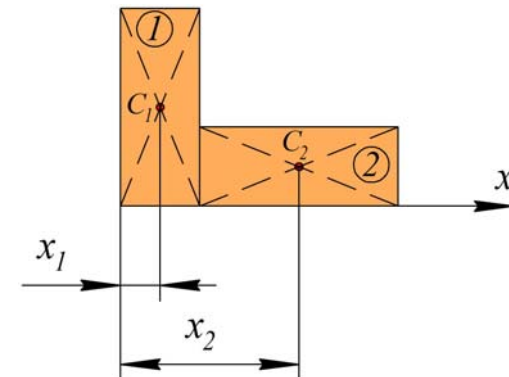


Рис. 5.5. Схема к определению координаты  $x_c$  центра тяжести сложной фигуры методом разбиения

Тогда

$$X_c = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2}{A_1 + A_2}.$$

**Пример 5.1.** Определить центр тяжести плоской фигуры, изображенной на рисунке 5.6. Размеры даны в сантиметрах.

**Решение.**

Разобьем фигуру на два прямоугольника с центрами тяжести в точках  $C_1$  и  $C_2$ . Расчеты по определению центра тяжести фигуры приведем в таблице 5.1 ( $x_i, y_i$  – координаты центра тяжести  $i$ -й фигуры;  $A_i$  – площадь  $i$ -й фигуры).

Таблица 5.1

Расчеты по определению центра тяжести фигуры

| Фигура   | $A_i, \text{см}^2$ | $x_i, \text{см}$ | $y_i, \text{см}$ | $A_i x_i, \text{см}^3$ | $A_i y_i, \text{см}^3$ |
|----------|--------------------|------------------|------------------|------------------------|------------------------|
| 1        | 1200               | 30               | 10               | 36000                  | 12000                  |
| 2        | 300                | 65               | 15               | 19500                  | 4500                   |
| $\Sigma$ | 1800               | --               | --               | 55500                  | 16500                  |

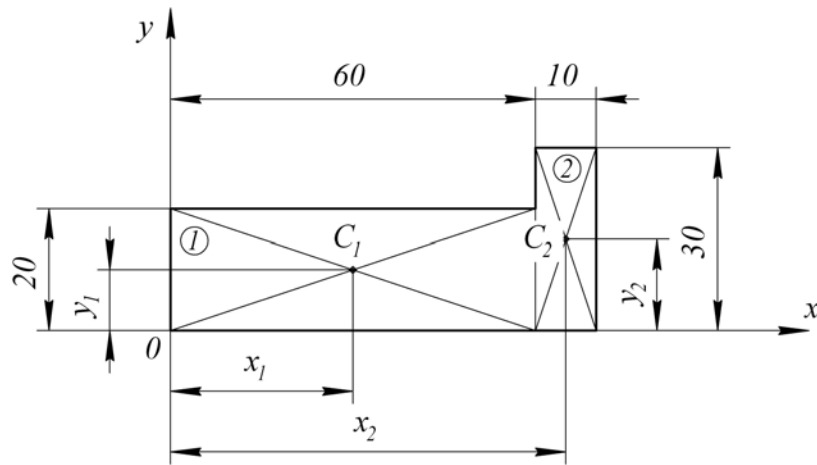


Рис. 5.6. К решению примера 5.1

Тогда

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{55500}{1800} = 30,83 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{16500}{1800} = 9,17 \text{ см}.$$

**Метод отрицательных площадей** – так же, как и в методе разбиения, сложная фигура разбивается на совокупность простых фигур, для которых известны положения центра тяжести или легко определяются, но при наличии отверстий или пустот удобно их пред-

ставление в виде «отрицательных» областей. Например, следующая фигура (рис. 5.7) вместо разбиения на 4 обычных прямоугольника может быть представлена как совокупность двух прямоугольников, один из которых имеет отрицательную площадь.

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + (-A_2) x_2}{A_1 + (-A_2)}.$$

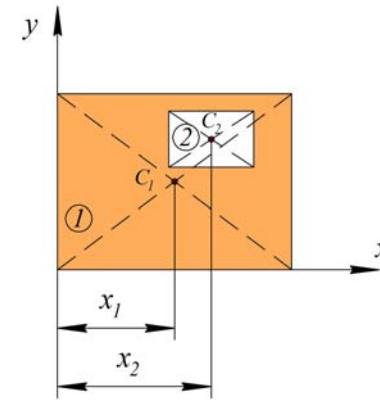


Рис. 5.7. Схема к определению координаты  $x_C$  центра тяжести сложной фигуры методом отрицательных площадей

**Метод симметрии** – при наличии у фигуры оси или плоскости симметрии центр тяжести лежит на этой оси или в этой плоскости. С учетом этого свойства уменьшается количество координат центра тяжести, подлежащих определению. Например, определение положения центра тяжести кругового сектора.

Представим себе однородное тело, которое имеет плоскость симметрии. Выберем такую систему координат, чтобы оси  $y$  и  $z$  лежали в плоскости симметрии (рис. 5.8).

В этом случае каждой элементарной частице силой тяжести  $G_i$  с абсциссой  $x_i = +a$  соответствует такая же элементарная частица с абсциссой  $x_i = -a$ , тогда

$$X_C = \frac{\sum G_i x_i}{\sum G_i} = 0.$$

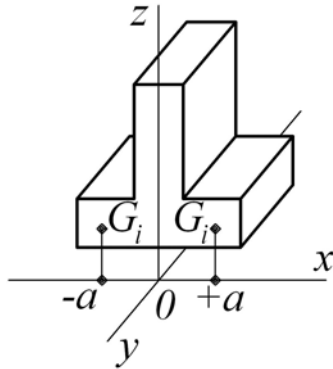


Рис. 5.8. Схема к определению координаты  $x_C$  центра тяжести сложной фигуры методом симметрии

Отсюда следует вывод: если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости.

Аналогично можно доказать и следующие положения:

- если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси;
- если однородное тело имеет две оси симметрии, то центр тяжести находится в точке их пересечения;
- центр тяжести однородного тела вращения лежит на оси вращения.

**Метод интегрирования** – при наличии у фигуры достаточно простого контура, описываемого известным уравнением (окружность, парабола и т. п.), выбирается элементарная площадка или полоска и выполняется аналитическое интегрирование, например, определение положения центра тяжести треугольника или кругового сектора. При более сложном контуре, который может быть разбит на более простые граничные отрезки, используется предварительно метод разбиения. При сложностях с аналитическим интегрированием используются численные методы интегрирования.

**Метод подвешивания** – метод, основанный на том, что при подвешивании тела или фигуры за какую-либо произвольную точку центр тяжести находится на одной вертикали с точкой подвеса. Для определения положения центра тяжести плоской фигуры достаточно ее подвесить поочередно за две любые точки и

прочертить соответствующие вертикали, например, с помощью отвеса, и точка пересечений этих прямых соответствует положению центра тяжести фигуры.

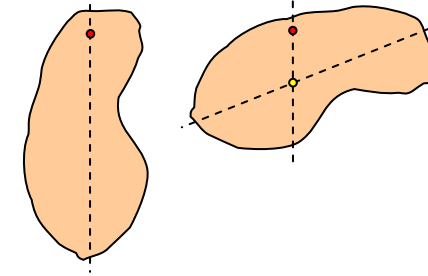


Рис. 5.8. Схема к определению центра тяжести плоской фигуры методом подвешивания

**Экспериментальный метод** – закрепив тело в точке  $A$  в шарнире, другую часть тела в точке  $B$  устанавливаем на аналитические весы. Тело должно быть в горизонтальном положении (рис. 5.10). Показания весов дают реакцию  $R_B$  опоры  $B$ . Используем уравнение равновесия:

$$\Sigma M_A(F_i) = -G \cdot h + R_B \cdot l = 0, \text{ откуда } h = \frac{R_B \cdot l}{G},$$

где  $G$  – сила тяжести (вес) тела;

$L$  – расстояние между опорами  $A$  и  $B$ ;

$h$  – расстояние от опоры  $A$  до центра тяжести  $C$ .

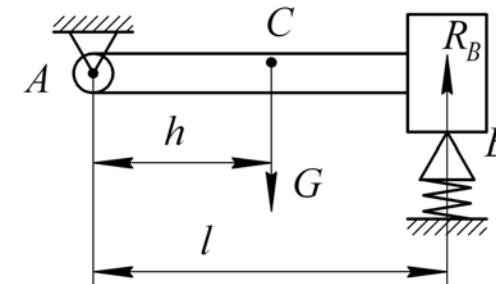


Рис. 5.10. Схема к определению центра тяжести однородного тела экспериментальным методом

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте условия равновесия плоской системы параллельных сил.

2. На тело действует система параллельных сил, где  $F_1 = 10$  кН,  $F_2 = 5$  кН,  $F_3 = 7$  кН (рис. 5.11). Находится ли данное тело под действием данной системы в равновесии?

3. Система трех параллельных сил (рис. 5.12) находится в равновесии. Чему равняется расстояние  $c$  и как будет располагаться сила  $F_3$ ? При этом  $F_1 = 5$  кН,  $F_2 = 5$  кН,  $F_3 = 10$  кН,  $a = 2$  м,  $b = 2$  м.

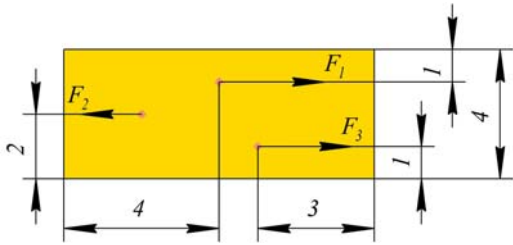


Рис. 5.11. К заданию 2

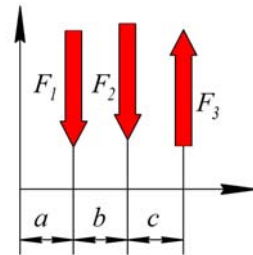


Рис. 5.12. К заданию 3

4. Дайте определение центра параллельных сил.

5. Можно ли точно определить точку приложения равнодействующей параллельных сил?

6. Можно ли определить центр параллельных сил векторно?

7. В чем заключается свойство центра параллельных сил?

8. Определите координаты центра параллельных сил (рис. 5.13), направленных вертикально вниз, если  $F_1 = 8$  кН,  $F_2 = 4$  кН,  $F_3 = 12$  кН, а координаты точек приложения сил соответственно (1; 6), (4; 7) и (6; 5).

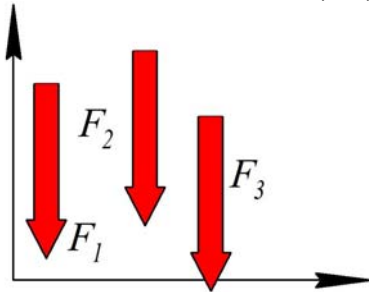


Рис. 5.13. К заданию 8

9. Определите координаты силы  $F_2$  системы двух параллельных сил, если координаты центра параллельных сил  $x_c = 5$  см,  $y_c = 7$  см. При этом  $F_1 = 2$  кН,  $F_2 = 3$  кН,  $x_1 = 2$  см,  $x_2 = 4$  см.

10. Дайте определение силы тяжести тела.

11. Дайте определение центра тяжести тела.

12. Какими свойствами обладает центр тяжести?

13. По каким скалярным формулам можно определить центр тяжести тела?

14. Как определить координаты центра тяжести для площади?

15. Для какого однородного тела координата центра тяжести определяется по формуле

$$X_c = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i} ?$$

16. Как определить координату  $x_c$  центра тяжести прямоугольника со сторонами  $b = 40$  см,  $h = 20$  см (рис. 5.14)?

17. Определите координаты центра тяжести треугольника (рис. 5.15).

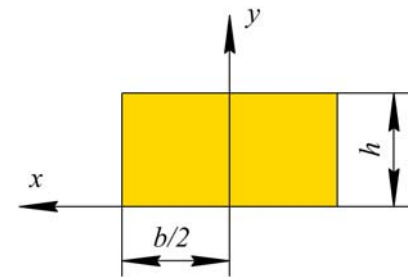


Рис. 5.14. К заданию 16

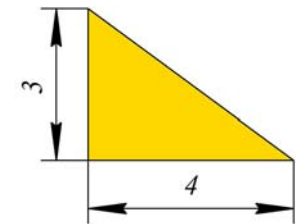


Рис. 5.15. К заданию 17

18. Определите положение центра тяжести площади, ограниченной полуокружностью  $AOB$  радиуса  $R$  и двумя прямыми равной длины  $AD$  и  $DB$ , причем  $OD = 3R$  (рис. 5.16).

19. Найдите центр тяжести площади кругового сегмента  $ADB$  радиуса  $OA = 30$  см, если угол  $AOB = 60^\circ$  (рис. 5.17).

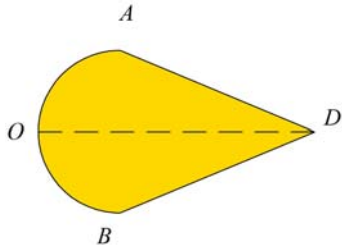


Рис. 5.16. К заданию 18

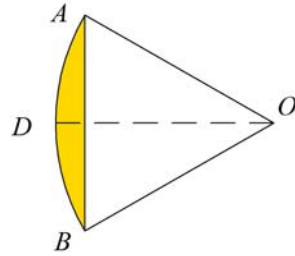


Рис. 5.17. К заданию 19

20. Определите положение центра тяжести стержневого контура  $AFBD$  (рис. 5.18), состоящего из дуги  $ADB$ , четверти окружности радиуса  $FD = R$  и из дуги полуокружности  $AFB$ , построенной на хорде  $AB$  как на диаметре.

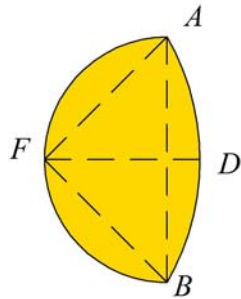


Рис. 5.18. К заданию 20

21. Перечислите основные методы определения положения центра тяжести тел.

22. Какими методами можно определить положение центра тяжести площади в случае, если известны положения центров тяжести отдельных ее частей?

23. В чем отличие метода разбиения от метода отрицательных площадей при определении положения центра тяжести сложных фигур?

24. В чем заключается метод интегрирования при определении положения центра тяжести сложных фигур?

25. Как определяется центр тяжести сложной фигуры экспериментальным методом?

26. Куда и на сколько переместится центр тяжести прямого однородного стержня, если согнуть его посередине под прямым углом?

27. Определите центр тяжести плоской фигуры (рис. 5.19) методом подвешивания.

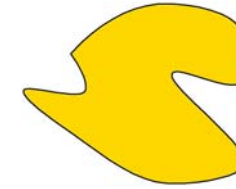
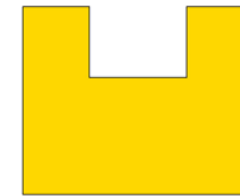


Рис. 5.19. К заданию 27

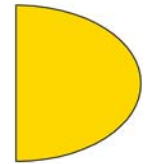
28. Определите центры тяжести однородных тел (рис. 5.20).



а)



б)



в)

Рис. 5.20. К заданию 28

29. Определите центр тяжести сложной фигуры (рис. 5.21).

30. Найдите координаты центра тяжести поперечного сечения неравнополочного уголка, полки которого имеют ширину  $OA = a$ ,  $OB = b$  и толщину  $AC = BD = d$  (рис. 5.22).

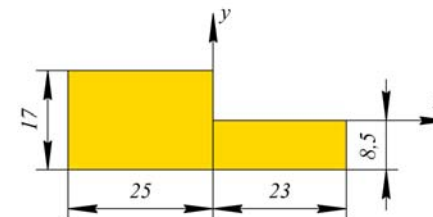


Рис. 5.21. К заданию 29

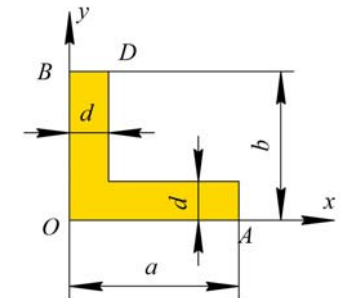


Рис. 5.22. К заданию 30

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

### Задача 4.1. Определение координат центра тяжести плоских фигур

**Постановка задачи.** Определить координаты центра тяжести плоских фигур, составленных из простых геометрических элементов.

**План решения.**

1. Вычерчиваем в масштабе плоскую фигуру, составленную из простых геометрических элементов.
2. Разбиваем фигуру на составные части, центры тяжести которых легко определяются
3. Выбираем расположение координатных осей.
4. Находим площадь  $A_i$  каждой части и координаты  $x_i$  и  $y_i$  их центров тяжести  $C_i$ . Данные заносим в таблицу П4.1.

Таблица П4.1

Определение координат центра тяжести плоской фигуры

| Номер составной части | Площадь составной части $A_i$ , мм <sup>2</sup> | Координаты центров тяжести каждой части |            |
|-----------------------|---|---|------------|
|                       |   | $x_i$ , мм                              | $y_i$ , мм |
| 1                     |   |   |            |
| 2                     |   |   |            |
| 3                     |   |   |            |
| ...                   |   |   |            |
| $n$                   |   |   |            |

5. Вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры по следующим формулам:

$$x_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3 + \dots + A_n \cdot x_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n},$$

$$y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n}.$$

6. Положение центра тяжести  $C$  показываем на чертеже.

**Пример П4.1.** Определить координаты центра тяжести сечения плоской фигуры (рис. П4.1) методом разбиения на части и методом отрицательных площадей.

**Решение примера П4.1 методом разбиения на части** (размеры плоской фигуры даны в мм).

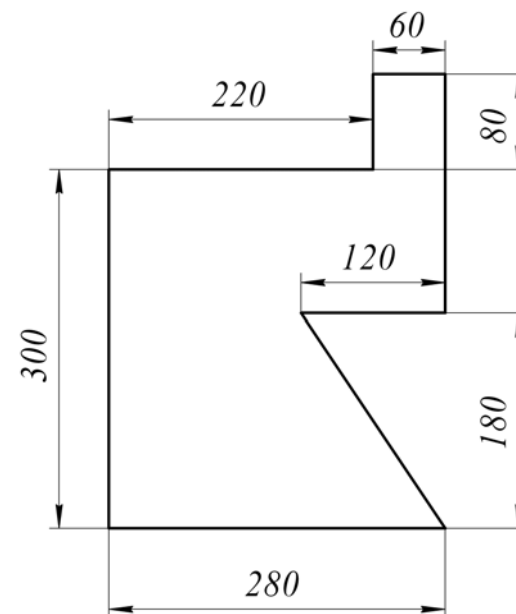


Рис. П4.1. Сечение плоской фигуры к примеру П4.1

Заданную фигуру разбиваем на составные части, центры тяжести которых легко определяются (рис. П4.2) – прямоугольник 1, треугольник 2 и прямоугольники 3 и 4.

Располагаем координатные оси, как показано на рисунке П4.2. Находим площади  $A_i$  каждой части и координаты их центров тяжести  $C_i$ . Все полученные данные заносим в таблицу П4.2.

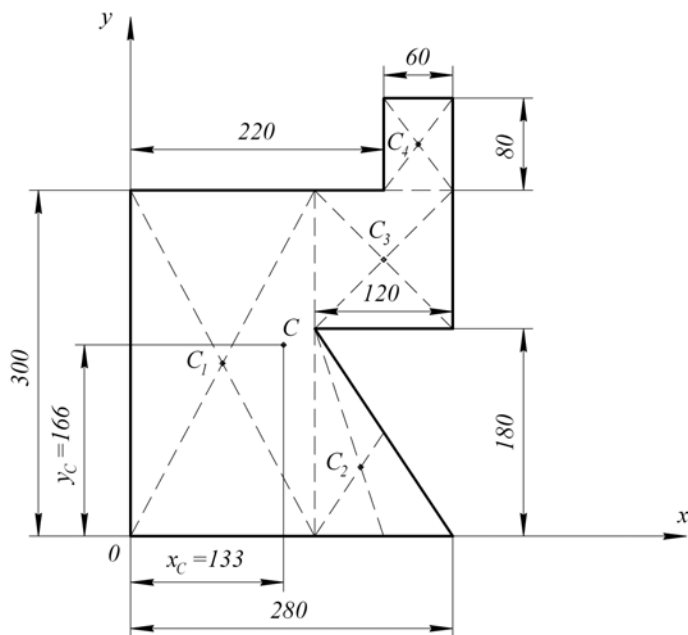


Рис. П4.2. К определению координат центра тяжести плоской фигуры методом разбиения на части

Таблица П4.2

Определение координат центров тяжести каждой части методом разбиения

| Составная часть | Площадь составной части $A_i, \text{мм}^2$          | Координаты центров тяжести каждой части |                      |
|-----------------|---|---|----------------------|
|                 |   | $X_i, \text{мм}$                        | $Y_i, \text{мм}$     |
| I               | $300 \cdot 160 = 48000 = 48 \cdot 10^3$             | 80                                      | 150                  |
| II              | $1/2 \cdot 120 \cdot 180 = 10800 = 10,8 \cdot 10^3$ | $160 + 1/3 \cdot 120 = 200$             | $1/3 \cdot 180 = 60$ |
| III             | $120 \cdot 120 = 14400 = 14,4 \cdot 10^3$           | $160 + 120/2 = 220$                     | $180 + 120/2 = 240$  |
| IV              | $80 \cdot 60 = 4800 = 4,8 \cdot 10^3$               | $220 + 60/2 = 250$                      | $300 + 80/2 = 340$   |

Вычисляем координаты  $X_C$  и  $Y_C$  центра тяжести плоской фигуры:

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 80 + 10,8 \cdot 10^3 \cdot 200 + 14,4 \cdot 10^3 \cdot 220 + 4,8 \cdot 10^3 \cdot 250}{48 \cdot 10^3 + 10,8 \cdot 10^3 + 14,4 \cdot 10^3 + 4,8 \cdot 10^3} = 133 \text{ мм};$$

$$Y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{48 \cdot 10^3 \cdot 150 + 10,8 \cdot 10^3 \cdot 60 + 14,4 \cdot 10^3 \cdot 240 + 4,8 \cdot 10^3 \cdot 340}{48 \cdot 10^3 + 10,8 \cdot 10^3 + 14,4 \cdot 10^3 + 4,8 \cdot 10^3} = 166 \text{ мм}.$$

Таким образом  $X_C = 133 \text{ мм}$ ,  $Y_C = 166 \text{ мм}$  (рис. П4.2).

При решении задачи *методом отрицательных площадей* данная фигура разделена на 3 части (рис. П4.3): прямоугольники I и 3, треугольник 2, причем площадь треугольника 2, вырезанная из плоской фигуры, берется со знаком минус, т. е. считается отрицательной. Легко проверить, что если при таком разделении фигуры все исходные данные свести в таблицу П4.3 и выполнить все вычисления, то получится тот же результат.

Таблица П4.3

Определение координат центров тяжести каждой части методом отрицательных площадей

| Номер составной части | Площадь составной части $A_i, \text{мм}^2$            | Координаты центра тяжести каждой части |                       |
|-----------------------|---|--|-----------------------|
|                       |   | $X_i, \text{мм}$                       | $Y_i, \text{мм}$      |
| 1                     | $300 \cdot 280 = 84000 = 84 \cdot 10^3$               | $280/2 = 140$                          | $300/2 = 150$         |
| 2                     | $1/2 \cdot 120 \cdot 180 = -10800 = -10,8 \cdot 10^3$ | $2/3 \cdot 120 + 160 = 240$            | $2/3 \cdot 180 = 120$ |
| 3                     | $60 \cdot 80 = 4800 = 4,8 \cdot 10^3$                 | $220 + 60/2 = 250$                     | $300 + 80/2 = 340$    |

$$X_C = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{84 \cdot 10^3 \cdot 140 - 10,8 \cdot 10^3 \cdot 240 + 4,8 \cdot 10^3 \cdot 250}{84 \cdot 10^3 - 10,8 \cdot 10^3 + 4,8 \cdot 10^3} = 133 \text{ мм};$$

$$Y_C = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{84 \cdot 10^3 \cdot 150 - 10,8 \cdot 10^3 \cdot 120 + 4,8 \cdot 10^3 \cdot 340}{84 \cdot 10^3 - 10,8 \cdot 10^3 + 4,8 \cdot 10^3} = 166 \text{ мм}.$$

Центр тяжести тела в обоих случаях совпадает (рис. П4.3), что указывает на правильность решения примера.

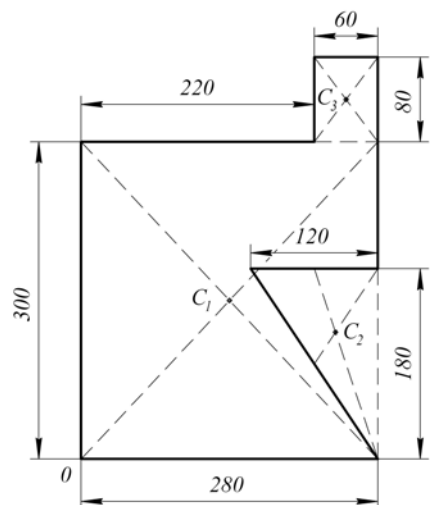
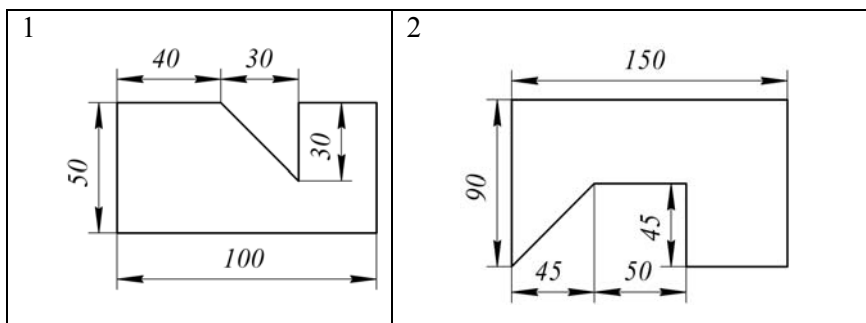


Рис. П4.3. К определению координат центра тяжести плоской фигуры методом отрицательных площадей

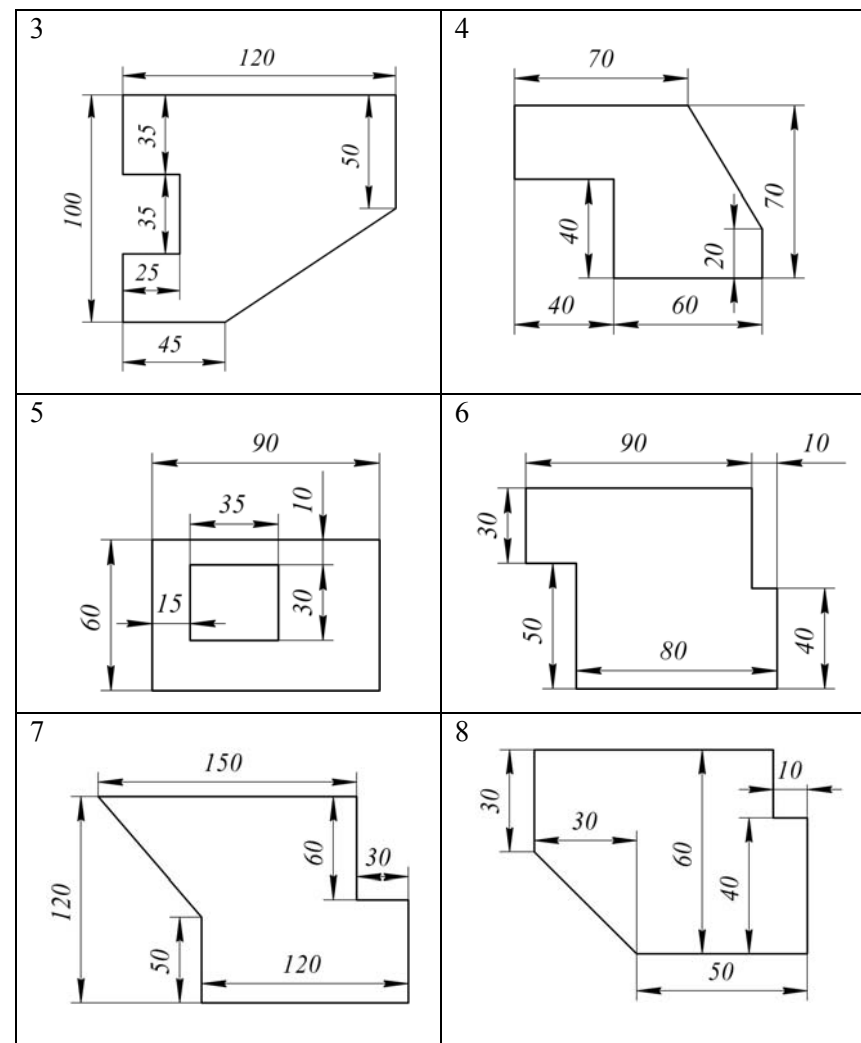
Условие задачи 4.1. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, составленной из геометрических элементов. Расчетные схемы приведены в таблице П4.4. Размеры, указанные на схемах, даны в мм.

Таблица П4.4

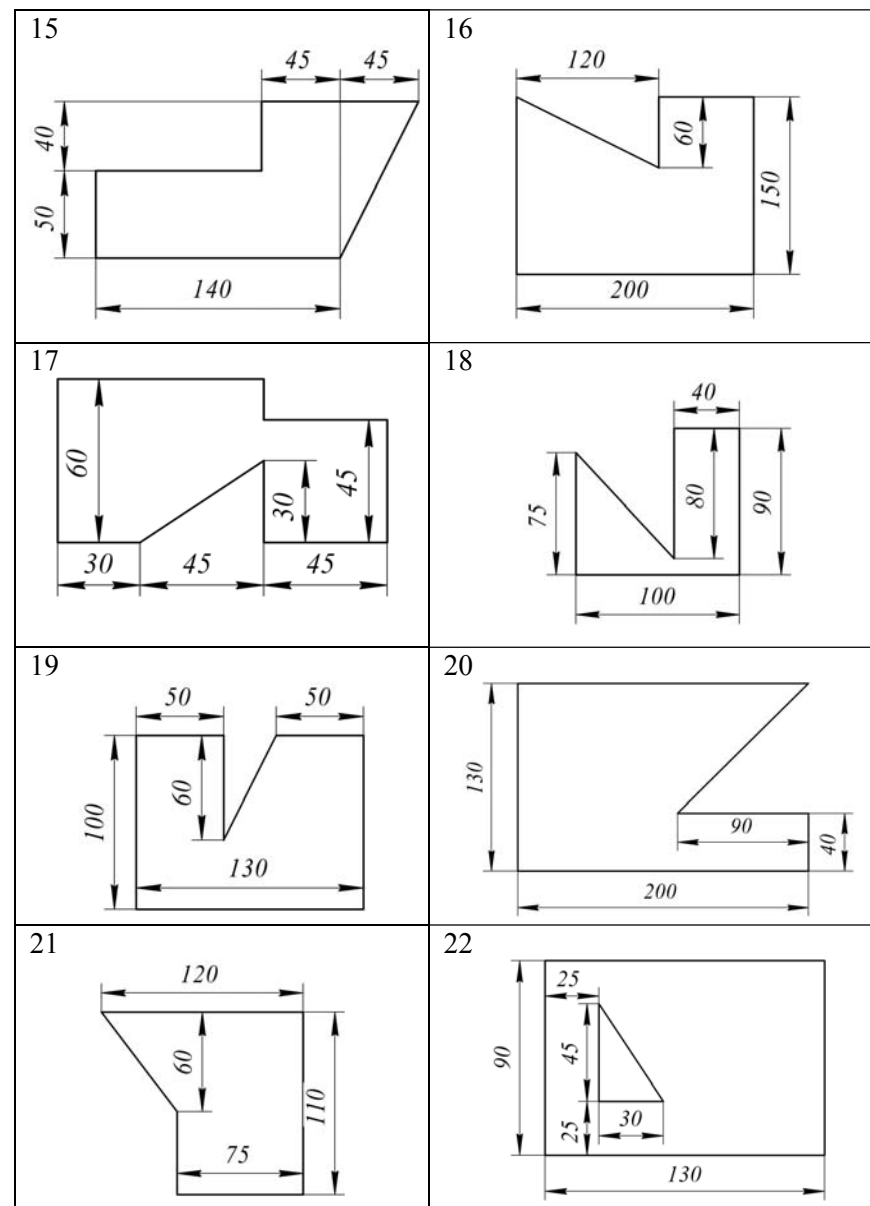
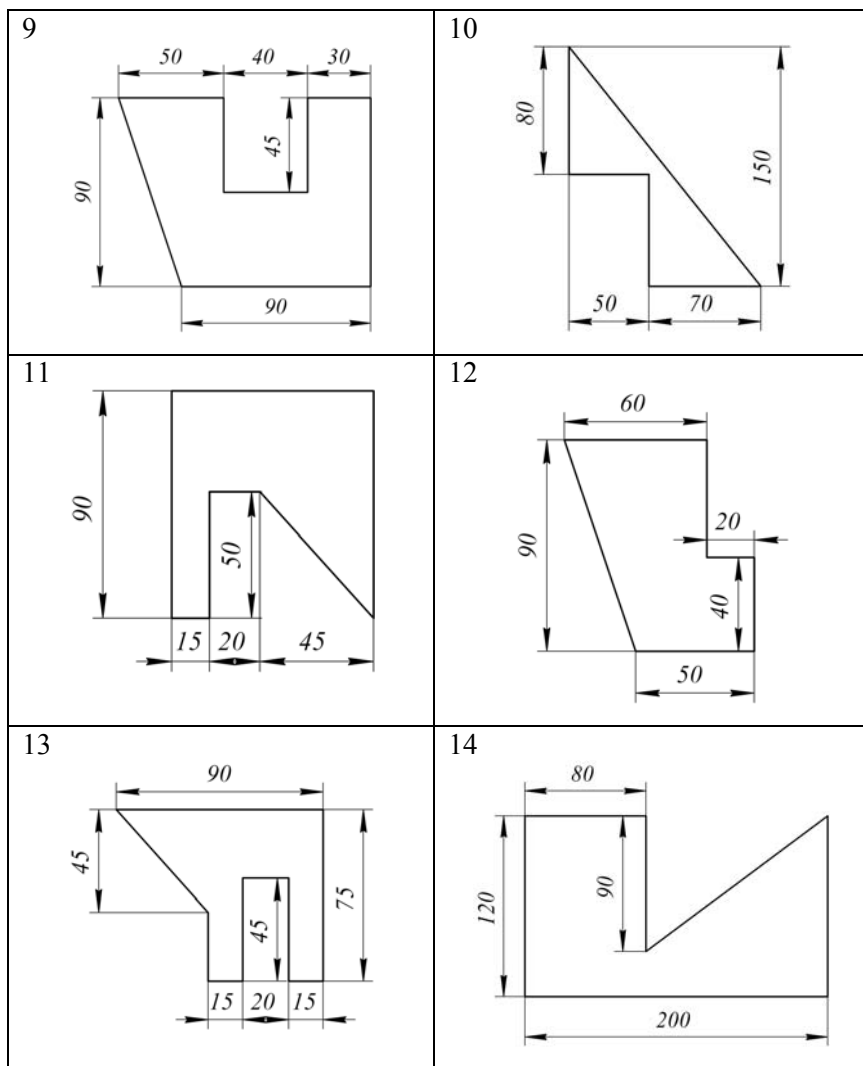
Расчетные схемы к задаче 4.1

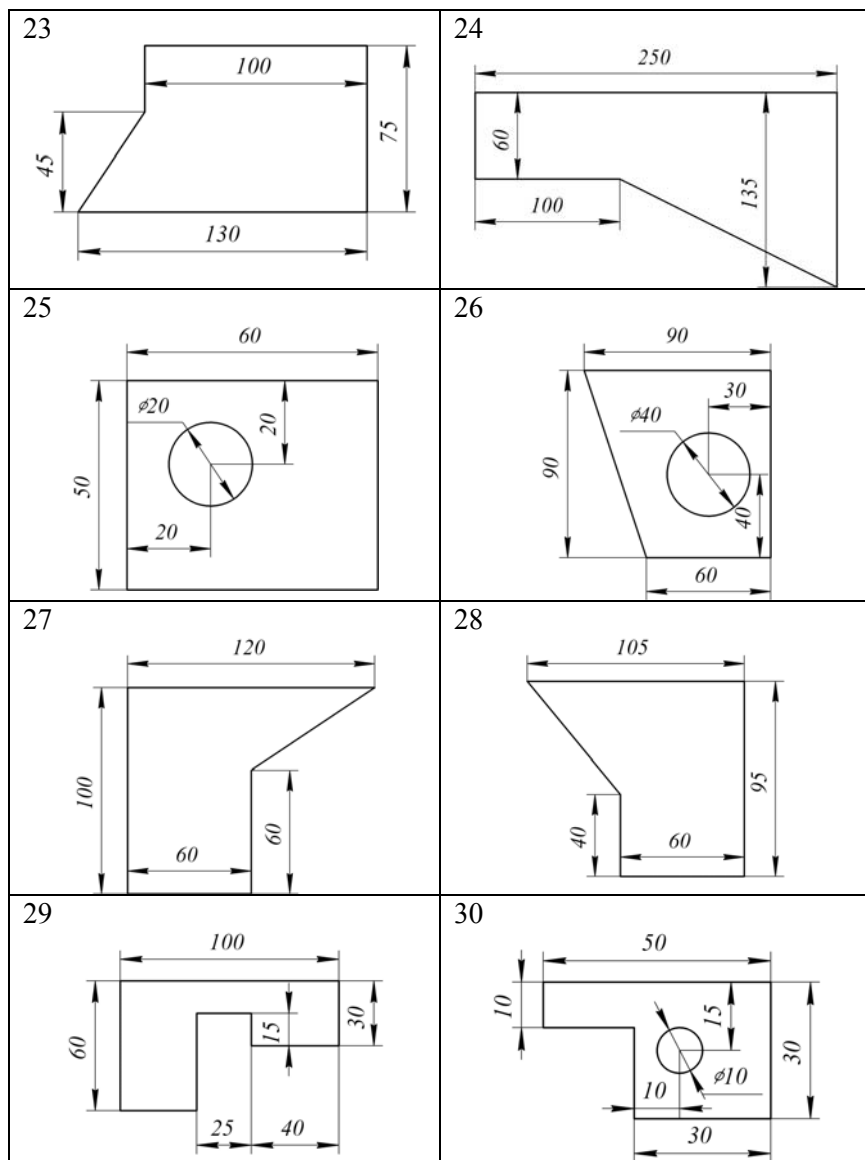


Продолжение таблицы П4.4









### Задача 4.2. Определение координат центра тяжести сложного сечения

**Постановка задачи.** Определить координаты центра тяжести сложного сечения, составленного из профилей стандартного проката.

#### План решения.

1. Данное сложное сечение, составленное из профилей стандартного проката, изображаем в масштабе на чертеже.
2. Выбираем расположение координатных осей.
3. Из таблиц прокатной стали (ГОСТ 8509–86, 8510–86, 8239–72, 8240–32) выписываем геометрические характеристики и необходимые размеры заданных сечений (площадь,  $z_0$ ,  $b$ ,  $h$  и т. д.).
4. Высчитываем координаты  $x_i$  и  $y_i$  центров тяжести  $C_i$  каждой части в выбранных осях координат и заполняем таблицу П4.1.
5. Определяем по формулам (П4.1) и (П4.2) координаты центра тяжести  $C$  всего составного сечения.
6. Показываем положение центра тяжести  $C$  сечения на чертеже.

**Пример П4.2.** Определить координаты центра тяжести сложного сечения, составленного из прокатных профилей – швеллера № 16 и неравнобокого уголка № 7,5/5 (рис. П4.4).

#### Решение.

В соответствии с таблицами сортамента для прокатных профилей швеллер № 16 имеет размеры:  $h = 160$  мм,  $b = 64$  мм,  $d = 5$  мм,  $t = 8,4$  мм, площадь сечения  $A_1 = 18,1$  см<sup>2</sup>, координаты центра тяжести  $X_{01} = 18$  мм и  $Y_{01} = 80$  мм. Неравнобокий уголок № 7,5/5 имеет размеры:  $B = 75$  мм,  $b = 50$  мм,  $d = 5$  мм, площадь сечения  $A_2 = 6,11$  см<sup>2</sup>, координаты центра тяжести  $X_{02} = 11,7$  мм и  $Y_{02} = 23,9$  мм.

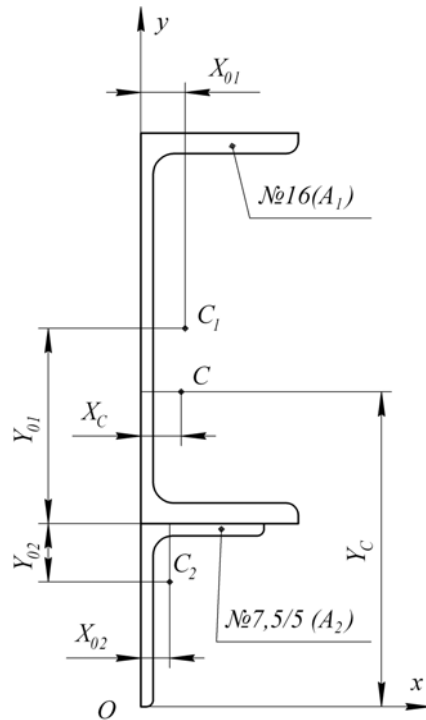


Рис. П4.4. Схема к определению координат центра тяжести сложного сечения

Выбираем систему координат  $x$  и  $y$  с началом в точке  $O$  и определяем координаты центра тяжести сложного сечения (швеллер № 16 с площадью  $A_1$  и неравнобокий уголок с площадью  $A_2$  в соответствии с уравнениями (П4.1) и (П4.2) (принимая размеры профилей в сантиметрах):

$$X_c = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{18,1 \cdot 1,8 + 6,11 \cdot 1,17}{18,1 + 6,11} = 1,64 \text{ см};$$

$$Y_c = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \cdot (B + y_{01}) + A_2 \cdot (B - y_{02})}{A_1 + A_2} =$$

$$= \frac{18,1 \cdot (7,5 + 8) + 6,11 \cdot (7,5 - 2,39)}{18,1 + 6,11} = 12,9 \text{ см}.$$

Зная  $X_C$  и  $Y_C$ , откладываем их значения в выбранном масштабе по осям координат. В точке пересечения этих прямых получим положение центра тяжести  $C$  рассматриваемого сечения (рис. П4.4).

Условие задачи 4.2. Определить координаты центра тяжести сечения, составленного из приваренных друг к другу прокатных профилей. Исходные данные и расчетные схемы к задаче 4.2 приведены соответственно в таблицах П4.5 и П4.6.

Таблица П4.5

Исходные данные к задаче 4.2

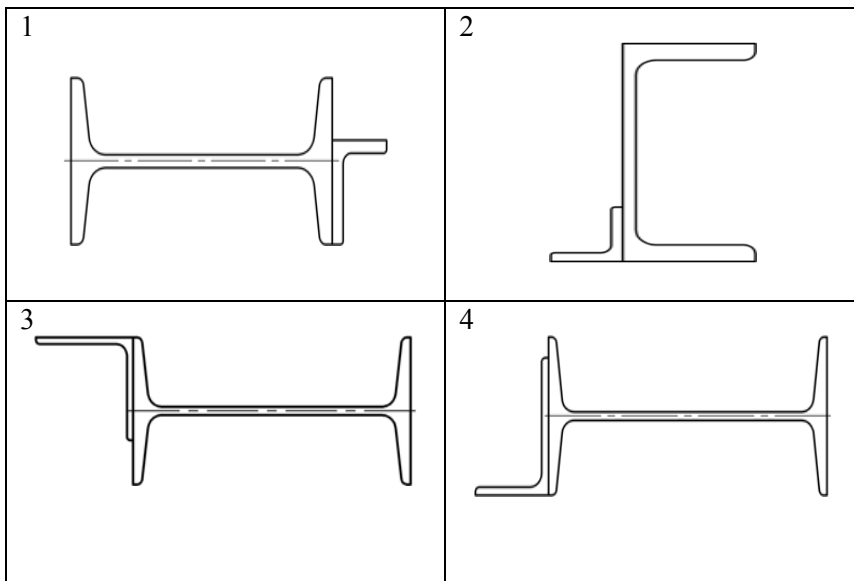
| Номер варианта | Номер схемы | Номер двутавра | Номер швеллера | Номер уголка равнополочного | Номер уголка неравнополочного |
|----------------|-------------|----------------|----------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 1              | 1           | 12             | -              | -                           | 4/2,5                         |
| 2              | 1           | 14             | -              | -                           | 5/3,2                         |
| 3              | 1           | 16             | -              | -                           | 7,5/5                         |
| 4              | 2           | -              | 10             | 2,5                         | -                             |
| 5              | 2           | -              | 12             | 3,0                         | -                             |
| 6              | 2           | -              | 14             | 3,2                         | -                             |
| 7              | 3           | 18             | -              | 6,3                         | -                             |
| 8              | 3           | 22             | -              | 7,0                         | -                             |
| 9              | 3           | 24             | -              | 7,5                         | -                             |
| 10             | 4           | 44             | -              | -                           | 10/6,3                        |
| 11             | 4           | 22             | -              | -                           | 8/6                           |
| 12             | 4           | 20             | -              | -                           | 7,5/5                         |
| 13             | 5           | -              | 16             | -                           | 4/2,5                         |
| 14             | 5           | -              | 18             | -                           | 6,3/4                         |
| 15             | 5           | -              | 20             | -                           | 7,5/5                         |
| 16             | 6           | -              | 22             | 9,0                         | -                             |
| 17             | 6           | -              | 16             | 7,0                         | -                             |
| 18             | 6           | -              | 18             | 8,0                         | -                             |
| 19             | 7           | -              | 10             | 8,0                         | -                             |
| 20             | 7           | -              | 12             | 9,0                         | -                             |
| 21             | 7           | -              | 14             | 10,0                        | -                             |
| 22             | 8           | 18             | -              | 6,3                         | -                             |

Окончание таблицы П4.5

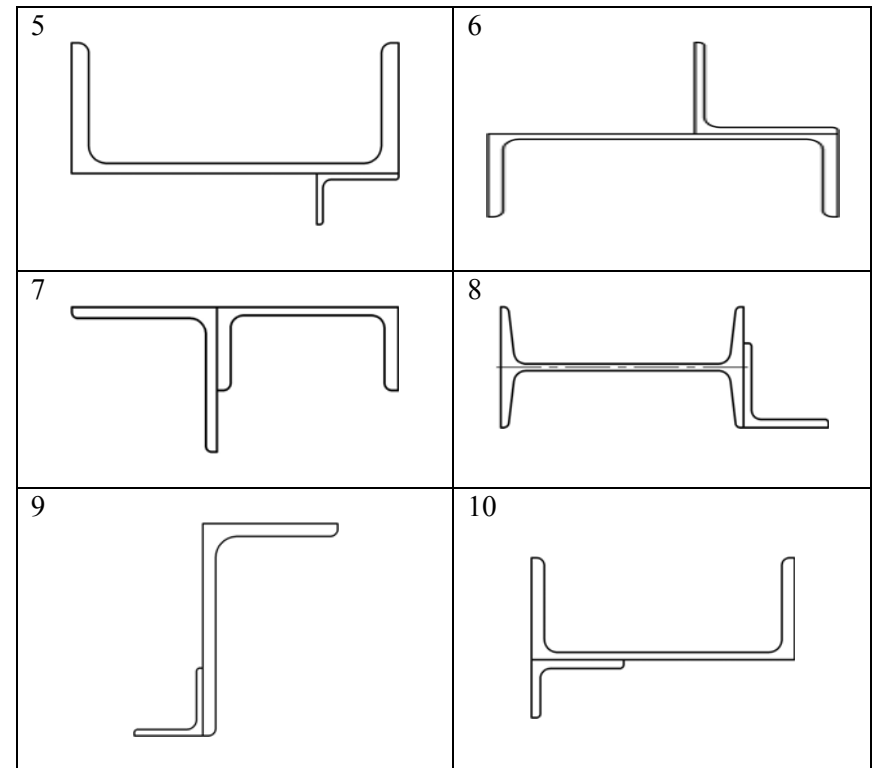
| Номер варианта | Номер схемы | Номер двутавра | Номер швеллера | Номер уголка равнополочного | Номер уголка неравнополочного |
|----------------|-------------|----------------|----------------|-----------------------------|-------------------------------|
| 23             | 8           | 16             | -              | 7,0                         | -                             |
| 24             | 8           | 14             | -              | 7,5                         | -                             |
| 25             | 9           | -              | -              | 3,2                         | 10/6,3                        |
| 26             | 9           | -              | -              | 3,0                         | 7,5/5                         |
| 27             | 9           | -              | -              | 2,5                         | 5/3,2                         |
| 28             | 10          | -              | 18             | -                           | 6,3/4                         |
| 29             | 10          | -              | 16             | -                           | 5/3,2                         |
| 30             | 10          | -              | 14             | -                           | 4/2,5                         |

Таблица П4.6

Расчетные схемы к задаче 4.2



Окончание таблицы П4.6



### Задача 4.3. Определение центра тяжести пространственной стержневой системы

**Постановка задачи.** Определить координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из  $N$  однородных стержней.

#### План решения.

1. Разбиваем фигуру на отдельные стержни.
2. Выбираем систему координат. Вычисляем длины и координаты  $x_i, y_i, z_i, i = 1 - N$  центров тяжести отдельных стержней. Координаты центра прямолинейного однородного стержня вычисляем как полу-сумму координат его концов.
3. Находим суммарную длину стержневой системы

$$L = \sum_{i=1}^N L_i. \quad (\text{П4.3})$$

4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам:

$$x_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i, \quad y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i, \quad z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i. \quad (\text{П4.4})$$

**Пример П4.3.** Найти координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней (рис. П4.5). Даны размеры:  $a = 12$  м,  $b = 16$  м,  $c = 10$  м,  $d = 5$  м.

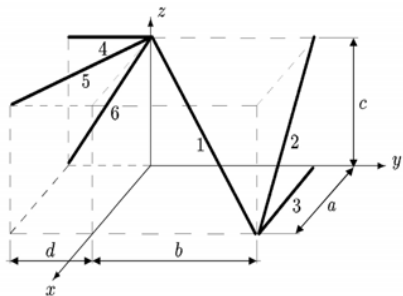


Рис. П4.5. Схема к определению координат центра тяжести пространственной стержневой системы

#### Решение.

1. Разбиваем фигуру на шесть стержней.
2. Выбираем систему координат (рис. П4.5). Вычисляем длины и координаты  $x_i, y_i, z_i, i = 1 - N$  центров тяжести отдельных стержней.
3. Находим суммарную длину стержневой системы:

$$L = \sum_{i=1}^6 L_i = 79,162 \text{ м.}$$

Промежуточные результаты заносим в таблицу П4.7.

Таблица П4.7

Промежуточные результаты по определению координат центра тяжести пространственной стержневой системы

| $i$ | $L_i$                    | $x_i$ | $y_i$  | $z_i$ |
|-----|--------------------------|-------|--------|-------|
| 1   | $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ | $a/2$ | $b/2$  | $c/2$ |
| 2   | $\sqrt{a^2 + c^2}$       | $a/2$ | $b$    | $c/2$ |
| 3   | $a$                      | $a/2$ | $b$    | 0     |
| 4   | $d$                      | 0     | $-d/2$ | $c$   |
| 5   | $\sqrt{a^2 + d^2}$       | $a/2$ | $-d/2$ | $c$   |
| 6   | $\sqrt{c^2 + d^2}$       | 0     | $-d/2$ | $c/2$ |

4. Определяем координаты центра тяжести тела по формулам П4.4:

$$X_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i x_i = 4,774 \text{ м}, \quad Y_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i y_i = 6,921 \text{ м},$$

$$Z_c = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N L_i z_i = 5,375 \text{ м.}$$

**Условие задачи 4.3.** Определить координаты центра тяжести пространственной фигуры, состоящей из шести однородных стержней. Исходные данные приведены в таблице П4.8, а расчетные схемы - в таблице П4.9.

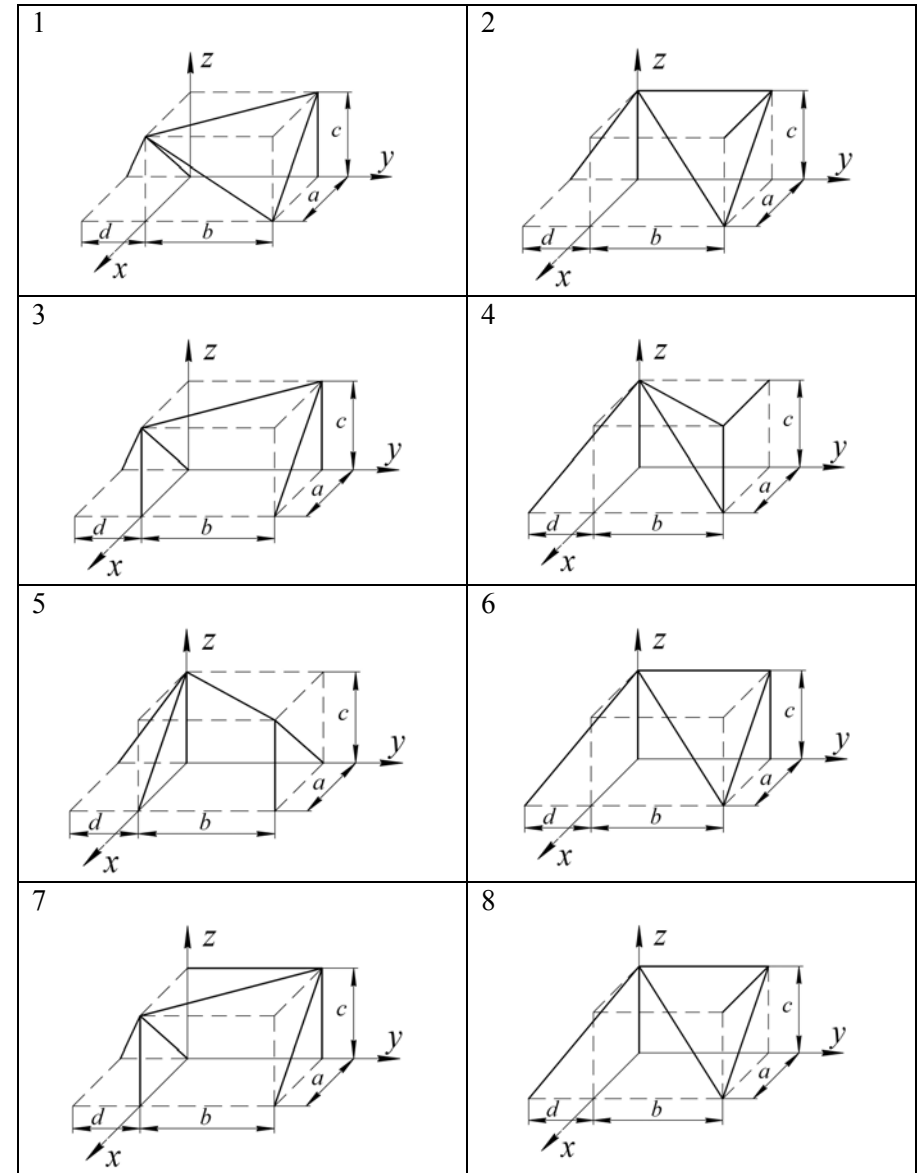
Таблица П4.8

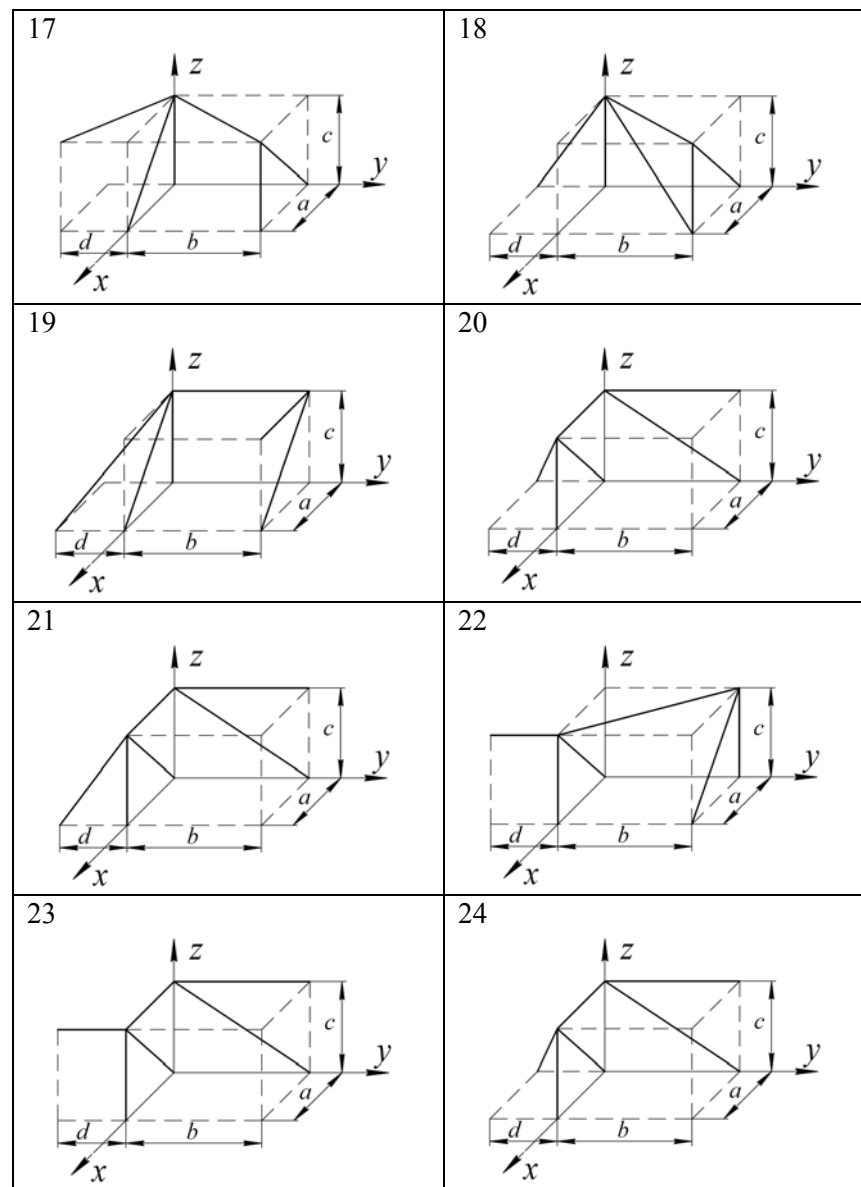
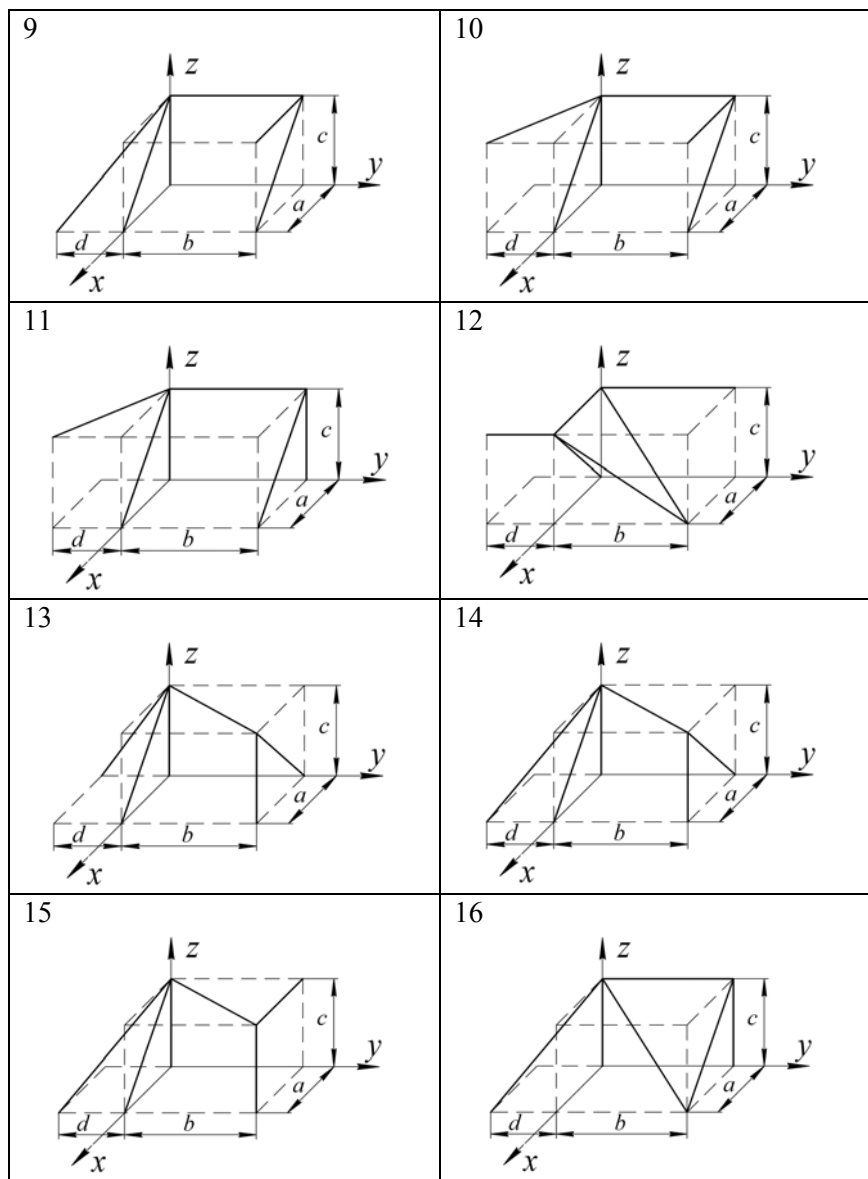
Исходные данные к задаче 4.3

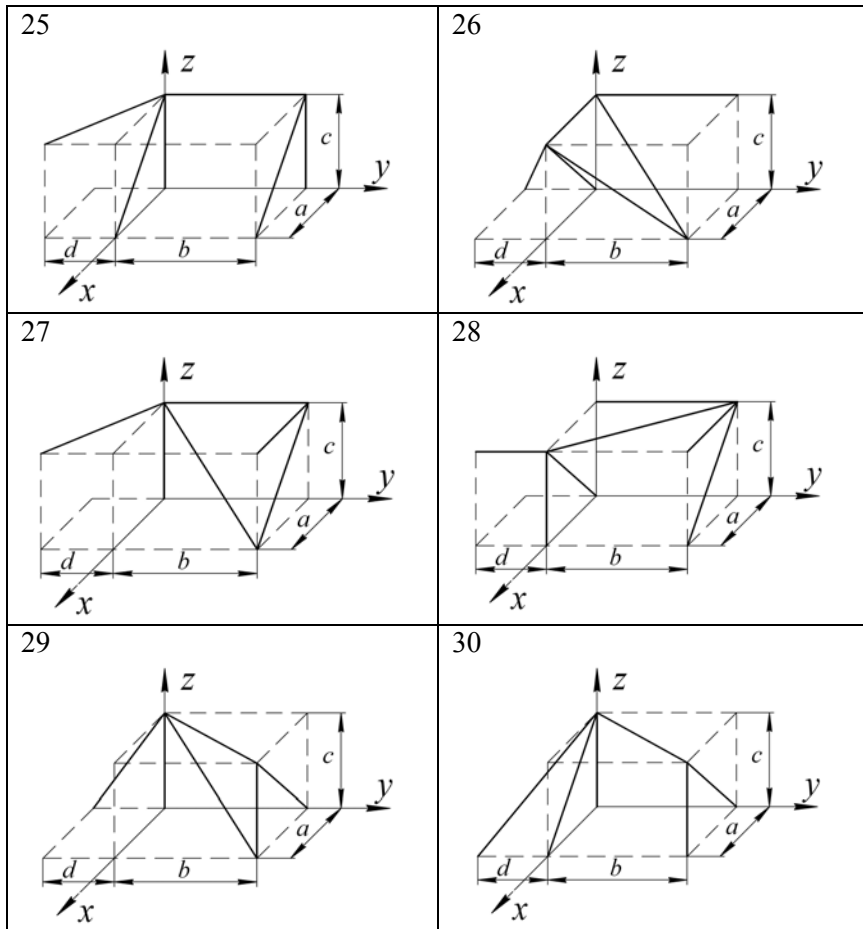
| Номер варианта | Номер схемы | Размеры пространственной фигуры, м |     |     |     |
|----------------|-------------|------------------------------------|-----|-----|-----|
|                |             | $a$                                | $b$ | $c$ | $d$ |
| 01             | 1           | 3                                  | 4   | 3   | 2   |
| 02             | 2           | 4                                  | 6   | 5   | 3   |
| 03             | 3           | 7                                  | 6   | 5   | 4   |
| 04             | 4           | 4                                  | 6   | 5   | 3   |
| 05             | 5           | 7                                  | 6   | 5   | 3   |
| 06             | 6           | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 07             | 7           | 3                                  | 4   | 3   | 2   |
| 08             | 8           | 2                                  | 3   | 4   | 2   |
| 09             | 9           | 7                                  | 6   | 5   | 3   |
| 10             | 10          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 11             | 11          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 12             | 12          | 2                                  | 3   | 4   | 3   |
| 13             | 13          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 14             | 14          | 2                                  | 3   | 4   | 2   |
| 15             | 15          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 16             | 16          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 17             | 17          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 18             | 18          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 19             | 19          | 7                                  | 6   | 5   | 3   |
| 20             | 20          | 4                                  | 6   | 5   | 4   |
| 21             | 21          | 6                                  | 5   | 4   | 3   |
| 22             | 22          | 5                                  | 4   | 3   | 2   |
| 23             | 23          | 6                                  | 5   | 4   | 3   |
| 24             | 24          | 5                                  | 4   | 3   | 2   |
| 25             | 25          | 2                                  | 3   | 4   | 2   |
| 26             | 26          | 3                                  | 4   | 3   | 2   |
| 27             | 27          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |
| 28             | 28          | 5                                  | 4   | 3   | 2   |
| 29             | 29          | 7                                  | 6   | 5   | 3   |
| 30             | 30          | 6                                  | 5   | 4   | 2   |

Таблица П4.9

Расчетные схемы к задаче 4.3







### Задача 4.4. Определение координат центра тяжести объемного тела

**Постановка задачи.** Определить координаты центра тяжести однородного объемного тела.

**План решения.**

1. Разбиваем тело на простые части, положение центров тяжести которых известно.
2. Выбираем систему координат. Вычисляем объемы  $V_i$  и координаты  $x_i, y_i, z_i$  центров тяжести отдельных частей. Объемы вырезанных частей берем со знаком минус.
3. Находим общий объем тела по формуле

$$V = \sum V_i. \quad (\text{П4.5})$$

Определяем координаты центра тяжести тела:

$$x_C = \sum V_i \cdot x_i / V, \quad y_C = \sum V_i \cdot y_i / V, \quad z_C = \sum V_i \cdot z_i / V. \quad (\text{П4.6})$$

**Пример П4.4.** Найти координаты центра тяжести однородного объемного тела (рис. П4.6):  $a = 10$  м,  $b = 12$  м,  $c = 6$  м,  $d = 8$  м,  $R = d/2$ .

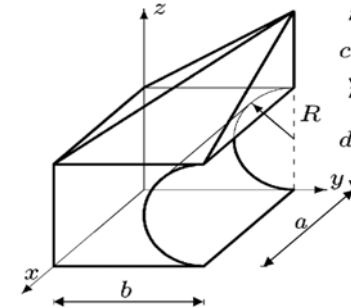


Рис. П4.6. Схема к определению координат центра тяжести объемного тела

**Решение.**

1. Разбиваем тело на пирамиду 1, параллелепипед 2 и половину цилиндра 3 (рис. П4.7).
2. Выбираем систему координат. Вычисляем объемы  $V_i$  и координаты  $x_i, y_i, z_i$  центров тяжести отдельных частей. Центр тяжести пирамиды 1 лежит в точке  $C_1, C_0C_1 = C_0O_1/4$ ,



$$V_1 = \frac{1}{3}abc, \quad x_1 = \frac{3}{8}a, \quad y_1 = \frac{5}{8}b, \quad z_1 = d + \frac{1}{4}c.$$

Центр тяжести параллелепипеда 2 совпадает с его геометрическим центром:

$$V_2 = abd, \quad x_2 = \frac{1}{2}a, \quad y_2 = \frac{1}{2}b, \quad z_2 = \frac{1}{2}d.$$

Объем половины цилиндра 3 берем со знаком минус:

$$V_3 = -\pi R^2 a / 2, \quad x_3 = \frac{1}{2}a, \quad y_3 = b - l, \quad z_2 = \frac{1}{2}d,$$

где  $l = 4R/(3\pi)$  – расстояние по оси  $y$  от оси цилиндра до его центра тяжести<sup>1</sup>.

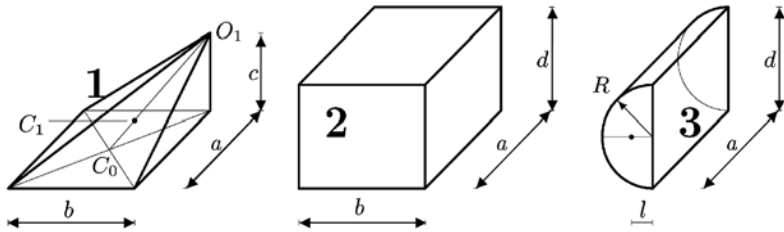


Рис. П4.7. Разбивка сложного тела на отдельные части

3. Находим общий объем тела:

$$V = \sum_{i=1}^3 V_i = 240 + 960 - 251,327 = 948,673 \text{ м}^3.$$

4. Определяем координаты центра тяжести тела:

$$x_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i x_i = \frac{240 \cdot 3,75 + 960 \cdot 5 - 251,327 \cdot 5}{948,673} = 4,684 \text{ м}.$$

<sup>1</sup> В общем случае объем тела, лежащего в области  $\Omega$ , можно найти, вычисляя тройной интеграл по области  $V = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ , а координаты центра тяжести, например,  $x_c$  однородного тела можно определить по формуле  $x_c = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} dx dy dz$ .

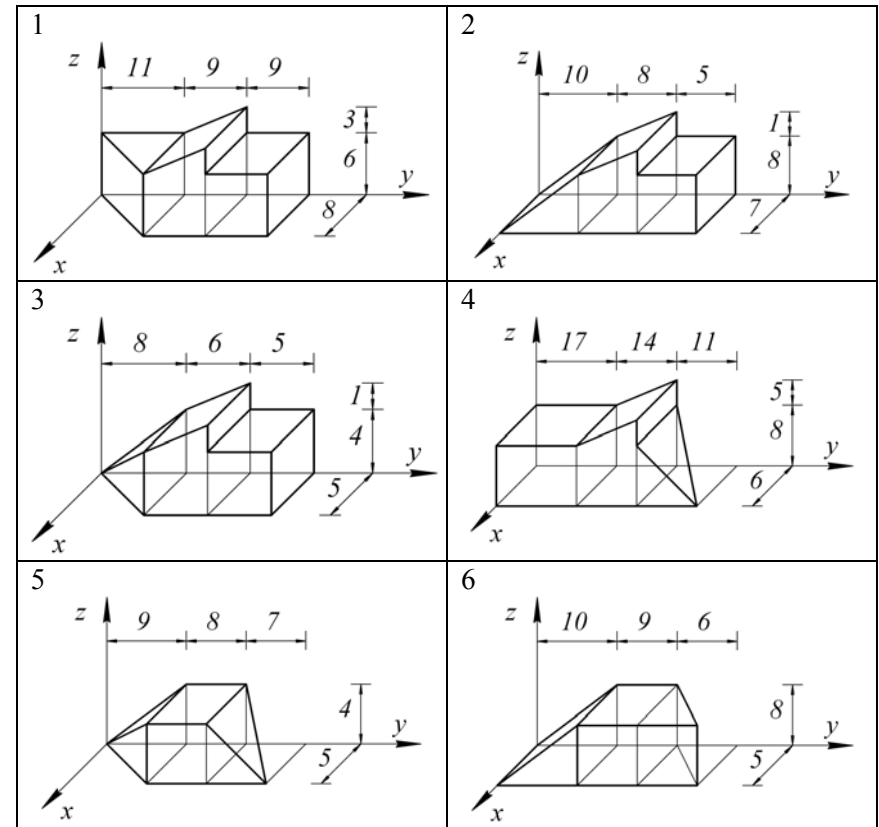
$$y_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i y_i = \frac{240 \cdot 7,5 + 960 \cdot 6 - 251,327 \cdot 10,302}{948,673} = 5,240 \text{ м}.$$

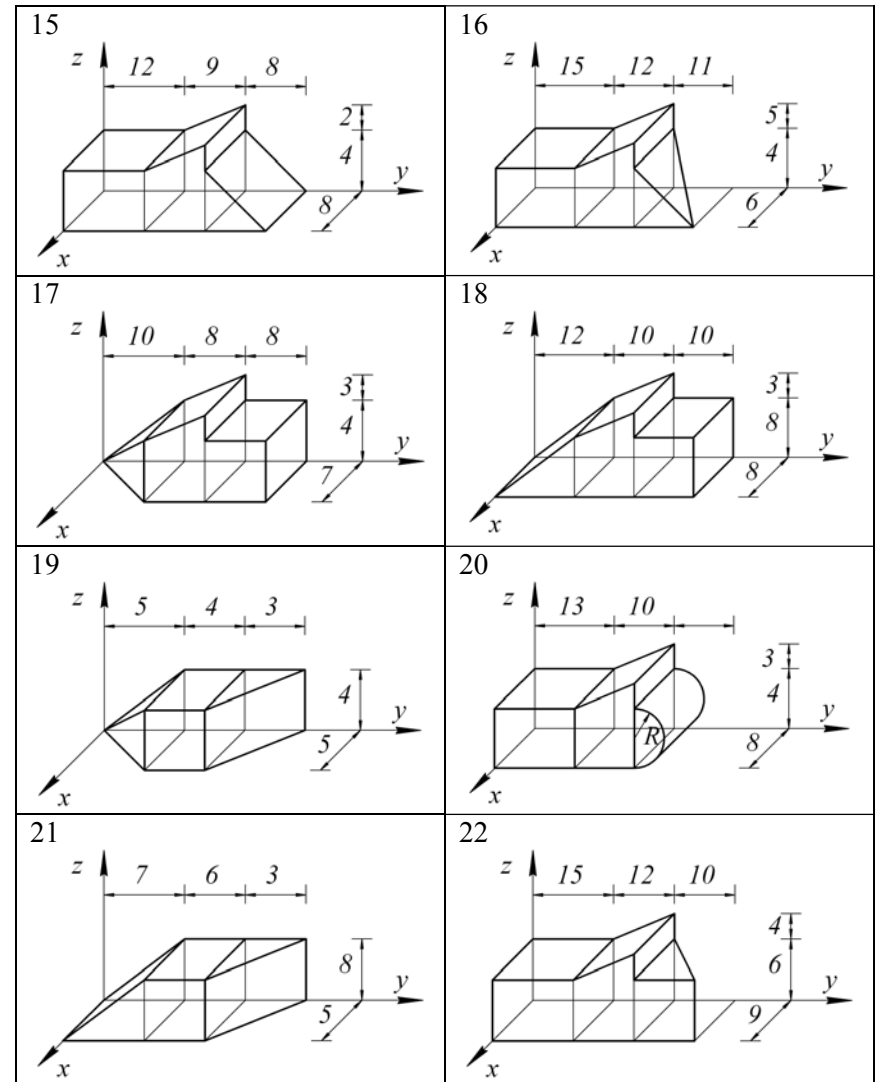
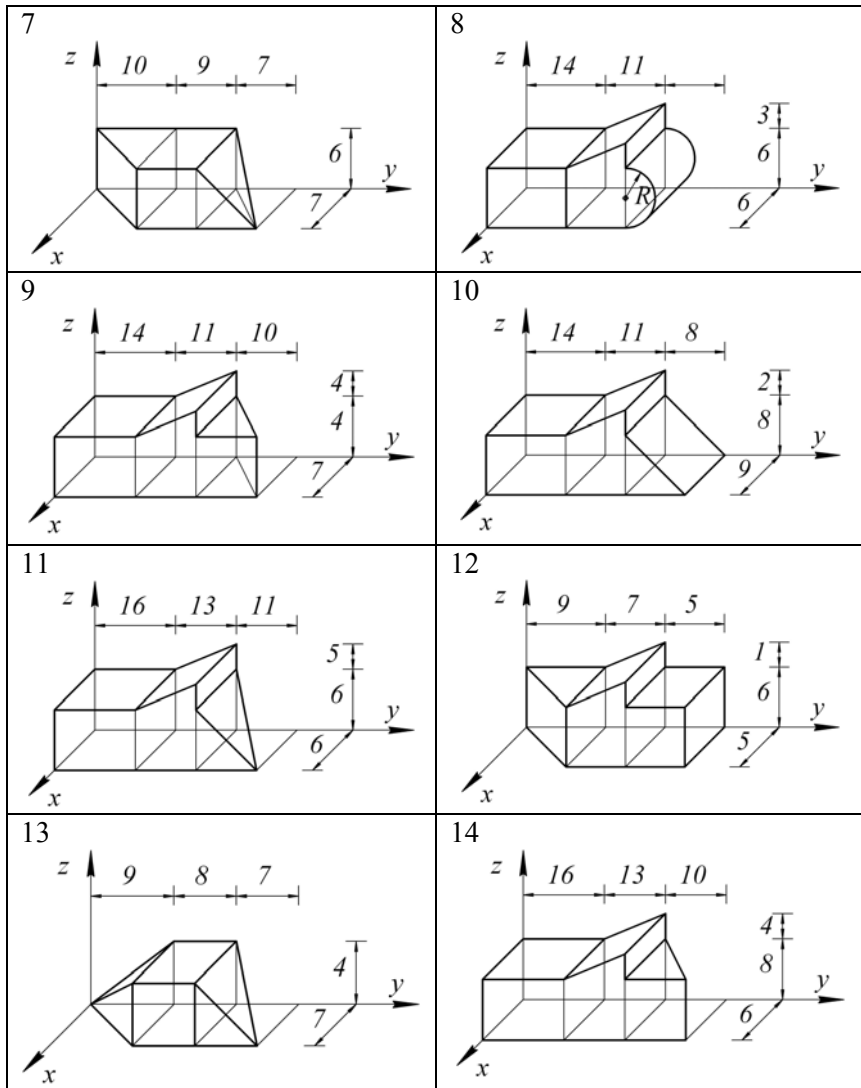
$$z_c = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^3 V_i z_i = \frac{240 \cdot 9,5 + 960 \cdot 4 - 251,327 \cdot 4}{948,673} = 5,391 \text{ м}.$$

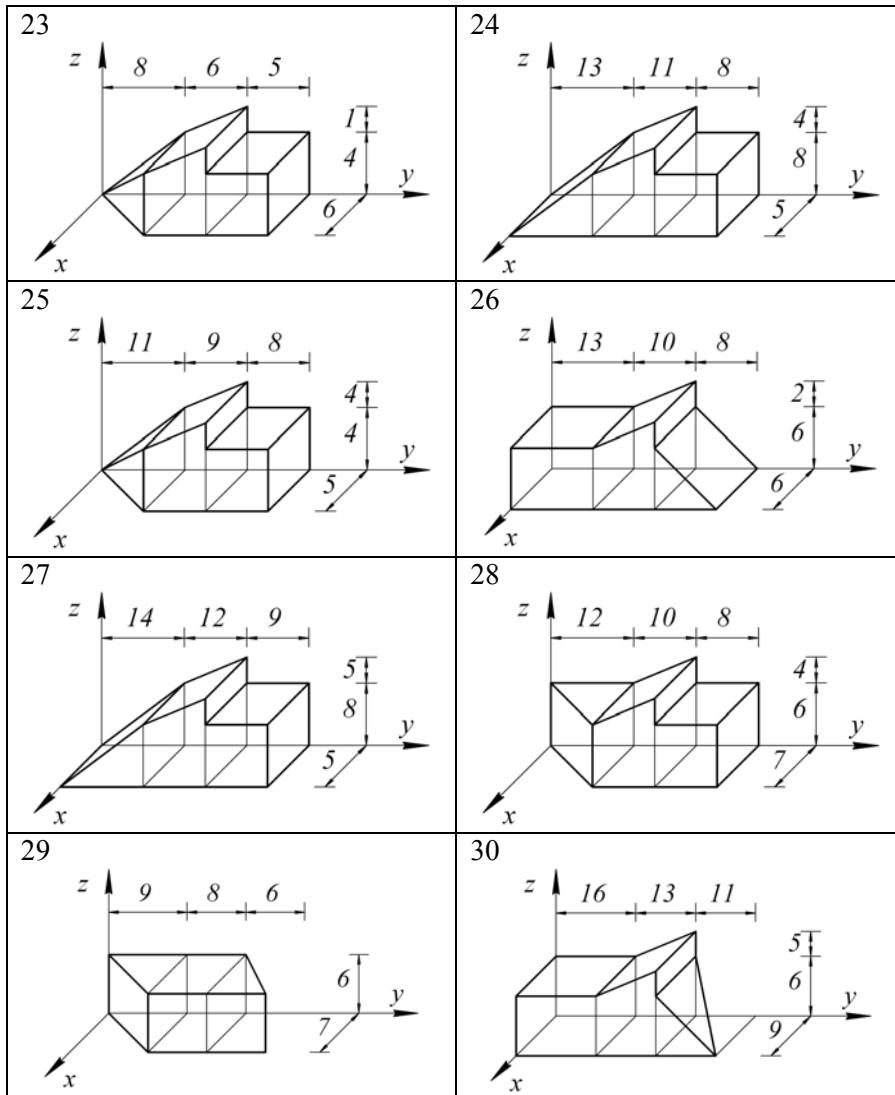
Условие задачи 4.4. Определить координаты центра тяжести однородного объемного тела. Виды однородных объемных тел к задаче 4.4 приведены в таблице П4.10.

Таблица П4.10

Виды однородных объемных тел







## 6. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СИСТЕМА СИЛ

### 6.1. Общие понятия о пространственной системе сил

Произвольная пространственная система сил является более сложной, чем, например, плоская система сил. Но в предыдущих параграфах данного раздела были введены основные понятия (пара сил, момент силы и пары сил), получены принципиально важные результаты (теорема Вариньона, метод параллельного переноса сил и т. п.). Поэтому мы часто будем ссылаться на них, вводя необходимые уточнения с учетом особенностей рассматриваемой системы.

*Произвольная пространственная система сил* – система сил, не лежащих в одной плоскости и линии действия которых не пересекаются в одной точке.

Пусть дана сила  $\vec{F}$  (рис. 6.1). Возьмем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с началом вектора силы  $\vec{F}$ . Из конца этого вектора опустим перпендикуляр на плоскость  $xOy$  и разложим силу  $\vec{F}$  на составляющие  $\vec{F}_{xy}$  и  $\vec{F}_z$ , а составляющую  $\vec{F}_{xy}$  – на составляющие  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ .

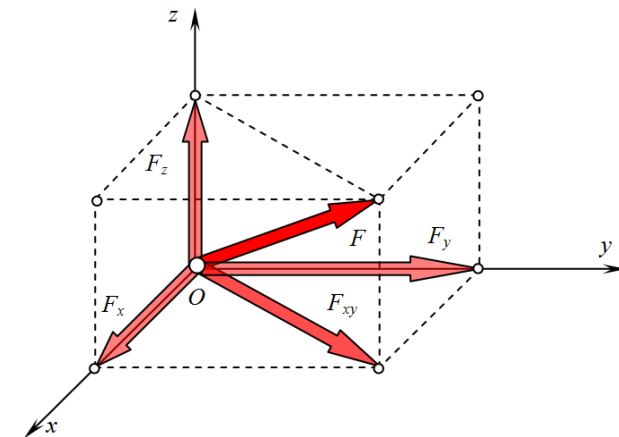


Рис. 6.1. Схема к определению равнодействующий трех взаимно перпендикулярных сил

Достроим полученное изображение до параллелепипеда, у которого составляющие  $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$  являются ребрами, а сила  $\vec{F}$  – диагональю.

Из изложенного можно сделать такой вывод: *равнодействующая трех взаимно перпендикулярных сил выражается по модулю и направлению диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах.*

Из рисунка 6.1 видно, что в случае разложения силы  $\vec{F}$  по трем взаимно перпендикулярным направлениям  $x, y, z$  составляющие  $\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z$  равны по модулю проекциям силы  $F$  на эти оси. Эти проекции обозначим  $F_x, F_y, F_z$ .

Зная проекции силы на три взаимно перпендикулярные оси координат, можно определить модуль и направление вектора силы по формулам:

модуль силы

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (6.1)$$

направляющие косинусы

$$\cos(F \wedge x) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(F \wedge y) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(F \wedge z) = \frac{F_z}{F}. \quad (6.2)$$

Определение проекции силы на ось остается прежним (параграф 2.3). Если сила и ось не лежат в одной плоскости, то проецирующие перпендикуляры также не лежат в одной плоскости.

Для того чтобы определить, чему равна проекция силы  $F$  на ось  $Ox$ , следует мысленно провести через начало или конец силы ось  $Ox_1$  параллельную данной оси  $Ox$ , тогда

$$F_x = F \cos \alpha, \text{ так как } F_x = F_{x1}.$$

Правило знаков для проекций остается прежним.

Если вектор силы параллелен оси, то он проецируется на эту ось в натуральную величину.

Если вектор силы лежит в плоскости, перпендикулярной оси, то его проекция на эту ось равна нулю.

## 6.2. Пространственная система сходящихся сил и условия ее равновесия

Пространственная система сил называется *сходящейся*, если линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке и она подобно плоской также приводится к равнодействующей. *Пространственная система сходящихся сил эквивалентна равнодействующей, которая равна векторной сумме этих сил; линия действия равнодействующей проходит через точку пересечения линий действия составляющих сил.*

Пусть дана пространственная система  $n$  сходящихся сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ ) (рис. 6.2).

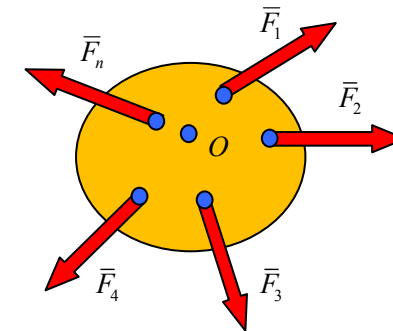


Рис. 6.2. Схема к определению равнодействующей пространственной системы сходящихся сил

На основании следствия из аксиом 3 и 4 перенесем все силы системы вдоль линий действия в точку их пересечения. Затем на основании правила параллелограмма сложим силы  $F_1$  и  $F_2$ , в результате чего получим их равнодействующую:

$$R_{1,2} = F_1 + F_2.$$

Сложив эту равнодействующую с силой  $F_3$ , получим равнодействующую трех сил:

$$R_{1-3} = R_{1,2} + F_3. \quad (6.3)$$

Повторив указанную операцию  $n - 1$  раз, получим равнодействующую системы  $n$  сил, которая будет равна векторной сумме этих

сил; линия действия равнодействующей будет проходить через точку пересечения линий действия составляющих:

$$R_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n \text{ или } R_{\Sigma} = \sum F_i. \quad (6.4)$$

Таким образом, если все слагаемые силы перенести по их линиям действия в точку пересечения линий действия, то равнодействующая  $R_{\Sigma}$  пространственной системы сходящихся сил оказывается приложенной в той же точке и является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах, т. е.

$$R_{\Sigma} = \sum F_i.$$

В отличие от соответствующего силового многоугольника для плоской системы сил, полученный силовой многоугольник не является плоским, т. е. он представляет собою ломаную пространственную линию.

Проекция равнодействующей силы  $R_{\Sigma}$  на оси декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны суммам проекций слагаемых сил на соответствующие оси, т. е.

$$R_{\Sigma x} = \sum F_{ix}, R_{\Sigma y} = \sum F_{iy}, R_{\Sigma z} = \sum F_{iz}. \quad (6.5)$$

Модуль равнодействующей  $R_{\Sigma}$  равен

$$R_{\Sigma} = \sqrt{R_{\Sigma x}^2 + R_{\Sigma y}^2 + R_{\Sigma z}^2}, \quad (6.6)$$

а направляющие косинусы определяются по формулам

$$\cos(F_{\Sigma} \wedge x) = \frac{F_{\Sigma x}}{R_{\Sigma}}; \quad \cos(F_{\Sigma} \wedge y) = \frac{F_{\Sigma y}}{R_{\Sigma}}; \quad \cos(F_{\Sigma} \wedge z) = \frac{F_{\Sigma z}}{R_{\Sigma}}. \quad (6.7)$$

Для равновесия твердого тела, к которому приложена пространственная система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая равнялась нулю:  $R_{\Sigma} = 0$ , т. е. чтобы силовой многоугольник был замкнут. При этом уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{ix} = 0, \sum F_{iy} = 0, \sum F_{iz} = 0. \quad (6.8)$$

Решение задач на равновесие твердого тела под действием пространственной системы сходящихся сил рекомендуется проводить в следующем порядке:

1) выделить твердое тело (часть конструкции), равновесие которого требуется рассмотреть для определения неизвестных величин;

2) изобразить задаваемые силы;

3) применить принцип освобожденности от связей, т. е. мысленно отбросить связи и, заменив их соответствующими силами реакций связей, рассматривать равновесие данного несвободного твердого тела как тела свободного, к которому приложены задаваемые силы и силы реакций связей;

4) выбрать систему осей декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;

5) составить уравнения равновесия твердого тела в проекциях на оси декартовых координат:  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$ ,  $\sum F_{iz} = 0$ ;

6) решить полученную систему уравнений, т. е. определить неизвестные величины.

Если требуется найти равнодействующую пространственной сходящейся системы сил, то после выполнения первых четырех пунктов следует определить проекции  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  равнодействующей  $R_{\Sigma}$  по формуле (6.5), затем вычислить модуль равнодействующей  $R_{\Sigma}$  и направляющие косинусы по формулам (6.6) и (6.7).

**Пример 6.1.** Определить равнодействующую пространственной системы сходящихся сил, изображенной на рисунке 6.3. Силы  $F_2$  и  $F_3$  расположены в плоскости  $xOy$ , сила  $F_1$  лежит в плоскости  $yOz$ , а сила  $F_4$  – в плоскости  $xOz$ ;  $F_1 = 2$  Н,  $F_2 = F_3 = 4$  Н,  $F_4 = 6$  Н.

**Решение.**

Можно определить равнодействующую  $R_{\Sigma}$  как замыкающую сторону силового многоугольника, построенного на силах  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ , т. е.  $R_{\Sigma} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ . Однако этот многоугольник представляет пространственную ломаную линию, поэтому довольно трудно определить модуль и направление вектора  $R_{\Sigma}$ .

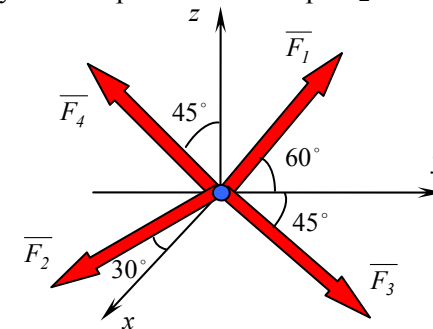


Рис. 6.3. Схема пространственной системы сходящихся сил

Эту задачу можно решить значительно проще, воспользовавшись методом проекций. Как известно, проекции равнодействующей  $R_{\Sigma}$  определяются по формулам

$$R_x = \Sigma F_{ix}, R_y = \Sigma F_{iy}, R_z = \Sigma F_{iz}. \quad (6.9)$$

В данном случае эти формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}; \\ R_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + F_{4z}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Вычислим проекции сил  $F_1, F_2, F_3$  и  $F_4$  на оси  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} F_{1x} = 0, F_{1y} = F_1 \cos 60^\circ, F_{1z} = F_1 \cos 30^\circ; \\ F_{2x} = F_2 \cos 30^\circ, F_{2y} = -F_2 \cos 60^\circ, F_{2z} = 0; \\ F_{3x} = F_3 \cos 45^\circ, F_{3y} = F_3 \cos 45^\circ, F_{3z} = 0; \\ F_{4x} = F_4 \cos 45^\circ, F_{4y} = 0, F_{4z} = F_4 \cos 45^\circ. \end{cases} \quad (6.11)$$

Подставив эти значения в формулы (6.10), получим

$$\begin{cases} R_x = F_2 \cos 30^\circ + F_3 \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ; \\ R_y = F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ + F_3 \cos 45^\circ; \\ R_z = F_1 \cos 30^\circ + F_4 \cos 45^\circ, \end{cases} \quad (6.12)$$

откуда, используя заданные в условии числовые значения, находим

$$R_x = 10,5 \text{ Н}, R_y = 1,82 \text{ Н}, R_z = 5,96 \text{ Н}.$$

Теперь легко найти модуль равнодействующей  $R_{\Sigma}$ :

$$R_{\Sigma} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{10,5^2 + 1,82^2 + 5,96^2} = 12,2 \text{ Н};$$

направляющие косинусы этой равнодействующей:

$$\cos(R_{\Sigma} \wedge x) = \frac{R_x}{R_{\Sigma}} = \frac{10,5}{12,2} = 0,86; \quad \cos(R_{\Sigma} \wedge y) = \frac{R_y}{R_{\Sigma}} = \frac{1,82}{12,2} = 0,15;$$

$$\cos(R_{\Sigma} \wedge z) = \frac{R_z}{R_{\Sigma}} = \frac{5,96}{12,2} = 0,49,$$

откуда  $(R_{\Sigma} \wedge x) = 31^\circ, (R_{\Sigma} \wedge y) = 82^\circ, (R_{\Sigma} \wedge z) = 61^\circ$ .

Зная модуль и направление равнодействующей  $R_{\Sigma}$ , можно изобразить ее в системе координатных осей  $x, y, z$ .

### 6.3. Момент пары сил в пространстве

Как установлено выше, действие пары (или системы пар) на твердое тело полностью определяется их алгебраическими моментами. Но сказанное справедливо только в том случае, когда пары расположены в одной плоскости. Если же к телу приложена система пар, действующих в различных плоскостях, то каждая из них будет стремиться поворачивать тело в ту или иную сторону в своей плоскости действия. Поэтому введенного раньше понятия о моменте пары как алгебраической величине уже недостаточно. Его надо дополнить, одновременно определив и положение плоскости действия пары. Это можно выполнить, если рассматривать моменты пар как векторные величины.

Условимся направлять вектор, изображающий момент пары, перпендикулярно плоскости действия пары в такую сторону, чтобы с его конца было видно, что пара стремится поворачивать эту плоскость против хода часовой стрелки (рис. 6.4). Длину вектора будем принимать пропорциональной величине (модулю) алгебраического момента пары в этой плоскости.

Модуль вектора момента пары равен произведению одной из сил пары на плечо:

$$M = F \cdot h = F' \cdot h. \quad (6.13)$$

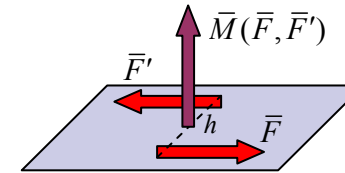


Рис. 6.4. Направление действия момента пары сил в пространстве

Так как пару сил можно перемещать в плоскости ее действия, то и вектор, изображающий момент пары, можно проводить из любой точки в этой плоскости. Более того, в полных курсах механики доказывается, что пару сил можно переносить в другую плоскость

тела, параллельную первой. Поэтому вектор момента пары сил можно показывать из любой точки тела. Такие векторы называются *свободными*.

Если на тело действует система пар, как угодно расположенных в пространстве, то все они могут быть показаны в виде векторов, изображающих их моменты. Причем все они могут быть приложены в одной (любой!) точке тела. При необходимости их можно сложить по правилам сложения векторов (например, по правилам, аналогичным правилу параллелограмма сил или силового многоугольника). Получившийся при этом результирующий вектор будет соответствовать моменту какой-то пары, эквивалентной всей системе пар.

Таким образом, система пар сил приводится к одной паре (теорема о сложении пар), момент которой равен векторной сумме моментов исходных сил относительно центра приведения.

Тогда:

- пару сил можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится;
- пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты геометрически (векторно) равны. Кинематическое состояние тела не изменится;
- систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической (векторной) сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.

Условие равновесия системы пар сил:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0. \quad (6.14)$$

#### 6.4. Момент силы относительно центра как вектор

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ , характеризующий ее вращательный эффект, определяется (как и момент пары сил) тремя элементами: 1) численным значением (модулем); 2) плоскостью действия, в которой находятся центр моментов и сила; 3) направлением поворота в этой плоскости. В случае плоской системы сил было достаточно указывать только численное значение и направление момента силы относительно точки, то есть рассматривать его как алгебраическую величину.

В случае пространственной системы сил плоскости поворота для каждой силы различны и их следует указывать отдельно. Проще всего это можно сделать, если (по аналогии с моментом пары) условиться изображать момент силы относительно точки как вектор. В механике принято направлять вектор момента силы относительно точки по перпендикуляру к плоскости, в которой находятся сила и центр моментов  $O$ , в такую сторону, чтобы с конца его было видно, что сила стремится поворачивать тело против хода часовой стрелки (рис. 6.5). Длину вектора принимают пропорциональной величине момента

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{r}. \quad (6.11)$$

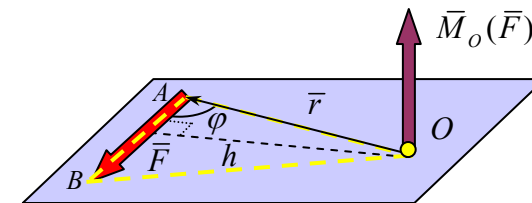


Рис. 6.5. Направление вектора момента силы относительно точки  $O$

Построенный таким образом вектор будет одновременно характеризовать и величину момента силы относительно точки, и плоскость, в которой сила стремится поворачивать тело, и направление поворота в этой плоскости. Сама же точка приложения этого вектора будет являться центром моментов.

Тогда модуль вектора момента силы относительно центра  $O$  будет равен

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot r \cdot \sin(\vec{F} \wedge \vec{r}) = F \cdot h. \quad (6.12)$$

#### 6.5. Момент силы относительно оси

До сих пор мы говорили о вращательном эффекте силы, приложенной к телу, относительно точки этого тела. В реальных условиях, особенно в технике, приходится иметь дело с телами, которые могут вращаться вокруг оси (например, валы, оси, зубчатые колеса и дру-

гие детали различных машин и устройств). Поэтому очень важно установить, какое действие оказывает сила, приложенная к таким телам.

Из опыта мы знаем, что в одних случаях тело легко поворачивается вокруг оси под действием приложенной силы, в других случаях сила может быть и большой, но ее вращательное действие на тело мало. Например, очевидно, что силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , показанные на рисунке 6.6, не могут поворачивать тело вокруг оси, в отличие от силы  $\vec{F}_3$ . Вращательный эффект, создаваемый силой в подобных случаях, характеризуется ее моментом относительно оси вращения тела. Рассмотрим более подробно и в общем виде это понятие: *момент силы относительно оси*.

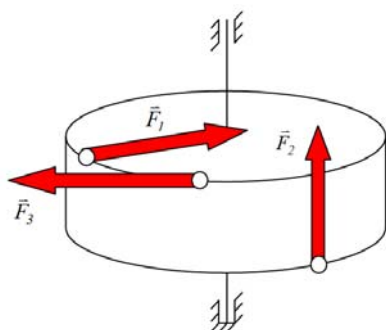


Рис. 6.6. Действие приложенных сил на тело

Пусть некоторая сила  $\vec{F}$  и ось  $z$  занимают произвольное положение по отношению друг к другу, то есть не параллельны между собой и не пересекаются (рис. 6.7).

Через точку  $O$ , произвольно принятую на оси, проведем плоскость, перпендикулярную ей. Из начала и конца вектора  $\overline{AB}$ , изображающего силу  $\vec{F}$ , опустим перпендикуляры на эту плоскость. Их основания являются проекциями точек  $A$  и  $B$  на плоскость.

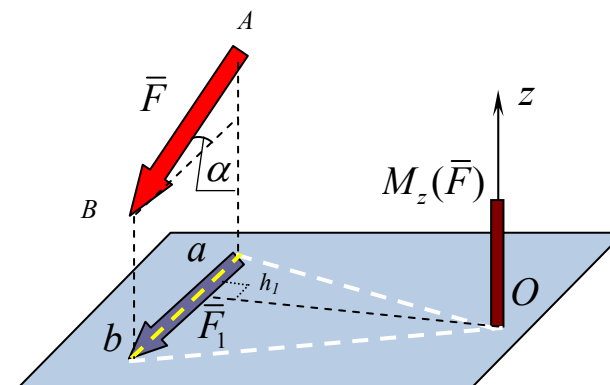


Рис. 6.7. Схема к определению момента силы относительно оси

Из проекции начала силы  $\vec{F}$  на плоскость (точка  $a$ ) к проекции конца силы (точка  $b$ ) проведем вектор  $a\vec{b} = \vec{F}_1$ . Он является проекцией вектора силы  $\vec{F}$  на плоскость. Момент силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $O$

$$M_o(\vec{F}_1) = +F_1 h_1 \quad (6.17)$$

принимается за момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  и обозначается символом  $M_z(\vec{F})$ .

Итак, *моментом силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$  называется момент проекции  $\vec{F}$  этой силы на плоскость, перпендикулярную оси моментов, относительно точки  $O$  их пересечения:*

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_1) = \pm F_1 h_1. \quad (6.18)$$

Из этого определения следует, что момент силы относительно оси – алгебраическая величина. Примем следующее правило знаков: *если с конца оси моментов видно, что сила стремится поворачивать тело вокруг этой оси против хода часовой стрелки, то ее момент относительно этой оси будем считать положительным, а если по ходу часовой стрелки – отрицательным.*

В следующих двух случаях момент силы относительно оси обращается в нуль:



- если сила параллельна оси моментов (в этом случае проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси моментов, т. е. сила  $\vec{F}_1$  равна нулю);

- если линия действия силы пересекает эту ось, т. е. плечо силы  $\vec{F}_1$  относительно точки  $O$  равно нулю.

Эти случаи можно объединить: момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось моментов лежат в одной плоскости (или такую плоскость можно провести).

Для вычисления момента силы относительно оси рекомендуется предварительно разложить силу на три взаимно перпендикулярные составляющие, параллельные осям координат, и затем воспользоваться теоремой Вариньона, которая справедлива и в данном случае. Этот вывод основывается на том, что, в конечном счете, из определения самого понятия, момент силы относительно оси сводится к моменту силы относительно точки.

Пусть модуль вектора момента силы относительно центра, лежащего на оси  $z$ , равен удвоенной площади треугольника  $OAB$  (рис. 6.8):

$$M_o(\vec{F}) = F \cdot h = 2S_{OAB}. \quad (6.19)$$

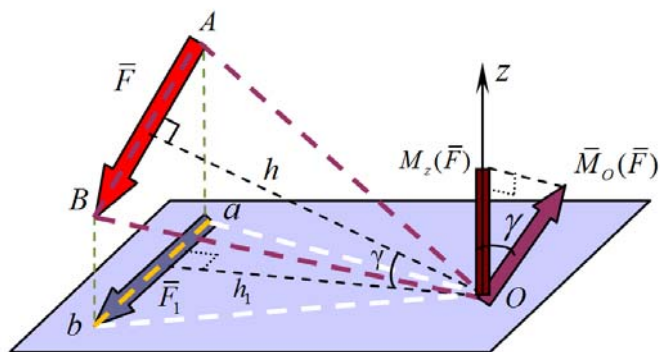


Рис. 6.8. Схема к определению момента силы относительно центра и относительно оси

Момент силы относительно оси  $z$  равен удвоенной площади треугольника  $Oab$ :

$$M_z(\vec{F}) = F_1 \cdot h_1 = 2S_{Oab}. \quad (6.20)$$

Треугольник  $Oab$  получен проекцией треугольника  $OAB$  на плоскость, перпендикулярную оси  $z$ , и его площадь связана с площадью треугольника  $OAB$  соотношением:

$$S_{Oab} = S_{OAB} \cdot \cos \gamma, \quad (6.21)$$

где  $\gamma$  – двугранный угол между плоскостями треугольников.

Поскольку вектор момента силы относительно точки перпендикулярен плоскости треугольника  $OAB$ , то угол между вектором силы и осью равен углу  $\gamma$ .

Таким образом, момент силы относительно оси есть проекция вектора момента силы относительно центра на эту ось:

$$M_z(\vec{F}) = M_o(\vec{F}) \cos \gamma.$$

### 6.6. Приведение произвольной пространственной системы сил к центру

Ранее мы установили (параграф 4.1), что при параллельном переносе силы, действующей на тело, в другую точку ее действия необходимо добавить к этой силе присоединенную пару сил. Ее момент рассматривали как алгебраическую величину в плоскости действия этой пары. Эти результаты с некоторыми уточнениями можно использовать и в случае пространственной системы сил.

Так как через линию действия любой силы и точку в пространстве всегда можно провести плоскость, то параллельный перенос силы тоже всегда осуществляется в плоскости, но присоединенные пары будут расположены в различных плоскостях. Поэтому моменты присоединенных пар следует рассматривать как векторы (рис. 6.9), а именно:

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_o(\vec{F}_1, \vec{F}_1''), \vec{M}_2 = \vec{M}_o(\vec{F}_2, \vec{F}_2''), \dots, \vec{M}_n = \vec{M}_o(\vec{F}_n, \vec{F}_n''). \quad (6.22)$$

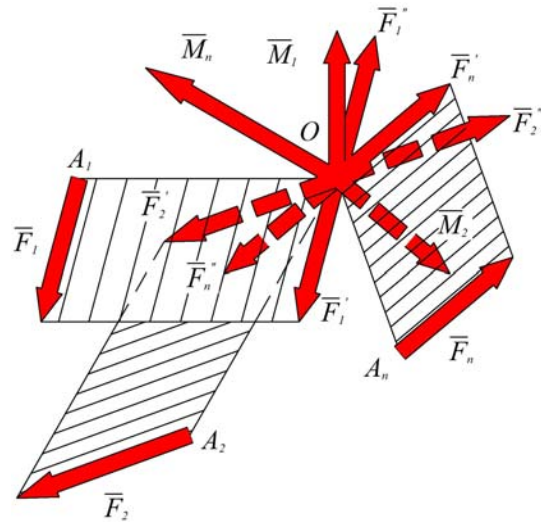


Рис. 6.9. Схема приведения произвольной пространственной системы сил к центру

Переносим каждую силу в точку  $O$  (центр приведения), будем заменять ее геометрически равной силой  $\vec{F}'_i$ , приложенной в точке  $O$  (на рисунке 6.9 они показаны штрихом) и векторному моменту  $\vec{M}_i$ :

$$\vec{F}'_i \sim (\vec{F}_i, \vec{M}_i). \quad (6.23)$$

Складывая силы, сходящиеся в точке  $O$ , получим главный вектор системы сил:

$$\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_{\text{гл}},$$

или

$$\vec{F}_{\text{гл}} = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \sum \vec{F}'_i. \quad (6.24)$$

То есть, *главный вектор произвольной пространственной системы сил равен геометрической сумме сил системы.*

Сложив (по правилам геометрического сложения) векторные моменты присоединенных пар, получим главный момент системы относительно центра приведения:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \vec{M}_{\text{гл}}.$$

Или, с учетом (6.22):

$$\vec{M}_{\text{гл}} = \vec{M}_o(\vec{F}_1, \vec{F}_1'') + \vec{M}_o(\vec{F}_2, \vec{F}_2'') + \dots + \vec{M}_o(\vec{F}_n, \vec{F}_n'') = \sum \vec{M}_o(\vec{F}_i). \quad (6.25)$$

То есть, *главный момент произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения равен геометрической сумме векторных моментов сил системы относительно этого центра.*

Таким образом, *любая произвольная пространственная система сил может быть эквивалентно заменена системой, состоящей из одной силы и одной пары сил:*

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_{\text{гл}}, \vec{M}_{\text{гл}}). \quad (6.26)$$

Отличие данного результата от аналогично полученного в параграфе 4.1 для плоской системы сил состоит в том, что главный момент пространственной системы сил является *не алгебраической, а векторной* величиной.

При перемене центра приведения системы сил главный момент системы меняется, причём зависимость главного момента пространственной системы сил от выбора центра приведения выражается так: главный момент  $M_{\text{гл}}^A$  пространственной системы сил относительно нового центра  $A$  равен векторной сумме главного момента  $M_{\text{гл}}$  этой системы сил относительно старого центра  $O$  и момента относительно нового центра  $A$  силы  $F$ , приложенной в старом центре  $O$ :

$$M_{\text{гл}}^A = M_{\text{гл}} + M_A(F_o). \quad (6.27)$$

## 6.7. Вычисление главного вектора и главного момента

Вычисление моментов сил и главных моментов систем сил относительно осей является важной составной частью решения задач на равновесие твердых тел под действием произвольных пространственных систем сил, а также задач на приведение этих систем сил к простейшему виду.

Величина и направление главного вектора системы определяются через его проекции на оси координат.

Проекции  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$  главного вектора  $F_{\text{гл}}$  на оси декартовых координат равны суммам проекций сил на соответствующие оси:

$$F_{zlx} = \sum F_{ix}, \quad F_{zly} = \sum F_{iy}, \quad F_{zlz} = \sum F_{iz}. \quad (6.28)$$

Модуль главного вектора  $F_{zл}$  и направляющие косинусы определяются по формулам:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(F_{\text{гл}x})^2 + (F_{\text{гл}y})^2 + (F_{\text{гл}z})^2}, \quad (6.29)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_{\text{гл}x}}{F_{\text{гл}}}, \quad \cos \beta = \frac{F_{\text{гл}y}}{F_{\text{гл}}}, \quad \cos \gamma = \frac{F_{\text{гл}z}}{F_{\text{гл}}}, \quad (6.30)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – углы, которые образует главный вектор  $\vec{F}_{zл}$  с осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Для вычисления главного момента произвольной пространственной системы сил относительно центра приведения  $O$  сначала вычисляются так называемые главные моменты системы сил относительно координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ :

$$\begin{aligned} M_{zlx} &= M_x(\vec{F}_1) + M_x(\vec{F}_2) + \dots + M_x(\vec{F}_n) = \sum M_x(\vec{F}_i); \\ M_{zly} &= M_y(\vec{F}_1) + M_y(\vec{F}_2) + \dots + M_y(\vec{F}_n) = \sum M_y(\vec{F}_i); \\ M_{zlz} &= M_z(\vec{F}_1) + M_z(\vec{F}_2) + \dots + M_z(\vec{F}_n) = \sum M_z(\vec{F}_i). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Затем находятся величина и направление  $\vec{M}_{\text{гл}}$  по формулам:

$$M_{zл} = \sqrt{(M_x)^2 + (M_y)^2 + (M_z)^2}; \quad (6.32)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{M_x}{M_{zл}}; \quad \cos \beta_1 = \frac{M_y}{M_{zл}}; \quad \cos \gamma_1 = \frac{M_z}{M_{zл}}. \quad (6.33)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  – углы, которые образует главный момент  $\vec{M}_{\text{гл}}$  с осями координат.

Вычисление главных моментов систем сил относительно осей рекомендуется проводить в следующем порядке:

- 1) провести плоскость, перпендикулярную к оси, относительно которой требуется определить главный момент системы сил;
- 2) найти точку пересечения оси с этой плоскостью;

- 3) спроецировать силу на плоскость, перпендикулярную к оси;
- 4) опустить перпендикуляр (плечо) из точки пересечения оси с плоскостью на линию действия проекции силы на плоскость, определенную в предыдущем пункте;
- 5) записать модуль момента силы относительно оси в виде произведения модуля проекции силы на найденное плечо;
- 6) определить знак момента силы относительно оси;
- 7) повторить построения и выкладки, сделанные в третьем, четвертом, пятом и шестом пунктах для каждой из сил системы;
- 8) вычислить главные моменты системы сил относительно осей в виде сумм моментов слагаемых сил относительно этих осей.

Если определение проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси, затруднительно, то следует разложить силу на составляющие. Затем вместо момента силы относительно оси надо, применив теорему Вариньона, вычислить сумму моментов сил составляющих относительно этой оси.

**Пример 6.2.** Вычислить моменты относительно осей координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  силы  $\vec{F}$ , направленной по диагонали боковой грани прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке, если длина ребра, параллельного оси  $x$ , равна  $a$  (рис. 6.10).

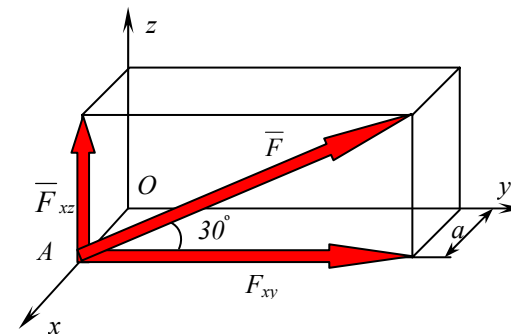


Рис. 6.10. К решению примера 6.2

**Решение.**

Линия действия силы  $\vec{F}$  пересекает ось  $x$ , поэтому момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $x$  равен нулю:

$$M_x(\vec{F}) = 0.$$

Для определения момента силы  $\vec{F}$  относительно оси  $y$  спроецируем эту силу на плоскость  $xOz$ , перпендикулярную к оси  $y$ , т. е. определим  $\vec{F}_{xz}$ . Нетрудно видеть, что  $F_{xz} = F \cdot \cos 60^\circ$ . Остается взять момент силы  $F_{xz}$  относительно точки пересечения оси  $y$  с перпендикулярной плоскостью  $xOz$ , т. е. точки  $O$ .

Плечом является ребро  $OA = a$ . С конца оси  $y$  сила  $F_{xz}$  видна направленной в плоскости  $xOz$  вокруг точки  $O$  по часовой стрелке, следовательно, момент силы отрицателен. Тогда:

$$M_y(\vec{F}) = -F_{xz} \cdot a = -Fa \cdot \cos 60^\circ = -F \cdot a/2.$$

Остается определить момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $z$ . Для этого найдем величину проекции  $\vec{F}_{xy}$  силы  $\vec{F}$  на плоскость  $xy$  перпендикулярную к оси  $z$ . Легко видеть, что  $F_{xy} = F \cdot \cos 30^\circ$ . Теперь вычислим момент силы  $F_{xy}$  относительно точки  $O$  пересечения оси  $z$  с перпендикулярной плоскостью  $xOy$ . Плечом оказывается отрезок  $OA = a$ . Знак момента положителен, так как с конца оси  $z$  сила  $F_{xy}$  видна направленной в плоскости  $xOy$  вокруг точки  $O$  против часовой стрелки. Значит,

$$M_z(\vec{F}) = F_{xy} \cdot a = F \cdot \cos 30^\circ \cdot a = \frac{F \cdot a \sqrt{3}}{2}.$$

### 6.8. Аналитические уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольная пространственная система сил будет находиться в равновесии, если она эквивалентна нулю. Это возможно лишь тогда, когда главный вектор и главный момент системы относительно произвольно взятого центра  $O$  равны нулю, поскольку любая такая система сил эквивалентна этой более простой системе.

Условия

$$F_{\text{гл}} = 0, \quad M_{\text{гл}} = 0 \quad (6.34)$$

являются необходимыми и достаточными условиями равновесия рассматриваемых систем сил. Они равносильны следующим шести аналитическим уравнениям равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \\ \sum M_x(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_y(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Первые три уравнения равновесия в системе (6.35) получены из условия равенства нулю главного вектора с использованием выражений (6.29) и (6.28), три последних – из второго условия равновесия системы  $M_{zл} = 0$  с учетом (6.31) и (6.32).

Таким образом, для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на каждую из трех координатных осей, а также алгебраические суммы моментов всех сил системы относительно каждой из этих осей были равны нулю.

Поясним смысл этих условий, для чего применим три условия равновесия плоской системы произвольно расположенных сил:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum M_z(F_i) = 0. \quad (6.36)$$

Тело, лежащее на плоскости, имеет три степени свободы, а именно: возможность перемещения в направлениях двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в этой плоскости, и возможность вращения вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Если к телу приложена плоская система сил и выполнено условие  $\sum F_{ix} = 0$ , то тело не будет перемещаться в направлении оси  $x$ , так как равнодействующая системы не имеет составляющей, параллельной оси  $x$ . Если выполнено условие  $\sum F_{iy} = 0$ , то тело не будет перемещаться и в направлении оси  $y$ , так как равнодействующая системы не имеет составляющей, параллельной оси  $y$ . Наконец, если выполнено условие  $\sum M_z(F_i) = 0$ , т. е. сумма моментов относительно любой точки плоскости равна нулю, то тело не будет под действием этой системы сил вращаться, так как нет пары сил, которая может осуществить это вращение. Таким образом, трем степеням свободы тела на плоскости соответствуют три условия равновесия.

Свободное тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, а именно: возможность перемещаться в направлениях трех взаимно перпендикулярных осей координат и возможность вращаться вокруг этих осей. Таким образом, шести степеням свободы тела в пространстве соответствуют шесть условий равновесия.

Если система сил, приложенная к свободному телу, удовлетворяет всем шести условиям равновесия, то возможность трех перемещений и трех вращений под действием этой системы исключена, и тело будет находиться в равновесии.

Нетрудно показать, что все выведенные выше условия равновесия для различных систем сил являются частными случаями условий равновесия, рассмотренных ранее.

В случае, если на свободное тело действует пространственная система параллельных сил (например, параллельных оси  $z$ ), то условия равновесия этой системы запишутся так:

$$\sum F_{iz} = 0; \sum M_x(\bar{F}_i) = 0; \sum M_y(\bar{F}_i) = 0. \quad (6.37)$$

Остальные три условия равновесия будут представлять собой тождества, так как проекции всех сил такой системы на оси  $x$  и  $y$  равны нулю и моменты всех сил относительно оси  $z$  также равны нулю.

Так как условия равновесия пространственной системы сил справедливы для любых прямоугольных осей координат, то при решении данной задачи систему координат можно изменять, т. е. часть условий равновесия составить для одних осей координат, а часть – для измененных.

Кроме того, можно одно, два или все три уравнения проекций сил заменить уравнениями моментов сил относительно новых осей координат (пример 6.3). В некоторых случаях такие приемы упрощают решение задач.

При решении задач уравнения моментов сил относительно осей в общем виде будем записывать упрощенно, а именно:

$$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0. \quad (6.37)$$

**Пример 6.3.** На горизонтальном валу  $AB$  (рис. 6.11) насажены зубчатое колесо  $1$  диаметром  $D = 1,2$  м и шестерня  $2$  диаметром  $d = 20$  см. Остальные размеры указаны на рисунке. К колесу  $1$  по касательной приложена горизонтальная сила  $F = 100$  Н, а к шестерне

2 также по касательной приложена вертикальная сила  $\bar{Q}$ . Определить силу  $Q$  и реакции подшипников  $A$  и  $B$  в положении равновесия. Массой деталей пренебречь.

**Решение.**

Отбросим подшипники и рассмотрим равновесие вала с зубчатым колесом и шестерней. Реакции подшипников  $A$  и  $B$  перпендикулярны оси вала. Поэтому разложим каждую из этих реакций на две взаимно перпендикулярные составляющие, параллельные осям координат  $y$  и  $z$ . В результате получена приложенная к заданной системе тел пространственная система шести сил, пять из которых, т. е.  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{Az}$ ,  $\bar{R}_{By}$ ,  $\bar{R}_{Bz}$ ,  $\bar{Q}$  не известны по модулю.

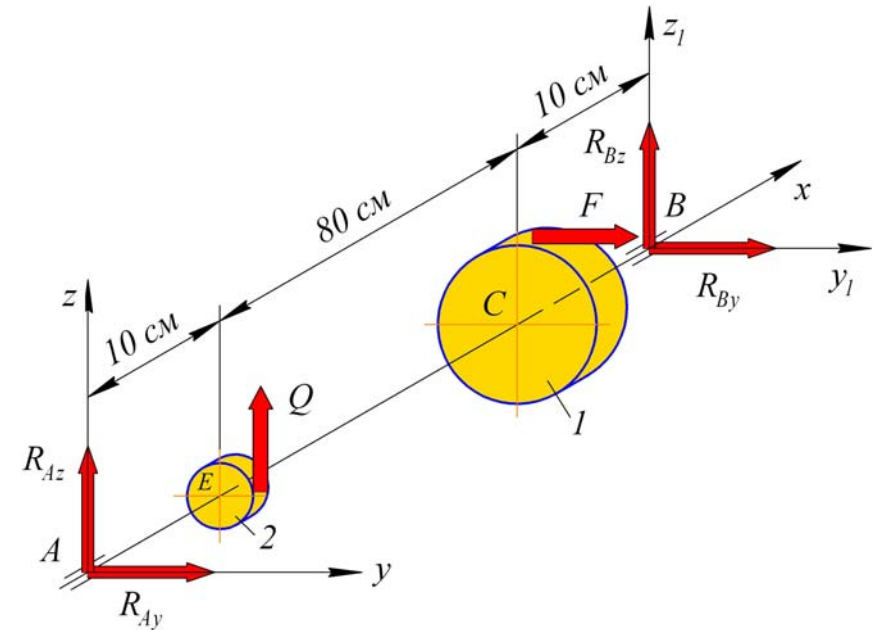


Рис. 6.11. К решению примера 6.3

Применим условия равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил и составим пять уравнений равновесия:

$$1) \sum M_x(F_i) = 0; Q \frac{d}{2} - F \frac{D}{2} = 0.$$

$$\text{Из этого уравнения } Q = F \frac{D}{d} = 100 \frac{1,2}{0,2} = 600 \text{ Н};$$

$$2) \sum M_z(F_i) = 0; R_{By} \cdot AB + F \cdot AC = 0.$$

$$\text{Из этого уравнения } R_{By} = -F \frac{AC}{AB} = 100 \frac{0,9}{1} = -90 \text{ Н};$$

$$3) \sum M_y(F_i) = 0; R_{Bz} \cdot AB + Q \cdot AE = 0.$$

$$\text{Из этого уравнения } R_{Bz} = -Q \frac{AE}{AB} = -600 \frac{0,1}{1} = -60 \text{ Н};$$

$$4) \sum F_{iy} = 0; R_{Ay} + F + R_{By} = 0.$$

$$\text{Из этого уравнения } R_{Ay} = -F - R_{By} = -100 - (-90) = -10 \text{ Н};$$

$$5) \sum F_{iz} = 0; R_{Az} + Q + R_{Bz} = 0.$$

$$\text{Из этого уравнения } R_{Az} = -Q - R_{Bz} = -600 - (-60) = -540 \text{ Н}.$$

Знак « - » перед значениями реакций  $R_{Ay}$ ,  $R_{Az}$ ,  $R_{By}$  и  $R_{Bz}$  показывает, что эти реакции направлены противоположно указанным на рисунке 6.11.

Шестое условие равновесия  $\sum F_{ix} = 0$  обращается в тождество, так как проекции на ось  $x$  всех сил рассматриваемой системы равны нулю.

Для проверки решения составим дополнительное, контрольное уравнение моментов относительно оси  $u_1$ , проходящей через точку  $B$ :

$$\sum M_{u_1}(F_i) = 0; -R_{Az} \cdot AB - Q \cdot BE = 0.$$

$$\text{Подставив значения, получим } 540 \cdot 1,0 - 600 \cdot 0,9 = 0.$$

Контрольное уравнение обращается в тождество, что свидетельствует о правильности полученных ответов.

На этом примере покажем возможность изменения при решении системы координатных осей и замены уравнения проекции уравнением моментов.

Определим реакцию  $R_{Ay}$ , составив вместо уравнения проекций сил на ось  $y$  уравнение моментов сил относительно новой оси  $z_1$ , проходящей через точку  $B$ .

$$\sum M_{z_1}(F_i) = 0; R_{Ay} \cdot AB + F \cdot CB = 0.$$

$$\text{Из этого уравнения } R_{Ay} = \frac{-F \cdot CB}{AB} = \frac{-100 \cdot 0,1}{1,0} = -10 \text{ Н}.$$

Как видим, ответ получен тот же.

### Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение произвольной пространственной системы сил.
2. Проекция пространственной силы  $F = 10$  кН на ось  $y$  равна 8,66 кН. Сила  $\vec{F}$  расположена к плоскости  $xOy$  под углом  $15^\circ$ . Чему равны проекции силы  $\vec{F}$  на оси  $x$  и  $z$ .
3. Определить величину и направление вектора силы  $\vec{F}$ , если ее проекции на оси координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно равны 15 кН, 18 кН и 24 кН.
4. Как аналитически определить равнодействующую пространственной системы сходящихся сил?
5. Выразите в математической форме условия равновесия пространственной системы сходящихся сил?
6. Мачта  $AB$  удерживается в вертикальном положении посредством четырех симметрично расположенных оттяжек, как показано на рисунке 6.12. Определите давление мачты на землю, если натяжение каждой из оттяжек равно 100 Н, а вес мачты 200 Н.
7. Три однородных шара  $A$ ,  $B$  и  $C$  одинаковых радиусов положены на горизонтальную плоскость, взаимно прикасаются и обвязаны шнуром, огибающим их в экваториальной плоскости. Четвертый шар  $D$  такого же радиуса и так же однородный весом 10 Н лежит на трех нижних (рис. 6.13). Определить натяжение шнура  $T$ , вызываемое давлением верхнего шара. Трением шаров между собою и горизонтальной плоскостью пренебречь.

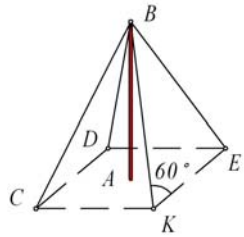


Рис. 6.12. К заданию 6

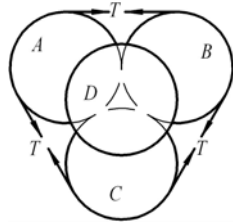


Рис. 6.13. К заданию 7

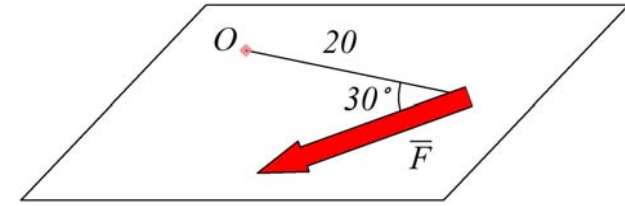


Рис. 6.16. К заданию 13

8. Как определить момент пары сил в пространстве?

9. Выразите в математической форме условия равновесия пар сил в пространстве.

10. К вершинам куба приложены по направлениям ребер силы (рис. 6.14). Каким условиям должны удовлетворять силы  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ ,  $\vec{F}_4$ ,  $\vec{F}_5$  и  $\vec{F}_6$ , чтобы они находились в равновесии?

11. По трем непересекающимся и непараллельным ребрам прямоугольного параллелепипеда действуют три равные силы  $\vec{F}$  (рис. 6.15). Какое соотношение должно быть между ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , чтобы эта система приводилась к одной равнодействующей?

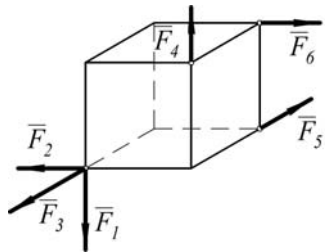


Рис. 6.14. К заданию 10

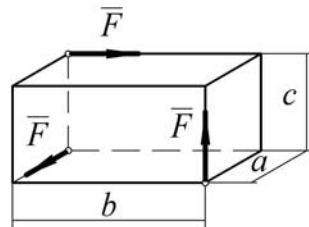


Рис. 6.15. К заданию 11

12. Выразите момент силы относительно точки как векторное произведение.

13. Определите величину и направление момента силы  $F = 5$  кН относительно точки  $O$  (рис. 6.16).

14. Как вычислить момент силы относительно оси?

15. Почему при определении момента силы относительно оси нужно обязательно проецировать силу на плоскость, перпендикулярную оси?

16. Как нужно расположить ось, чтобы момент данной силы относительно этой оси равнялся нулю?

17. Какая зависимость существует между моментами силы относительно точки и оси, проходящей через эту точку?

18. Выразите моменты силы относительно координатных осей через проекции силы на эти оси.

19. Как привести силу к заданному центру?

20. К какому простейшему виду можно привести пространственную систему сил, если главный момент относительно различных точек равен нулю?

21. К какому простейшему виду можно привести пространственную систему сил, если главный момент относительно различных точек имеет различные значения и перпендикулярен главному вектору?

22. К вершинам куба, ребра которого имеют длину 5 см, приложены шесть равных сил по 2 кН каждая (рис. 6.17). Привести эту систему к простейшему виду.

23. К четырем вершинам  $A$ ,  $M$ ,  $B$  и  $D$  куба приложены четыре равные силы  $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4$ , причем сила  $\vec{F}_1$  направлена по  $AC$ ,  $\vec{F}_2$  – по  $MK$ ,  $\vec{F}_3$  – по  $BE$ ,  $\vec{F}_4$  – по  $DL$  (рис. 6.18). Привести эту систему к простейшему виду.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

### Задача 5.1. Момент силы относительно оси

**Постановка задачи.** В декартовой системе координат задан вектор силы. Найти моменты силы относительно осей координат.

**План решения.**

1. Определяем радиус-вектор  $\vec{r}_0$  точки приложения силы.
2. Находим момент силы относительно начала координат как векторное произведение  $\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \cdot \vec{F}$ . Моменты силы относительно осей  $x, y, z$  являются компонентами  $M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$  вектора  $\vec{M}_0$ . Модуль вектора момента силы  $\vec{F}$  относительно начала координат:  $M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2}$ .

**Пример П5.1.** В декартовой системе координат задан вектор силы  $\vec{F}$  (рис. П5.1);  $F = 20$  Н,  $a = 6$  м,  $b = 11$  м,  $c = 8$  м. Найти моменты силы относительно осей координат  $x, y, z$ .

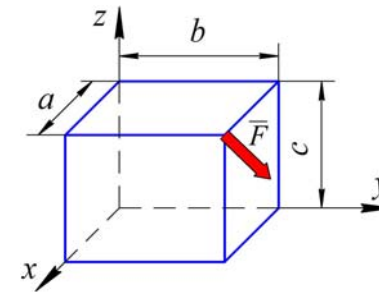


Рис. П5.1. Схема к решению примера П5.1

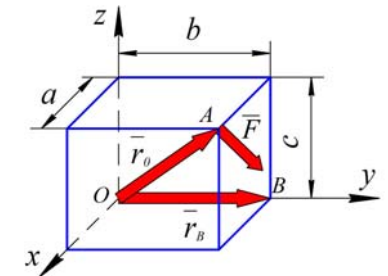


Рис. П5.2. Определение радиуса-вектора  $\vec{r}_0$

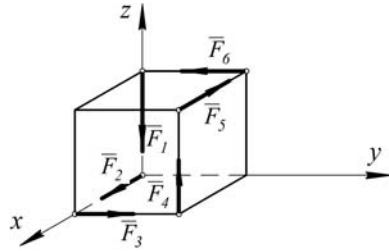


Рис. 6.17. К заданию 22

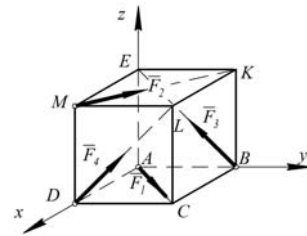


Рис. 6.18. К заданию 23

24. Выразите в математической форме главный момент системы сил относительно точки и относительно оси.

25. К чему могут быть приведены силы, произвольно расположенные в пространстве?

26. Как вычисляются главный вектор и главный момент пространственной системы сил?

27. Каковы условия равновесия произвольной пространственной системы сил?

28. Каковы условия равновесия пространственной системы параллельных сил?

29. Однородная прямоугольная пластинка  $ABCD$  (рис. 6.19), опираясь на три точечные опоры, две из которых расположены в вершинах прямоугольника  $A$  и  $B$ , а третья – в некой точке  $E$ , удерживается в горизонтальном положении. Вес пластинки равен  $G$ . Давления на опоры в точках  $A$  и  $B$  соответственно равны  $G/4$  и  $G/5$ .

Найти давление  $N_E$  на опору в точке  $E$  и координаты этой точки, если длины сторон пластинки равны  $a$  и  $b$ .

30. Находится ли система параллельных сил (рис. 6.20) в равновесии? Силы при этом равны  $F_1 = 2$  кН,  $F_2 = 4$  кН,  $F_3 = 8$  кН.

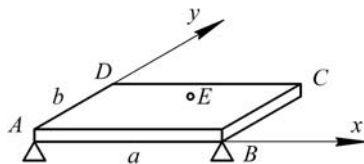


Рис. 6.19. К заданию 29

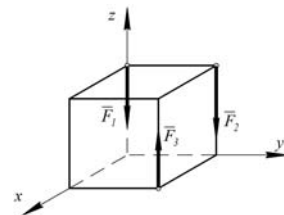


Рис. 6.20. К заданию 30



**Решение.**

1. Определяем радиус-вектор  $\vec{r}_0$  точки приложения силы относительно начала координат (рис. П5.2):  $\vec{r}_0 = \{a, b, c\}$ .

2. Находим момент силы относительно начала координат:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix},$$

где  $i, j, k$  – орты осей  $x, y, z$ . Так как в явном виде компоненты вектора  $\vec{F}$  не заданы, а известна длина вектора и линия  $AB$  его действия, представляем  $\vec{F}$  в виде  $\vec{F} = F \vec{AB} / |AB|$ . Вектор  $\vec{AB}$  вычисляем как разность  $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_0 = \{-a, 0, -c\}$ . Длина вектора  $|AB| = \sqrt{a^2 + c^2}$ . В результате получаем

$$\vec{F} = \frac{F}{\sqrt{a^2 + c^2}} \{-a, 0, -c\}.$$

Находим компоненты  $M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz}$  вектора  $\vec{M}_0$ :

$$M_{Ox} = b \cdot F_z - c \cdot F_y = -c \cdot b \cdot F / \sqrt{a^2 + c^2} = -176 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_{Oy} = c \cdot F_x - a \cdot F_z = (-c \cdot a \cdot F + a \cdot c \cdot F) / \sqrt{a^2 + c^2} = 0,$$

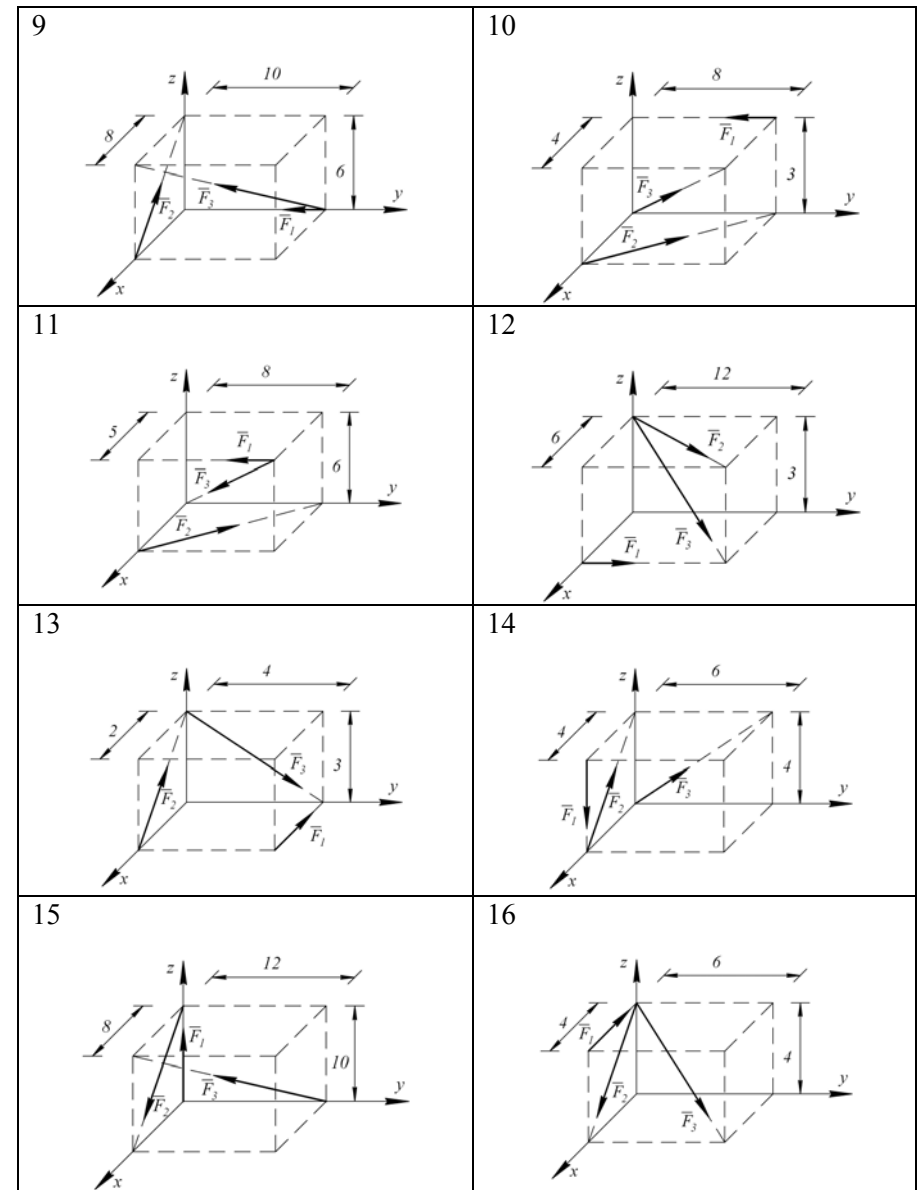
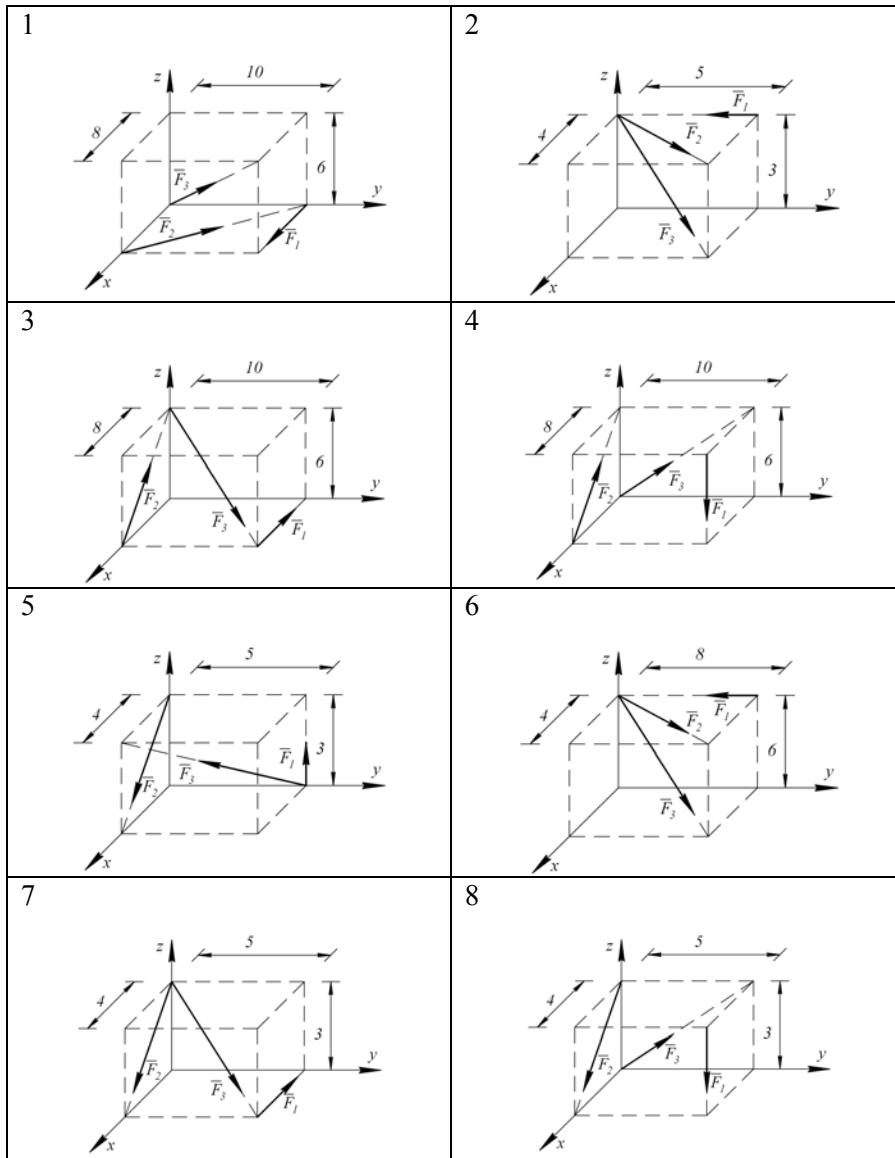
$$M_{Oz} = a \cdot F_y - b \cdot F_x = a \cdot b \cdot F / \sqrt{a^2 + c^2} = 132 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

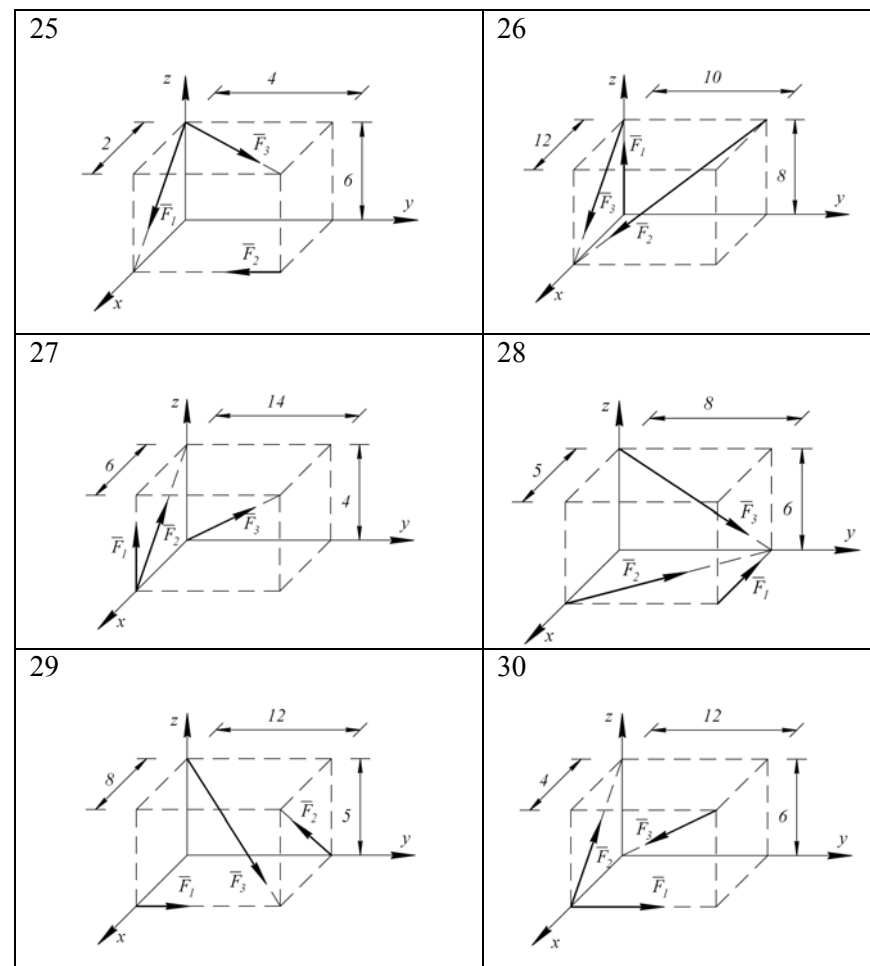
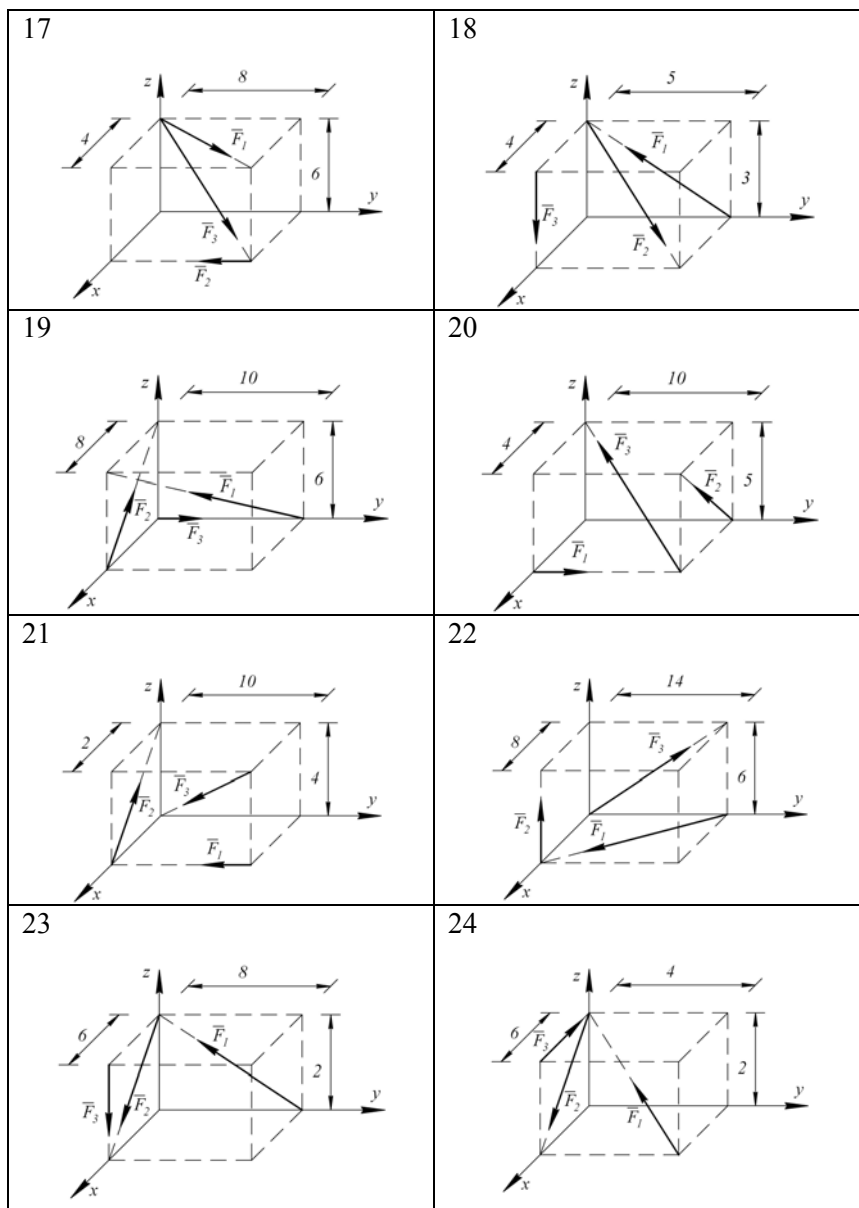
*Условие задачи 5.1.* В декартовой системе координат даны три силы, приложенные к вершинам параллелепипеда. Найти моменты этих сил относительно осей координат (в Н·м). Исходные данные приведены в таблице П5.1. Размеры на расчетных схемах (таблица П5.2) даны в метрах.

Исходные данные к задаче 5.1

| Номер варианта | Номер схемы | Сила $F_1$ , кН | Сила $F_2$ , кН | Сила $F_3$ , кН |
|----------------|-------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 01             | 1           | 1               | 2               | 4               |
| 02             | 2           | 2               | 2               | 5               |
| 03             | 3           | 3               | 4               | 6               |
| 04             | 4           | 4               | 5               | 6               |
| 05             | 5           | 1               | 1               | 2               |
| 06             | 6           | 2               | 3               | 5               |
| 07             | 7           | 3               | 3               | 5               |
| 08             | 8           | 4               | 4               | 5               |
| 09             | 9           | 1               | 2               | 5               |
| 10             | 10          | 2               | 3               | 6               |
| 11             | 11          | 1               | 2               | 3               |
| 12             | 12          | 3               | 2               | 1               |
| 13             | 13          | 4               | 2               | 3               |
| 14             | 14          | 4               | 4               | 4               |
| 15             | 15          | 2               | 2               | 2               |
| 16             | 16          | 3               | 3               | 3               |
| 17             | 17          | 3               | 4               | 5               |
| 18             | 18          | 5               | 5               | 5               |
| 19             | 19          | 4               | 4               | 6               |
| 20             | 20          | 5               | 5               | 2               |
| 21             | 21          | 8               | 4               | 6               |
| 22             | 22          | 2               | 5               | 5               |
| 23             | 23          | 3               | 2               | 3               |
| 24             | 24          | 8               | 5               | 4               |
| 25             | 25          | 2               | 6               | 8               |
| 26             | 26          | 4               | 6               | 8               |
| 27             | 27          | 6               | 4               | 4               |
| 28             | 28          | 6               | 3               | 2               |
| 29             | 29          | 8               | 6               | 6               |
| 30             | 30          | 6               | 8               | 6               |

Расчетные схемы к задаче 5.1





### Задача 5.2. Расчет горизонтального вала

**Постановка задачи.** Горизонтальный вал вращается в цилиндрических шарнирах. К одному шкиву вала приложено нормальное давление и касательная сила сопротивления, пропорциональная давлению. На шкивы вала действуют известные нагрузки. Найти силу давления и реакции шарниров при условии равновесия вала.

#### План решения.

1. Действие каждой из опор заменяем двумя взаимно перпендикулярными реакциями, лежащими в плоскости, перпендикулярной валу.

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала. Момент силы натяжения ремня, нити и т.п. (наклонной или нет) вычисляем как произведение величины силы на соответствующий радиус со знаком, соответствующим направлению вращения вокруг вала. Уравнение содержит одну неизвестную величину, которую легко найти.

3. Определяем вертикальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия горизонтальных реакций шарниров. Решаем эти уравнения.

4. Проверяем найденные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на вертикаль.

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров.

6. Проверяем горизонтальные реакции, составляя уравнение равновесия в проекции на ось вдоль линии действия горизонтальных реакций.

**Пример П5.2.** Горизонтальный вал весом  $G = 15$  Н вращается в цилиндрических шарнирах  $A$  и  $B$  (рис. П5.3). К шкиву  $1$  приложено нормальное давление  $N$  и касательная сила сопротивления  $F = 0,1N$ .

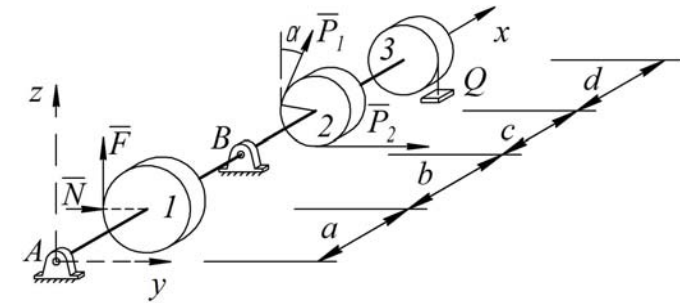


Рис. П5.3. К решению примера П5.2

На шкив  $2$  действуют силы натяжения ремней  $P_1 = 30$  Н,  $P_2 = 57$  Н. Груз  $Q = 18$  Н висит на нити, навитой на шкив  $3$ . Определить силу давления  $N$  и реакции шарниров в условии равновесия вала. Учесть вес шкивов:  $G_1 = 35$  Н,  $G_2 = 10$  Н,  $G_3 = 15$  Н. Все нагрузки действуют в вертикальных плоскостях. Известны радиусы шкивов ( $R_1 = 26$  см,  $R_2 = 10$  см,  $R_3 = 11$  см) и расстояния между характерными точками вала:  $a = 22$  см,  $b = 25$  см,  $c = 26$  см,  $d = 26$  см. Общая длина вала  $L = a + b + c + d$ ;  $\alpha = 30^\circ$ .

#### Решение.

1. Действие цилиндрических шарниров  $A$  и  $B$  заменим реакциями  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  и  $R_{Bz}$ ,  $R_{By}$  (рис. П5.4). Вес вала  $\bar{G}$  приложим в центре. Вес груза изобразим вектором  $\bar{Q}$ .

2. Для определения силы давления составляем уравнение моментов относительно оси вала:

$$\sum M_x = F \cdot R_1 + (P_1 - P_2)R_2 + Q \cdot R_3 = 0.$$

Уравнение содержит одну неизвестную  $F$ . Линии действия остальных сил пересекают ось  $x$  и их моменты относительно оси вала равны нулю.

Из полученного уравнения находим

$$F = -\frac{(P_1 - P_2)R_2 + Q \cdot R_3}{R_1} = -2,77 \text{ Н.}$$

По условию  $N = F/0,1 = -27,7$  Н.

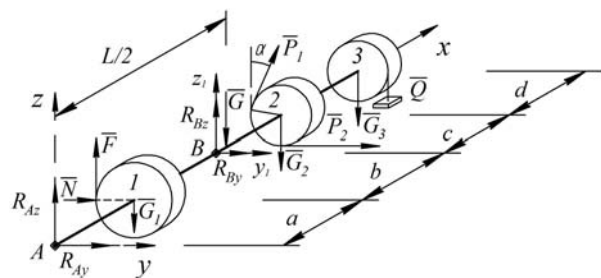


Рис. П5.4. Схема действия активных и реактивных сил на вал

3. Определяем вертикальные реакции шарнирных опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно горизонтальных осей, проходящих через шарниры  $A$  и  $B$ . Рассматриваем для удобства проекцию всех сил на плоскость  $zx$  (рис. П5.5). Таким образом вычисление моментов относительно осей сводим к плоской задаче вычисления моментов относительно точек  $A$  и  $B$ .

Знаки моментов сил определяем как в задачах плоской статики: момент силы, вращающей тело вокруг моментной точки против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке – отрицательным. Моменты сил, перпендикулярных плоскости  $zx$  (и поэтому не изображенных на рисунке П5.5), относительно любой ее точки равны нулю.

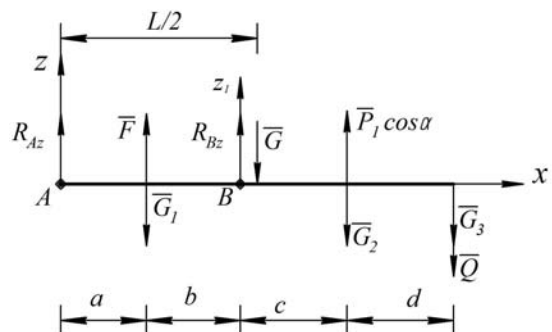


Рис. П5.5. Схема действия активных и реактивных сил на вал в вертикальной плоскости

Решая уравнения

$$\sum M_{Ay}(F_i) = (F - G_1)a + R_{Bz}(a + b) + (P_1 \cos \alpha - G_2)(a + b + c) - G \cdot L/2 - (G_3 + Q)(a + b + c + d) = 0,$$

$$\sum M_{By_1} = -R_{Az}(a + b) + (G_1 - F)b - G(L/2 - a - b) + (P_1 \cos \alpha - G_2)c - (G_3 + Q)(c + d) = 0,$$

находим  $R_{Az} = -11,32$  Н,  $R_{Bz} = 75,57$  Н.

4. Проверяем правильность нахождения вертикальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось  $z$  (рис. П5.5):

$$\sum F_{iz} = R_{Az} + F - G_1 + R_{Bz} - G + P_1 \cos \alpha - G_2 - G_3 - Q = -11,32 + 2,77 - 35 + 75,57 - 15 + 30 \cdot 0,866 - 10 - 15 - 18 = 0.$$

5. Определяем горизонтальные реакции опор вала. Для этого составляем два уравнения моментов относительно осей, совпадающих с линиями действия вертикальных реакций шарниров. Рассматриваем горизонтальную проекцию силовой схемы (рис. П5.6):

$$\sum M_{Az}(F_i) = -N \cdot a - R_{By}(a + b) - (P_1 \sin \alpha + P_2)(a + b + c) = 0,$$

$$\sum M_{Bz_1} = R_{Ay}(a + b) + N \cdot b - (P_1 \sin \alpha + P_2)c = 0.$$

Решая уравнения, находим  $R_{Ay} = 25,1$  Н,  $R_{By} = -124,79$  Н.

6. Проверяем правильность нахождения горизонтальных реакций, составляя уравнение равновесия в проекции на ось  $y$  вдоль линии действия горизонтальных реакций:

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} + N + R_{By} + P_1 \sin \alpha + P_2 = 25,1 + 27,69 - 124,79 + 15 + 57 = 0.$$

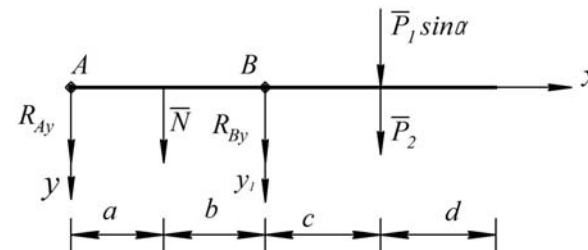


Рис. П5.6. Схема действия активных и реактивных сил в горизонтальной плоскости

Результаты расчетов заносим в таблицу П5.3.

Таблица П5.3

Результаты расчетов к задаче П5.2

|         |              |              |              |              |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| $N$ , Н | $R_{Ay}$ , Н | $R_{Az}$ , Н | $R_{Bx}$ , Н | $R_{Bz}$ , Н |
| 27,69   | 25,1         | -11,32       | -124,79      | 75,57        |

Условие задачи 5.2. Горизонтальный вал весом  $\bar{G}$  вращается в цилиндрических шарнирах  $A$  и  $B$ . К шкиву  $1$  приложено нормальное давление  $\bar{N}$  и касательная сила сопротивления  $\bar{F}$ , пропорциональная  $\bar{N}$ . На шкив  $2$  действуют силы натяжения ремней  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ . Груз  $\bar{Q}$  висит на нити, навитой на шкив  $3$ . Определить силу давления  $\bar{N}$  и реакции шарниров в условии равновесия вала (в Н). Учесть вес шкивов  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ . Все нагрузки действуют в вертикальной плоскости. Исходные данные к задаче 5.2 даны в таблице П5.4. Расчетные схемы к задаче 5.2 приведены в таблице П5.5.

Таблица П5.4

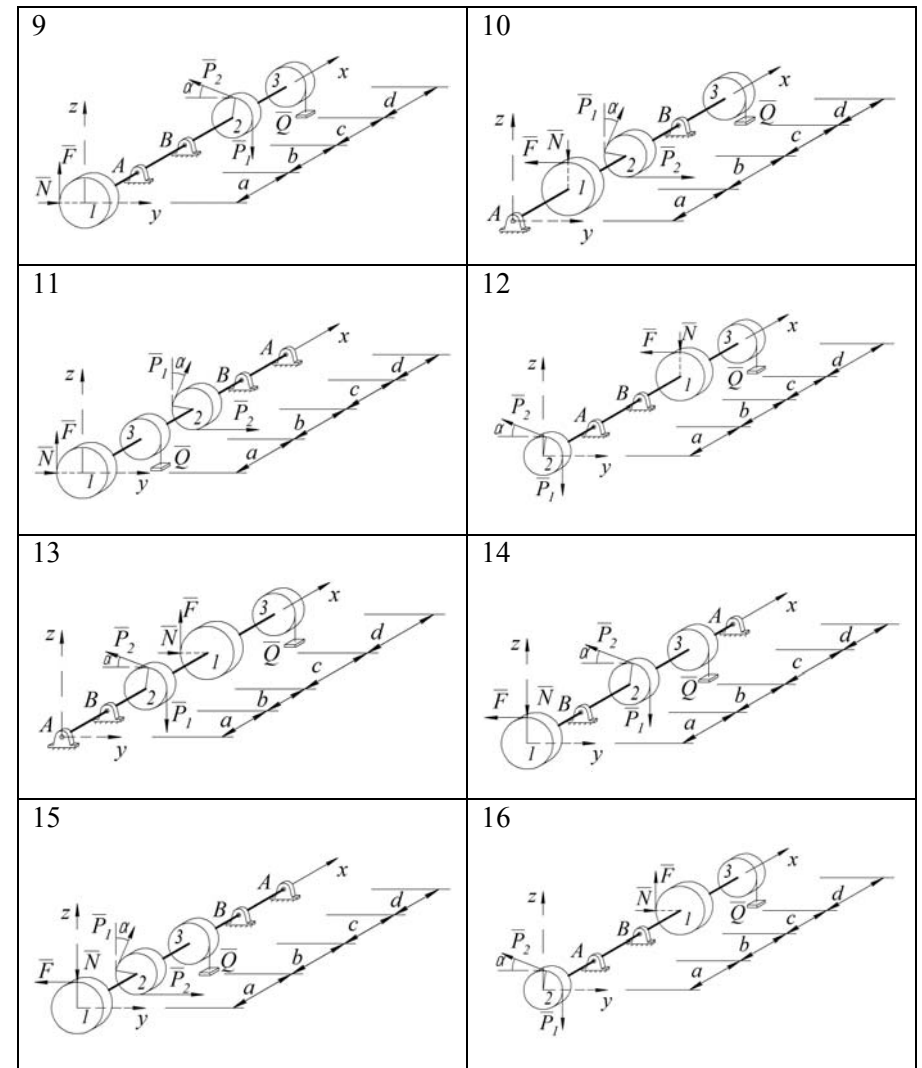
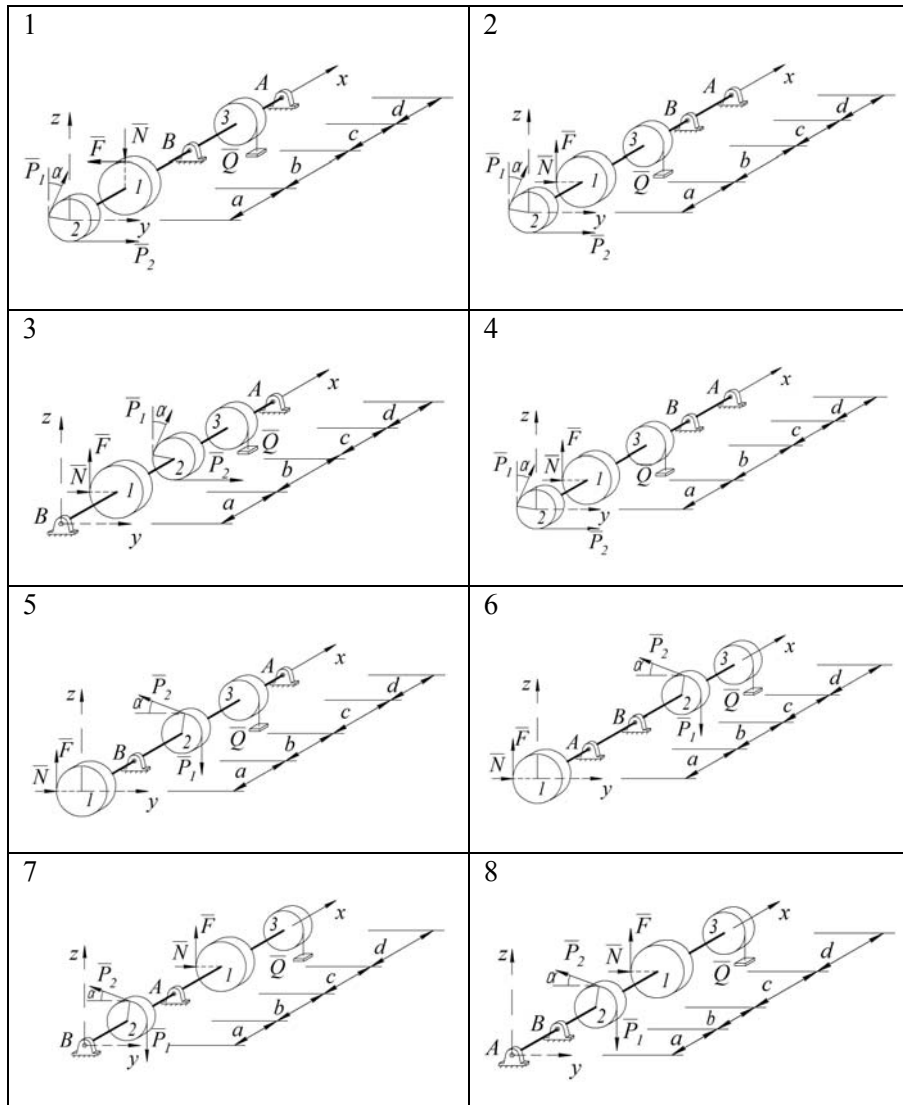
Исходные данные к задаче 5.2

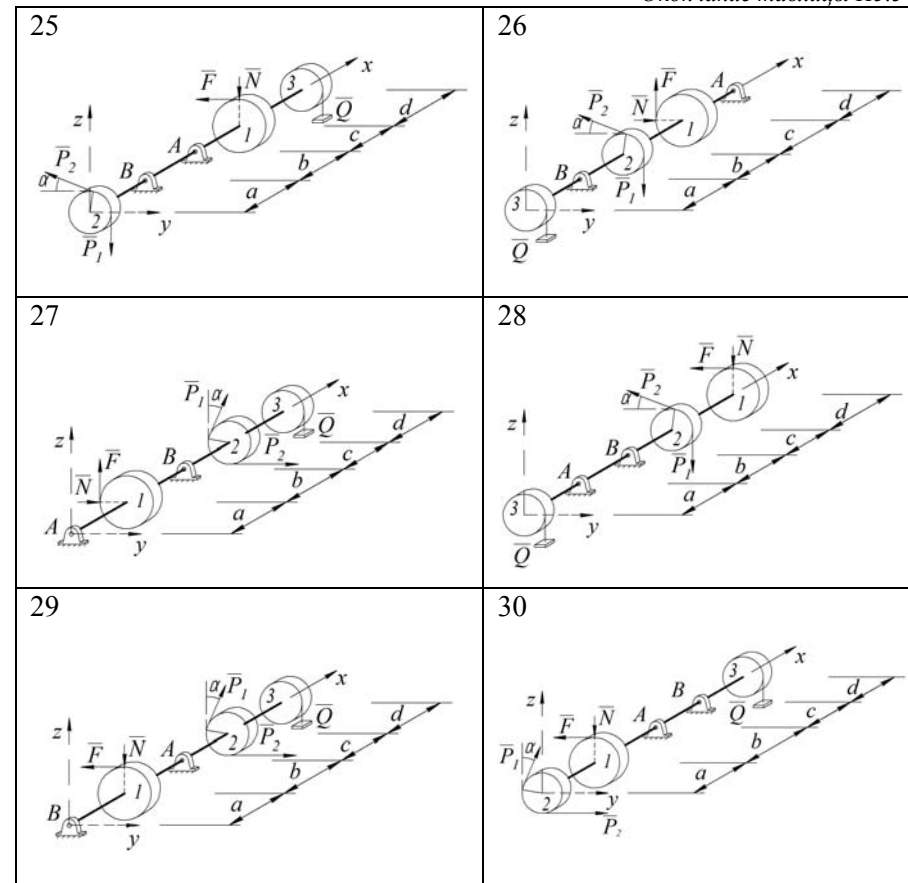
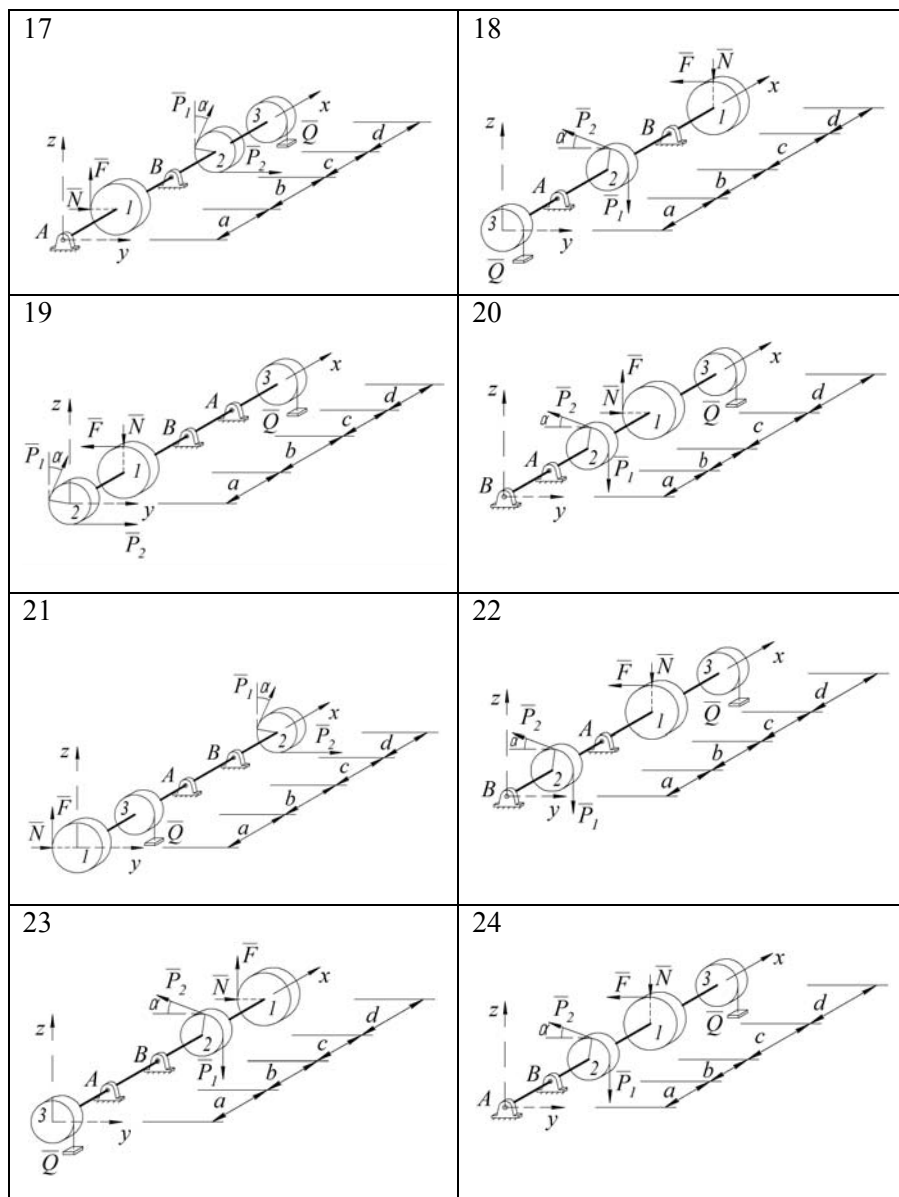
|                          |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Номер варианта           | 01   | 02   | 03   | 04   | 05   | 06   | 07   | 08   | 09   | 10   |
| Номер схемы              | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| Сила $F$ , Н             | 0,4N | 0,4N | 0,3N | 0,3N | 0,4N | 0,4N | 0,3N | 0,1N | 0,2N | 0,4N |
| Сила натяжения $P_1$ , Н | 50   | 50   | 40   | 50   | 60   | 60   | 40   | 30   | 60   | 30   |
| Сила натяжения $P_2$ , Н | 29   | 96   | 78   | 96   | 117  | 118  | 77   | 58   | 117  | 19   |
| Вес $G_1$ , Н            | 34   | 44   | 46   | 46   | 32   | 30   | 22   | 18   | 16   | 46   |
| Вес $G_2$ , Н            | 20   | 30   | 30   | 30   | 20   | 20   | 10   | 10   | 10   | 30   |
| Вес $G_3$ , Н            | 28   | 38   | 38   | 38   | 28   | 28   | 18   | 14   | 14   | 38   |
| Вес груза $Q$ , Н        | 10   | 22   | 14   | 22   | 18   | 14   | 18   | 14   | 18   | 10   |
| Вес вала $G$ , Н         | 25   | 25   | 20   | 25   | 30   | 30   | 20   | 15   | 30   | 15   |
| Угол $\alpha$ , град     | 45   | 60   | 60   | 60   | 45   | 45   | 30   | 30   | 30   | 60   |
| Радиус шкива $R_1$ , см  | 24   | 26   | 30   | 30   | 20   | 16   | 18   | 18   | 14   | 30   |
| Радиус шкива $R_2$ , см  | 10   | 12   | 12   | 12   | 10   | 10   | 8    | 8    | 8    | 12   |
| Радиус шкива $R_3$ , см  | 12   | 14   | 14   | 14   | 12   | 12   | 10   | 9    | 9    | 14   |
| Расстояние $a$ , см      | 24   | 24   | 24   | 24   | 24   | 24   | 24   | 22   | 22   | 24   |
| Расстояние $b$ , см      | 25   | 28   | 26   | 28   | 27   | 26   | 27   | 24   | 25   | 25   |
| Расстояние $c$ , см      | 27   | 31   | 29   | 31   | 29   | 28   | 28   | 25   | 26   | 28   |
| Расстояние $d$ , см      | 27   | 27   | 28   | 28   | 26   | 25   | 26   | 24   | 23   | 28   |

Окончание таблицы П5.4

|                          |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Номер варианта           | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   |
| Номер схемы              | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   |
| Сила $F$ , Н             | 0,4N | 0,1N | 0,2N | 0,3N | 0,3N | 0,3N | 0,3N | 0,1N | 0,2N | 0,1N |
| Сила натяжения $P_1$ , Н | 60   | 50   | 30   | 60   | 60   | 50   | 30   | 70   | 50   | 40   |
| Сила натяжения $P_2$ , Н | 116  | 26   | 58   | 33   | 33   | 96   | 57   | 36   | 27   | 77   |
| Вес $G_1$ , Н            | 46   | 16   | 26   | 42   | 44   | 30   | 26   | 36   | 32   | 26   |
| Вес $G_2$ , Н            | 30   | 10   | 20   | 30   | 30   | 20   | 10   | 30   | 20   | 20   |
| Вес $G_3$ , Н            | 38   | 14   | 24   | 38   | 28   | 28   | 18   | 34   | 24   | 24   |
| Вес груза $Q$ , Н        | 22   | 10   | 14   | 26   | 10   | 22   | 18   | 10   | 26   | 18   |
| Вес вала $G$ , Н         | 30   | 25   | 15   | 30   | 30   | 25   | 15   | 35   | 25   | 20   |
| Угол $\alpha$ , град     | 60   | 30   | 45   | 60   | 60   | 45   | 30   | 60   | 45   | 45   |
| Радиус шкива $R_1$ , см  | 30   | 14   | 16   | 22   | 26   | 16   | 26   | 18   | 28   | 16   |
| Радиус шкива $R_2$ , см  | 12   | 8    | 10   | 12   | 12   | 10   | 8    | 12   | 10   | 10   |
| Радиус шкива $R_3$ , см  | 14   | 9    | 11   | 14   | 14   | 12   | 10   | 13   | 11   | 11   |
| Расстояние $a$ , см      | 24   | 22   | 22   | 24   | 24   | 24   | 24   | 22   | 22   | 22   |
| Расстояние $b$ , см      | 28   | 23   | 24   | 29   | 25   | 28   | 27   | 23   | 27   | 25   |
| Расстояние $c$ , см      | 31   | 24   | 26   | 32   | 28   | 30   | 28   | 26   | 29   | 27   |
| Расстояние $d$ , см      | 28   | 23   | 23   | 26   | 27   | 25   | 28   | 23   | 26   | 23   |
| Номер варианта           | 21   | 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   | 28   | 29   | 30   |
| Номер схемы              | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   |
| Сила $F$ , Н             | 0,3N | 0,1N | 0,1N | 0,4N | 0,3N | 0,3N | 0,2N | 0,1N | 0,3N | 0,2N |
| Сила натяжения $P_1$ , Н | 60   | 40   | 70   | 30   | 50   | 70   | 30   | 70   | 40   | 50   |
| Сила натяжения $P_2$ , Н | 117  | 21   | 137  | 19   | 28   | 137  | 56   | 36   | 23   | 27   |
| Вес $G_1$ , Н            | 26   | 18   | 16   | 32   | 22   | 42   | 22   | 26   | 26   | 20   |
| Вес $G_2$ , Н            | 10   | 10   | 10   | 20   | 10   | 30   | 10   | 20   | 10   | 10   |
| Вес $G_3$ , Н            | 18   | 14   | 14   | 28   | 18   | 38   | 14   | 24   | 18   | 14   |
| Вес груза $Q$ , Н        | 18   | 26   | 18   | 26   | 26   | 18   | 22   | 26   | 26   | 10   |
| Вес вала $G$ , Н         | 30   | 20   | 35   | 15   | 25   | 35   | 15   | 35   | 20   | 25   |
| Угол $\alpha$ , град     | 30   | 30   | 30   | 45   | 30   | 60   | 30   | 45   | 30   | 30   |
| Радиус шкива $R_1$ , см  | 26   | 18   | 14   | 20   | 18   | 22   | 26   | 16   | 26   | 22   |
| Радиус шкива $R_2$ , см  | 8    | 8    | 8    | 10   | 8    | 12   | 8    | 10   | 8    | 8    |
| Радиус шкива $R_3$ , см  | 10   | 9    | 9    | 12   | 10   | 14   | 9    | 11   | 10   | 9    |
| Расстояние $a$ , см      | 24   | 22   | 22   | 24   | 24   | 24   | 22   | 22   | 24   | 22   |
| Расстояние $b$ , см      | 27   | 27   | 25   | 29   | 29   | 27   | 26   | 27   | 29   | 23   |
| Расстояние $c$ , см      | 28   | 28   | 26   | 31   | 30   | 30   | 27   | 29   | 30   | 24   |
| Расстояние $d$ , см      | 28   | 24   | 23   | 26   | 26   | 26   | 26   | 23   | 28   | 25   |

Расчетные схемы к задаче 5.2







## ЛИТЕРАТУРА

---

1. *Бать, М. И.* Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. Т.1. М., 1984.
2. *Бутенин, Н. В.* Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Маркин. СПб., 1998.
3. *Вильке, В. Г.* Теоретическая механика / В. Г. Вильке. М., 1998.
4. *Джамай, В. В.* Прикладная механика / В. В. Джамай [и др.]; под ред. В. В. Джамай. М., 2004.
5. *Кирсанов, М. Н.* Теоретическая механика / М. Н. Кирсанов. М., 2002.
6. *Кирсанов, М. И.* Решебник. Теоретическая механика / М. И. Кирсанов; под ред. А. И. Кириллова. М., 2008.
7. Прикладная механика: лекционный материал по 1 и 2 разделам для агроинженеров немеханических специальностей / сост. : А. Н. Шинкевич, С. С. Томило. Минск, 2004.
8. *Тарг, С. М.* Краткий курс теоретической механики / С. М. Тарг. М., 1998.
9. *Тульев, В. Д.* Теоретическая механика: Статика. Кинематика / В. Д. Тульев. Минск, 2004.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

## ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

*Пособие*

Составители:

**Основин** Виктор Николаевич,  
**Жаркова** Лилия Сергеевна,  
**Евдокимович** Ольга Васильевна,  
**Купрацевич** Елена Сергеевна

Ответственный за выпуск *В. Н. Основин*  
Редактор *Н. А. Антипович*  
Компьютерная верстка *А. И. Стебули*

Подписано в печать 09.10.2011 г. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Ризография.  
Усл. печ. л. 13,25. Уч.-изд. л. 10,36. Тираж 135 экз. Заказ 1019.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования  
«Белорусский государственный аграрный технический университет».  
ЛИ № 02330/0552984 от 14.04.2010.  
ЛП № 02330/0552743 от 02.02.2010.  
Пр. Независимости, 99–2, 220023, Минск.