МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
И ПРОДОВОЛЬСТВИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Пособие
для абитуриентов, поступающих на сокращенный срок обучения по специальности 1-74 06 05 Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (по направлениям), направления специальности 1-74 06 05-01 Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика)

2-е издание, переработанное

Минск
БГАТУ
2019

УДК 621.3(07)
ББК 31.2я7
Т33

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом агроэнергетического факультета БГАТУ (протокол № 6 от 13.02.2019 г.)

Составители:
кандидат технических наук, доцент *А. В. Крутов*,
старший преподаватель *Т. Ф. Гузанова*

Рецензенты:
заведующий отделением «Энергетическое обеспечение сельскохозяйственного производства» УО «Марьиногорский государственный ордена «Знак Почета» аграрно-технический колледж имени В. Е. Лобанка» *Д. В. Ленок*;
председатель комиссии электротехнических дисциплин отделения «Энергетическое обеспечение сельскохозяйственного производства» УО «Марьиногорский государственный ордена «Знак Почета» аграрно-технический колледж имени В. Е. Лобанка» *А. В. Сирош*

Т33 **Теоретические** основы электротехники : пособие / сост. : А. В. Крутов, Т. Ф. Гузанова. – 2-е изд., перераб. – Минск : БГАТУ, 2019. – 96 с.
ISBN 978-985-519-976-3.

В пособии приведены краткие теоретические сведения и практические задачи с их решением для подготовки к вступительным испытаниям по дисциплине «Теоретические основы электротехники», даны решения примерного варианта задания, типовые задачи для самостоятельной работы.

Для абитуриентов, окончивших агротехнические колледжи и поступающих на сокращенный срок обучения в УО «Белорусский государственный аграрный технический университет», а также обучающихся в учреждениях высшего и среднего специального образования.

УДК 621.3(07)
ББК 31.2я7

ISBN 978-985-519-976-3

© БГАТУ, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

Программа вступительных испытаний по дисциплине «Теоретические основы электротехники» для абитуриентов, поступающих на сокращенный срок обучения 5

1. Электрическое поле и электрическая емкость 7

2. Электрические цепи постоянного тока 13

3. Магнитное поле и электромагнитная индукция 22

4. Электрические цепи синусоидального тока 31

5. Трехфазные электрические цепи 36

6. Электрические цепи с несинусоидальными периодическими напряжениями и токами 44

7. Нелинейные цепи 48

8. Переходные процессы в линейных электрических цепях постоянного тока 54

Примерное задание вступительного испытания по теоретическим основам электротехники (с решением) 62

Типовые задания вступительного испытания для самостоятельного решения 68

Список литературы 78

Приложения 80

ВВЕДЕНИЕ

Пособие имеют целью оказание помощи выпускникам агротехнических коллежей при подготовке к вступительным испытаниям по курсу «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ).

Дисциплина базируется на курсе физики (электричество и магнетизм), а также на таких разделах высшей математики и вычислительной техники, как теория матриц, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения и методы их решения, включая численные, теорию функции комплексного переменного, преобразование Фурье–Лапласа, уравнения в частных производных, теорию поля.

В данном пособии приведена программа содержания дисциплины ТОЭ, в рамках которой организуются вступительные испытания. Содержатся также типовые варианты заданий вступительных испытаний прошлых лет. Один из них приведен с решением.

В пособии излагаются методические указания по расчету простых и сложных цепей постоянного тока, а также синусоидального тока с использованием основных законов электротехники.

В приложениях в качестве справочного материала даны сведения о единицах измерения электрических и магнитных величин, по элементарной математике, комплексным числам, основным законам, формулам, уравнениям и соотношениям в электротехнике, основная литература.

ИЗ СОДЕРЖАНИЯ ПРОГРАММЫ * ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ» для абитуриентов, поступающих на сокращенный срок обучения

Наименование раздела и темы
1. Электрическое поле и электрическая емкость. Величины, характеризующие электрическое поле, связь между ними. Закон Кулона, теорема Гаусса. Емкость плоского конденсатора. Энергия электрического поля конденсатора. Эквивалентная емкость последовательно и параллельно соединенных конденсаторов. **2. Электрические цепи постоянного тока**. Законы Ома, Кирхгофа, Джоуля–Ленца. Последовательное, параллельное и смешанное соединение резистивных элементов. Расчет электрических цепей постоянного тока с одним источником энергии. Расчет сложных цепей постоянного тока по методу уравнений Кирхгофа и методу контурных токов. **3. Магнитное поле и электромагнитная индукция**. Величины, характеризующие магнитное поле и связь между ними. Закон электромагнитной индукции, ЭДС самоиндукции. Энергия магнитного поля индуктивной катушки. Механические силы в магнитном поле. Закон Ампера. Законы Кирхгофа для магнитных цепей. Расчет неразветвленных магнитных цепей постоянного тока. **4. Электрические цепи синусоидального тока**. Синусоидальные ток, напряжение, ЭДС и основные характеризующие их величины. Действующие значения тока, напряжения, ЭДС. Синусоидальный ток и напряжение в элементах *R*, *L*, *C*. Активное, реактивное и полное сопротивления. Треугольник сопротивлений. Угол сдвига фаз. Комплексный метод расчета цепей синусоидального тока. Комплексное сопротивление, комплексная проводимость. Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Полная, активная, реактивная и комплексная мощности. Неразветвленные электрические цепи со взаимной индуктивностью.

5. Трехфазные электрические цепи.

Основные схемы соединения, соотношения фазных и линейных величин в симметричном режиме. Активная, реактивная и полная мощности трехфазных цепей. Обрыв и короткое замыкание фазы приемника в цепи при соединении звездой без нейтрального провода. Обрыв фазы и обрыв линии при соединении треугольником.

6. Электрические цепи с несинусоидальными периодическими напряжениями и токами.

Определение действующих значений несинусоидальных токов и напряжений. Определение активной мощности несинусоидального тока.

7. Нелинейные цепи.

Графический расчет нелинейной цепи постоянного тока при последовательном и параллельном соединении нелинейных резисторов. Катушка с ферромагнитным сердечником в цепи переменного тока. Связь между напряжением на катушке и магнитным потоком в сердечнике.

8. Переходные процессы в линейных электрических цепях постоянного тока.

Переходные процессы в цепях R, L, и R, C. Законы коммутации. Определение начальных и установившихся значений токов и напряжений после коммутации.

[*)] **Программа утверждена президиумом совета Учебно-методического объединения по аграрному техническому образованию (протокол № 2 от 14.03.2019 г.).**

1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

1.1. Теоретическая часть

Электрическое поле обусловлено электрическими зарядами и изменением магнитного поля, оказывает силовое воздействие на заряженные частицы и тела, выявляется по силовому воздействию на неподвижные заряженные тела и частицы.

Электрическое поле неподвижных заряженных тел при отсутствии в них электрических токов называют электростатическим. Примером электростатического поля является поле между электродами заряженного конденсатора.

Основными величинами, характеризующими электростатическое поле, являются напряженность поля $\vec{E}$ и потенциал φ.

В основу определения электрического поля положено его механическое проявление. Оно описывается законом Кулона. Два точечных заряда q_1 и q_2 в вакууме взаимодействуют друг с другом с силой $\vec{F}$, прямо пропорциональной произведению зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния R между ними:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

где $\vec{R}_0$ – единичный вектор, направленный по линии, соединяющей заряды;

ε_0 – электрическая постоянная или диэлектрическая проницаемость вакуума (воздуха); $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Если в электростатическое поле поместить настолько малый положительный заряд, что он своим присутствием не вызовет сколько-нибудь заметного перераспределения зарядов на телах, создающих поле, то отношение силы, действующей на заряд, к величине заряда q определяет напряженность поля $\vec{E}$ в данной точке:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Потенциал определяется как работа, совершаемая силами поля при переносе единичного заряда из данной точки поля в бесконечность:

$$\varphi_1 = \int_1^{\infty} \vec{E} d\vec{l} \ .$$

Разность потенциалов (напряжение) – это работа сил поля при переносе единичного положительного заряда из одной точки поля в другую:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \ ,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элемента пути, равный по величине элементу пути dl и направленный по касательной к пути в сторону перемещения заряженной частицы.

Потенциал измеряется в вольтах (В), элемент пути – в метрах (м), напряженность электрического поля – в вольтах на метр (В/м).

В соответствии с теоремой Гаусса поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через замкнутую поверхность *S* определяется по формуле $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$

Емкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_a \frac{S}{d}.$

где $S = ab$ – площадь поверхности пластины;

d – расстояние между пластинами.

Электрическое смещение $D = \frac{q}{S}.$

Энергию, запасенную в электрическом поле конденсатора, при изменении напряжения на конденсаторе от 0 до U_c находят из выражения:

$$W_э = \int_0^{U_C} C u_C du_C = \frac{C U_C^2}{2}.$$

Конденсаторы соединяют друг с другом последовательно или параллельно. На рисунке 1.1 изображены три конденсатора, соединенные последовательно.

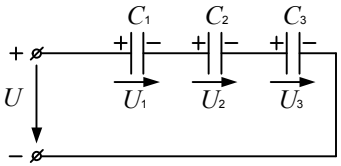


Рис. 1.1. Последовательное соединение конденсаторов

Их эквивалентная электрическая емкость определяется по следующему выражению:

$$\frac{1}{C_э} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

или

$$C_э = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_1 C_3}.$$

Если в последовательную цепь соединяются n конденсаторов одинаковой емкости C_n, то эквивалентная емкость

$$C_э = \frac{C_n}{n}.$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 1.2) эквивалентная электрическая емкость равна сумме всех емкостей.

$$C_э = C_1 + C_2 + C_3.$$

При параллельном соединении n конденсаторов одинаковой емкости C_n эквивалентная емкость $C_э = nC_n$.

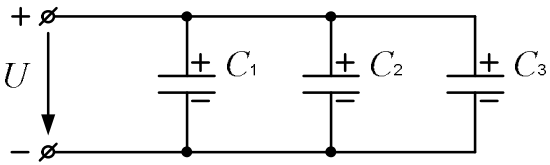


Рис. 1.2. Параллельное соединение конденсаторов

1.2. Примеры решения задач

Задача 1.1. Между одной из пластин плоского конденсатора и наполнителем (парафином) образовался слой воздуха (рис. 1.3).

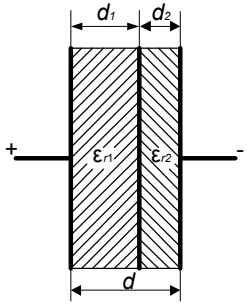


Рис. 1.3. Плоский конденсатор с двумя слоями диэлектрика

Площадь поверхности пластины конденсатора $S = 200$ см^2, толщина слоя парафина $d_1 = 0{,}5$ см, толщина воздушного слоя $d_2 = 0{,}1$ см, относительная диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon_{r1} = 2$, для воздуха $\varepsilon_{r2} = 1$.

Пробивные напряженности для парафина и для воздуха соответственно:

$$E_{\text{пр1}} = 150\frac{\text{кВ}}{\text{см}}; \qquad E_{\text{пр2}} = 30\frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Определить, при каком напряжении этот конденсатор будет пробит, какое напряжение выдержит конденсатор без дефекта (расстояние между пластинами $d = 0{,}6$ см).

Решение. Для двухслойного плоского конденсатора напряжение между пластинами $U = d_1E_1 + d_2E_2$.

Электрическое смещение $D = \frac{q}{S}$ не зависит от свойств диэлектрика. Напряженности $E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}$, $E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$, то есть напряженность будет больше в слое воздуха. Выразим: $D = \varepsilon_0\varepsilon_{r2}E_2$; $E_1 = \frac{E_2\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}$.

Для определения напряжения, при котором конденсатор будет пробит, запишем:

$$U = d_1 \frac{E_2 \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} + d_2 E_2;$$

$$U = 0{,}5 \frac{30 \cdot 1}{2} + 0{,}1 \cdot 30 = 7{,}5 + 3 = 10{,}5 \text{ кВ}.$$

Конденсатор без дефекта выдержит напряжение

$$U = dE_1 = 0{,}6 \cdot 150 = 90 \text{ кВ}.$$

Задача 1.2. В схеме на рисунке 1.4, *а* электрические емкости конденсаторов C_1 = 20 мкФ; C_2 = 16 мкФ; C_3 = 14 мкФ, а общее напряжение U = 200 В. Определить эквивалентную емкость цепи, заряд и напряжение каждого конденсатора.

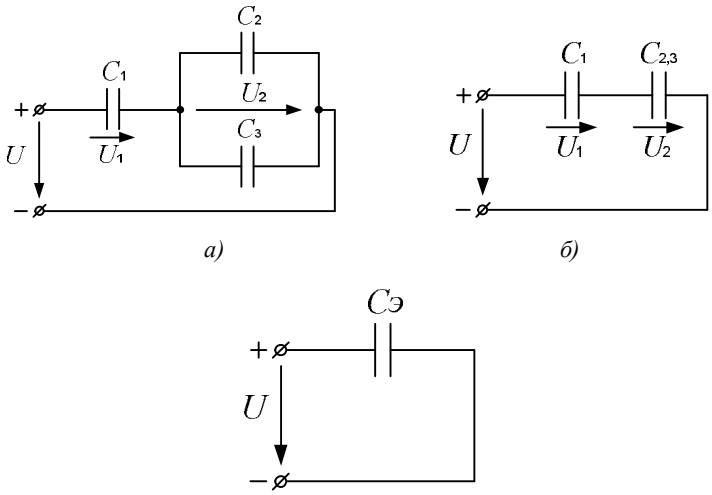


Рис. 1.4. Смешанное соединение конденсаторов и схемы цепей после преобразований и напряжение каждого конденсатора

Решение. Эквивалентная емкость параллельно включенных конденсаторов C_2 и C_3 (рис. 1.4, *а*) равна:

$$C_{2,3} = C_2 + C_3 = 30 \text{ мкФ}.$$

На упрощенной схеме (рис. 1.4, *б*) видно, что конденсаторы C_1 и $C_{2,3}$ соединены последовательно, эквивалентная емкость этих конденсаторов

$$C_э = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_{2,3}} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12 \text{ мкФ}.$$

Общий заряд системы конденсаторов на схеме рисунка 2.7, *а*

$$q = C_э U = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 24 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Такой же заряд имеет место на последовательно соединенных конденсаторах C_1 и $C_{2,3}$:

$$q = q_1 = q_{23} = 24 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

Тогда напряжение на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{20 \cdot 10^{-6}} = 120 \text{ В}; \quad U_2 = \frac{q_{2,3}}{C_{2,3}} = \frac{24 \cdot 10^{-4}}{30 \cdot 10^{-6}} = 80 \text{ В}.$$

Следовательно, заряды конденсаторов C_2 и C_3:

$$q_2 = C_2 U_2 = 16 \cdot 10^{-6} \cdot 80 = 12{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ Кл};$$
$$q_3 = C_3 U_2 = 14 \cdot 10^{-6} \cdot 80 = 11{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}.$$

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2.1. Теоретическая часть

Для решения задач по расчету электрических цепей необходимо иметь понятие об электрической цепи, токе, напряжении, источнике ЭДС, схеме электрических цепей (ветвь, узел, контур) и знать законы Ома и Кирхгофа, закон Джоуля–Ленца, формулы для расчета мощностей источников и приемников электрической энергии. Следует освоить порядок составления уравнений для расчета токов в схемах с помощью законов Кирхгофа или метод контурных токов. Указанные вопросы можно изучить по учебным пособиям [1, 2, 3] и др.

В цепи с одним источником энергии и смешанным соединением сопротивлений при расчете токов используют преобразование последовательно и параллельно соединенных сопротивлений в эквивалентное сопротивление.

Элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрического сопротивления, называется резистором.

Последовательным соединением резисторов называют соединение, при котором через все резисторы проходит один и тот же ток, так как между резисторами нет ответвлений тока.

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + ... + R_n .$$

Параллельным соединением резисторов называют соединение, при котором все резисторы присоединены к одной паре узлов и находятся под одним и тем же напряжением.

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad \text{или} \quad g_{\text{экв}} = g_1 + g_2 + \cdots + g_n ,$$

где $\frac{1}{R} = g$ – проводимость.

В случае для двух параллельно соединенных сопротивлений R_1 и R_2

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Узлом электрической цепи называют место соединения трех и более ветвей.

Ветвью называют участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток. В ветви все элементы соединены последовательно, ветвь находится между двумя узлами. По числу ветвей в цепи определяют число разных токов.

Контур – замкнутый путь, проходящий в общем случае по нескольким ветвям электрической цепи.

Токи в цепях находят по законам Ома и Кирхгофа.

Закон Ома: ток через сопротивление R равен напряжению на этом сопротивлении, деленному на величину этого сопротивления:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum I = 0.$$

Подтекающие к узлу токи считаются положительными, утекающие – отрицательными.

Вторая формулировка первого закона Кирхгофа: сумма токов, подтекающих к узлу, равна сумме токов, утекающих от узла:

$$\sum I_{\text{подт}} = \sum I_{\text{утек}}.$$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма ЭДС в контуре равна алгебраической сумме напряжений на сопротивлениях этого контура:

$$\sum E = \sum IR.$$

В каждую из сумм соответствующие слагаемые входят со знаком плюс, если они совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если они не совпадают с ним.

Мощность источника ЭДС

$$P = EI.$$

Потребляемая мощность в цепи постоянного тока с резистором

$$P = UI \quad \text{или} \quad P = I^2 R .$$

Формула $P = I^2 R$ есть закон Джоуля-Ленца. Согласно этому закону вся энергия электрического тока в резисторе преобразуется в теплоту.

2.2. Примеры решения задач

Задача 2.1. В электрической цепи со смешанным соединением резисторов (рис. 2.1) определить токи в ветвях цепи, составить баланс мощностей.

Дано: E = 140 В,
R_1 = 10 Ом,
R_2 = 100 Ом,
R_3 = 30 Ом,
R_4 = 300 Ом,
R_5 = 200 Ом.

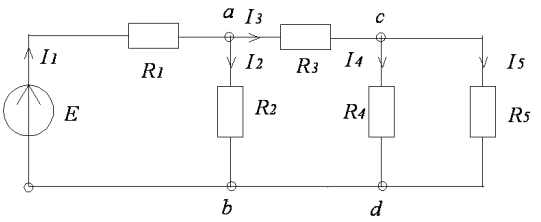


Рис. 2.1. Электрическая цепь со смешанным соединением

Решение.

1. Отмечаем в схеме узлы и указываем направления токов в ветвях в соответствии с направлением ЭДС.

2. Для определения токов в ветвях используем метод эквивалентных преобразований. Найдем эквивалентное сопротивление цепи относительно источника ЭДС. Рекомендуется поэтапное преобразование последовательно и параллельно соединенных сопротивлений, начиная с ветвей, наиболее удаленных от источника ЭДС.

Сопротивления R_4 и R_5 соединены параллельно:

$$R_{4,5} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{300 \cdot 200}{500} = 120 \text{ Ом}.$$

Получаем схему цепи (рис. 2.2).

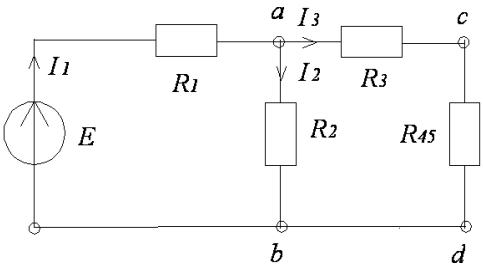


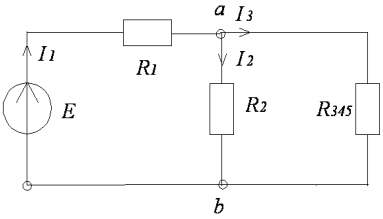
Рис. 2.2. Схема электрической цепи после первого преобразования

В схеме цепи сопротивления R_3 и $R_{4,5}$ соединены последовательно:

$$R_{3,4,5} = R_3 + R_{4,5} = 150 \text{ Ом}.$$

Получаем схему цепи (рис. 2.3).

В схеме цепи сопротивления R_2 и R_{345} соединены последовательно:

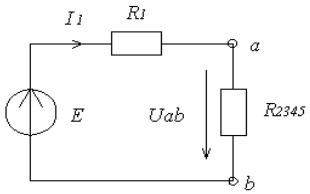


$$R_{2,3,4,5} = \frac{R_2 R_{3,4,5}}{R_2 + R_{3,4,5}} = \frac{100 \cdot 150}{250} = 60 \text{ Ом}.$$

Рис. 2.3. Схема электрической цепи после очередного преобразования

Получаем схему цепи (рис. 2.4).

В схеме цепи сопротивления R_1 и $R_{2,3,4,5}$ соединены последовательно:



$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_{2,3,4,5} = 10 + 60 = 70 \text{ Ом}.$$

Рис. 2.4. Схема электрической цепи с последовательным соединением после очередного преобразования

3. Определяем токи в ветвях электрической цепи. По второму закону Кирхгофа для схемы цепи (рис. 2.4):

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{2,3,4,5}} = \frac{140}{70} = 2 \text{ А}.$$

Для определения токов в других ветвях цепи находим напряжения на этих ветвях.

По закону Ома в схеме цепи на рисунке 2.4

$$U_{ab} = I_1 R_{2,3,4,5} = 2 \times 60 = 120 \text{ В}.$$

По закону Ома в схеме цепи на рисунке 2.3

$$I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = \frac{120}{100} = 1,2 \text{ А}, \qquad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_{3,4,5}} = \frac{120}{150} = 0,8 \text{ А}.$$

По закону Ома в схеме цепи на рисунке 2.2

$$U_{cd} = I_3 R_{4,5} = 0,8 \cdot 120 = 96 \text{ В}.$$

По закону Ома в схеме цепи на рисунке 2.2

$$I_4 = \frac{U_{cd}}{R_4} = \frac{96}{300} = 0,32 \text{ А}, \qquad I_5 = \frac{U_{cd}}{R_5} = \frac{96}{200} = 0,48 \text{ А}.$$

4. Составляем баланс мощностей.

Мощность источника энергии

$$P_{\text{ист}} = EI_1 = 140 \cdot 2 = 280 \text{ Вт}.$$

Мощность приемников энергии рассчитываем по закону Джоуля-Ленца:

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 = 2^2 \cdot 10 +$$
$$+1,2^2 \cdot 100 + 0,8^2 \cdot 30 + 0,32^2 \cdot 300 + 0,48^2 \cdot 200 = 280 \text{ Вт}.$$

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}}.$$

Баланс мощностей соблюдается, значит, токи определены правильно.

Задача 2.1. Для разветвленной электрической цепи с несколькими ЭДС (рис. 2.5) составить систему уравнений для расчета токов методом уравнений Кирхгофа. Рассчитать токи методом контурных токов. Составить баланс мощностей в схеме.

Дано: $E_1 = 40$ В, $E_2 = 20$ В, $R_1 = 15$ Ом,

$R_3 = 5$ Ом, $R_4 = 15$ Ом, $R_5 = 12$ Ом,

$R_6 = 10$ Ом.

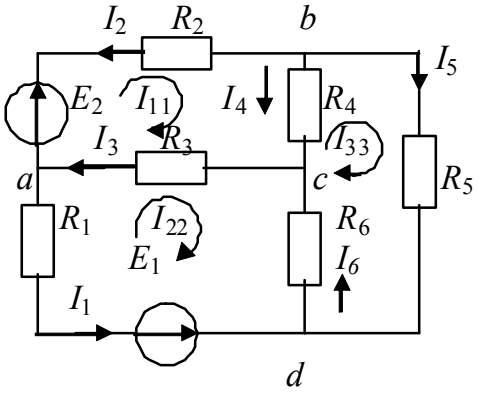


Рис. 2.5. Схема разветвленной электрической цепи

Решение

1. Выбираем произвольно направления токов в ветвях (рис. 2.5).

2. Составляем систему уравнений по законам Кирхгофа для определения токов в ветвях.

Так как в схеме 6 ветвей, необходимо составить 6 уравнений: по первому закону Кирхгофа – три уравнения (на единицу меньше числа узлов) и по второму закону Кирхгофа недостающее число уравнений, т. е. также три уравнения.

Система уравнений для расчета токов имеет вид:

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_1 = 0 & \text{(для узла } a\text{);} \quad (2) \\ -I_4 - I_2 - I_5 = 0 & \text{(для узла } b\text{);} \quad (3) \\ I_4 + I_6 - I_3 = 0 & \text{(для узла } c\text{);} \quad (4) \\ -I_2R_2 + I_4R_4 + I_3R_3 = E_2 & \text{(для контура } abca\text{);} \quad (5) \\ -I_3R_3 - I_6R_6 - I_1R_1 = -E_1 & \text{(для контура } acda\text{);} \quad (6) \\ I_5R_5 + I_6R_6 - I_4R_4 = 0 & \text{(для контура } bdcd\text{).} \quad (7) \end{cases}$$

В уравнениях (2)–(4) притекающие к узлу токи принимали положительными, оттекающие от узла токи – отрицательными. В уравнениях (5)–(7) все ЭДС и напряжения, совпадающие с направлением обхо-

да по контуру (по часовой стрелке), записывали положительными, а не совпадающие – отрицательными. Решая полученную систему уравнений (2)–(7), можем найти токи в ветвях. Рассмотренный метод в большинстве случаев является достаточно громоздким. Для упрощения расчета разработаны методы, в основе которых также положены уравнения Кирхгофа, но количество уравнений значительно сокращено. Один из них – метод контурных токов.

3. Определяем токи в ветвях методом контурных токов. Считаем, что в каждом независимом контуре схемы (рис. 2.5) течет свой контурный ток: I_{11}, I_{22}, I_{33}. Для единообразия контурные токи направляют в одну сторону, в нашем случае по часовой стрелке.

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов. Направления обхода контуров примем также по часовой стрелке.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_{11}(R_2 + R_3 + R_4) - I_{22}R_3 - I_{33}R_4 = E_2; \\ I_{22}(R_1 + R_3 + R_6) - I_{11}R_3 - I_{33}R_6 = -E_1; \\ I_{33}(R_4 + R_5 + R_6) - I_{11}R_4 - I_{22}R_6 = 0. \end{cases}$$

Подставляем известные значения сопротивлений и ЭДС:

$$\begin{cases} 47I_{11} - 5I_{22} - 15I_{33} = 20; \\ -5I_{11} + 30I_{22} - 10I_{33} = -40; \\ -15I_{11} - 10I_{22} + 37I_{33} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Дальнейший расчет можно вести или методом последовательного исключения неизвестных, или методом определителей. Выбираем последний как более рациональный.

Находим главный определитель, используя разложение по элементам столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 47 & -5 & -15 \\ -5 & 30 & -10 \\ -15 & -10 & 37 \end{vmatrix} = 47\begin{vmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 37 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ -15 & 37 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} -5 & 30 \\ -15 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= 47(1110 - 100) + 5(-185 - 150) - 15(50 + 450) = 38295.$$

Для нахождения контурного тока I_{11} заменяем в главном определителе первый столбец на свободные члены системы (8).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -5 & -15 \\ -40 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 37 \end{vmatrix} = 6800; \qquad I_{11} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6800}{38295} = 0{,}177 \text{ А}.$$

Для контурного тока I_{22}

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 47 & 20 & -15 \\ -5 & -40 & -10 \\ -15 & 0 & 37 \end{vmatrix} = -53860; \qquad I_{22} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-53860}{38295} = -1{,}4 \text{ А}.$$

Для контурного тока I_{33}

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 47 & -5 & 20 \\ -5 & 30 & -40 \\ -15 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -11800; \qquad I_{33} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-11800}{38295} = -0{,}308 \text{ А}.$$

Чтобы убедиться в правильности расчета, подставим найденные контурные токи в первое уравнение системы (8):

$$47 \cdot 0{,}177 - 5 \cdot (-1{,}4) - 15 \cdot (-0{,}308) = 19{,}93 \approx 20.$$

Полученное значение 19,93 ≈ 20 равно правой части первого уравнения системы (8), т. е. система уравнений решена правильно.

Определяем истинные токи в ветвях. Ток в ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в этой же ветви.

Рассчитываем значения токов в ветвях схемы на рисунке 2.5, сравнивая направления контурных токов в ветвях с направлением истинных токов.

$$I_1 = -I_{22} = 1{,}44 \text{ А};$$
$$I_2 = -I_{11} = -0{,}177 \text{ А};$$
$$I_3 = I_{11} - I_{22} = 0{,}177 + 1{,}4 = 1{,}577 \text{ А};$$
$$I_4 = -I_{33} + I_{11} = 0{,}308 + 0{,}177 = 0{,}485 \text{ А};$$
$$I_5 = I_{33} = -0{,}308 \text{ А};$$
$$I_6 = I_{33} - I_{22} = -0{,}308 + 1{,}4 = 1{,}09 \text{ А}.$$

Действительные направления токов I_2 и I_5 противоположны принятым для них на рисунке 2.5 за положительные.

4. Составляем баланс мощностей.

На основании закона сохранения энергии количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в резисторах схемы, должно равняться энергии, доставляемой за то же время источниками питания.

Уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$\sum I^2 R = \sum EI.$$

Мощность источника энергии EI записывается со знаком плюс, если ток в источнике совпадает с направлением ЭДС. Если же ток противоположен направлению ЭДС, то этот источник ЭДС является потребителем энергии, и его мощность записываем со знаком минус.

В нашем случае

$$\sum EI = E_1 I_1 - E_2 I_2 = 40 \times 1{,}4 - 20 \times \left(-0{,}177\right) = 59{,}54\,\text{Вт}.$$

Мощность тепловых потерь в сопротивлениях

$$\sum I^2 R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 1{,}4^2 \cdot 15 +$$
$$+0{,}177^2 \cdot 27 + 1{,}577^2 \cdot 5 + 0{,}485^2 \cdot 15 + 0{,}308^2 \cdot 12 + 1{,}09^2 \cdot 10 = 59{,}22\ \text{Вт}.$$

Расхождения в результатах вычислений не превосходят 1 %, это означает, что токи рассчитаны правильно.

3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

3.1. Теоретическая часть

Магнитное поле есть одна из сторон электромагнитного поля. Магнитное поле постоянного тока создается неизменными во времени токами, протекающими по проводящим телам, неподвижным в пространстве по отношению к наблюдателю. Магнитное поле постоянного тока можно рассматривать отдельно от электрического поля. Магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Магнитная индукция $\left[B\right]$ измеряется в теслах (Тл). Индукцию $\vec{B}$ можно определить по силе, с которой действует магнитное поле на проводник длиной $d\vec{l}$ с током *I,* согласно закону Ампера:

$$\vec{F} = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right].$$

Выражение силы, действующей на часть провода *l*, расположенного в пределах магнитного поля:

$$F = B\,I\,l\sin\alpha,$$

где α – угол между направлением вектора магнитной индукции $\vec{B}$ и длиной провода *l* с током *I*.

Если $\alpha = 90^0$, то есть провод с током расположен перпендикулярно к линиям магнитной индукции, то

$$F = B\,I\,l.$$

Величина индукции магнитного поля зависит как от значения тока, так и от среды, окружающей проводник. Поэтому рассматривают и другую векторную величину, характеризующую магнитное поле – напряженность магнитного поля $\vec{H}$, связанную с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ соотношением

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_a,$$

где μ_a – абсолютная магнитная проницаемость, Гн/м.

Напряженность магнитного поля H измеряется в амперах на метр (А/м).

Абсолютная магнитная проницаемость μ_a характеризует магнитные свойства вещества, в котором существует магнитное поле.

$$\mu_a = \mu_o \mu_r ,$$

где μ_o – магнитная постоянная или магнитная проницаемость вакуума

$$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Гн/м}.$$

Величина μ_r называется относительной магнитной проницаемостью и показывает, во сколько раз магнитное поле в веществе получается сильнее (или слабее), чем в вакууме, при прочих равных условиях, то есть

$$\mu_r = \mu_a / \mu_o = B / B_o .$$

Магнитное поле можно характеризовать скалярной величиной – магнитным потоком

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S},$$

где $d\vec{S}$ – вектор элементарной площадки поверхности S.

В практике бывают случаи, когда магнитное поле можно считать равномерным, а поверхность, через которую определяют магнитный поток – плоскостью, тогда

$$\Phi = BS\cos\alpha ,$$

где α – угол между линией магнитной индукции и перпендикуляром к поверхности S. Если угол $\alpha = 0$, то есть линии магнитной индукции направлены перпендикулярно к плоскости S, то магнитный поток

$$\Phi = BS .$$

Единица измерения магнитного потока вебер (Вб).

Связь между электрическим током и его магнитным полем устанавливает закон полного тока:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I.$$

Пусть требуется определить напряженность магнитного поля в точке, удаленной от центра проводника на расстояние R (рис. 3.1).

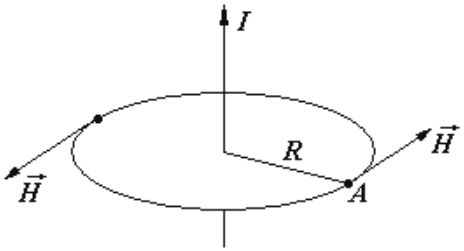


Рис. 3.1. Картина напряженности магнитного поля вокруг проводника

Проведем окружность вокруг проводника радиусом R и возьмем линейный интеграл от напряженности магнитного поля вдоль этой окружности. В силу симметрии значение H на расстоянии R от оси проводника будет одинаковым. Векторы $\vec{H}$ и $d\vec{l}$ будут совпадать по направлению, поскольку они направлены по касательной к окружности. Поэтому

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \oint H dl \cos 0^0 = H \oint dl = H\, 2\pi R = I;$$

$$H = \frac{I}{2\pi R}.$$

По мере удаления от провода напряженность магнитного поля убывает.

При расчете магнитных цепей используют такие скалярные величины как магнитный поток Ф, магнитодвижущая сила (МДС) F, магнитное напряжение (падение магнитного напряжения) $U_м$.

Магнитодвижущая (намагничивающая) сила выражается произведением числа витков катушки N на величину протекающего по ней тока I:

$$F = I\,N.$$

Падением магнитного напряжения между точками *a* и *b* магнитной цепи называют линейный интеграл от напряженности *H* магнитного поля между этими точками по длине участка:

$$U_{\text{м}} = \int_{a}^{b} \vec{H} d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ – элемент длины участка магнитной цепи.

Если напряженность поля по всей длине участка одинакова, то падение магнитного напряжения определяют по выражению:

$$U_{\text{м}} = Hl_{ab}.$$

В том случае, когда участок магнитной цепи между точками *a* и *b* может быть подразделен на несколько отдельных частей так, что для каждой части напряженность поля неизменна, то падение магнитного напряжения на всем участке равно сумме падений напряжений на всех его частях:

$$U_{\text{м}} = \sum_{k=1}^{n} H_k l_k.$$

Единицей измерения МДС и падения магнитного напряжения является ампер (А).

В основе расчета магнитных цепей лежат определенные законы.

Исходя из принципа непрерывности магнитного потока, сумма вошедшего в объем и вышедшего из объема магнитных потоков равна нулю, т. е.

$$\oint \vec{B} \overrightarrow{dS} = 0.$$

При охвате замкнутой поверхностью *S* нескольких сечений магнитопровода

$$\sum \Phi = 0.$$

Данное уравнение выражает первый закон Кирхгофа для магнитной цепи: алгебраическая сумма магнитных потоков в любом узле магнитной цепи равна нулю. При этом потоки, направленные к узлу, принимают положительными, а потоки, направленные от узла,

принимают отрицательными. Значит, первый закон Кирхгофа можно сформулировать иначе: сумма магнитных потоков, подтекающих к узлу, равна сумме магнитных потоков, утекающих от узла:

$$\sum \Phi_{\text{п}} = \sum \Phi_{\text{у}}.$$

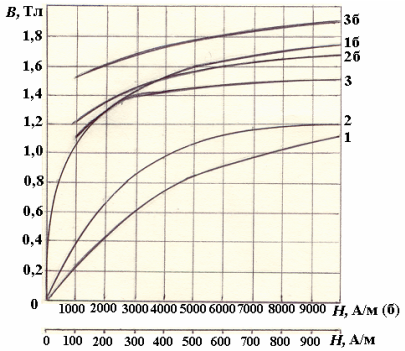
Одним из основных законов, используемых при расчете магнитной цепи, является упоминавшийся выше закон полного тока. Из этого закона можно сформулировать второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС вдоль того же контура:

$$\sum U_{\text{м}} = \sum F \quad \text{или} \quad \sum Hl = \sum IN \cdot$$

Перед тем как записать уравнения по законам Кирхгофа, следует указать направления МДС, произвольно выбрать положительные направления магнитных потоков в ветвях и направления обхода контуров.

Если направление магнитного потока на некотором участке совпадает с направлением обхода, то падение магнитного напряжения этого участка входит в левую часть уравнения со знаком плюс, если встречно ему, то со знаком минус. Аналогично, если МДС совпадает с направлением обхода, она входит в правую часть уравнения со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Свойства ферро-магнитных материалов принято характеризовать зависимостью магнитной индукции B от напряженности магнитного поля H, называемой кривой намагничивания.



1 – литая сталь;
2 – листовая электротехническая сталь 1512 (горячекатаная);
3 – листовая электротехническая сталь 3411 (холоднокатаная).

Рис. 3.2 – Основные кривые намагничивания B (H) различных марок сталей

На рисунке 3.2 приведены основные кривые намагничивания некоторых марок сталей.

При изменении магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур (обмотку), независимо от того, чем вызвано изменение потока, в контуре (обмотке) наводится электродвижущая сила *e*. Количественное выражение для наведенной (индуктированной) ЭДС устанавливает закон электромагнитной индукции.

Электродвижущая сила, наведенная (индуктированная) в контуре, равна скорости изменения потокосцепления контура Ψ, взятой с отрицательным знаком:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Произведение числа витков и сцепленного с этими витками магнитного потока называется потокосцеплением:

$$\Psi = N\Phi.$$

Потокосцепление, характеризующее связь тока с собственным магнитным полем, называется собственным или потокосцеплением самоиндукции. Магнитный поток Ф создан электрическим током, следовательно, собственное потокосцепление Ψ катушки, прежде всего, зависит от тока в катушке. Кроме того, на потокосцепление будут влиять число витков, форма, размеры контура и среда, в которой создается магнитное поле. Для учета этого влияния введено понятие индуктивности контура или катушки:

$$\Psi = L\,I\,,$$

где L – индуктивность, генри (Гн).

Изменение собственного потокосцепления обычно является следствием изменения собственного тока катушки:

$$e_L = -\frac{d\Psi_L}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}$$

или

$$e_L = -L\frac{di}{dt}.$$

Полная энергия, запасенная в магнитном поле катушки, при изменении потокосцепления от 0 до Ψ

$$W_{\text{м}} = \int_0^{\Psi} id\Psi.$$

Для катушек с неферромагнитным сердечником $\Psi = Li$ и $d\Psi = Ldi$, поэтому

$$W_{\text{м}} = L\int_0^{i} idi = \frac{Li^2}{2}$$

или

$$W_{\text{м}} = \frac{\Psi i}{2}.$$

3.2. Примеры решения задач

Задача 3.1. В сердечнике, представленном на рисунке 3.3, в воздушном зазоре должна быть магнитная индукция B = 1 Тл. Площадь сечения сердечника S = 25 см^2, длина средней линии сердечника $l_{\text{ср}} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5$ =0,5 м, длина воздушного зазора $l_{\text{в}}$ = 0,5 мм. Материал сердечника – литая сталь (кривая намагничивания приведена на рисунке 3.2). Определить ток в обмотке, имеющей 500 витков.

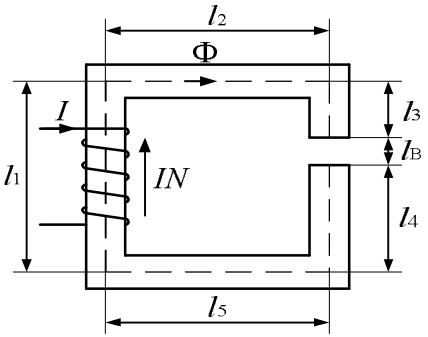


Рис. 3.3. Схема неразветвленной магнитной цепи

Решение. Согласно второму закону Кирхгофа для магнитной цепи, МДС катушки

$$IN = H_{ст} l_{ср} + H_{в} l_{в},$$

где $H_{ст}$ – напряженность магнитного поля в стальном сердечнике;

$H_{в}$ – напряженность магнитного поля в воздушном зазоре.

В неразветвленной магнитной цепи во всех участках проходит один и тот же магнитный поток Ф, площадь сечения воздушного зазора $S_{в}$ и площадь сечения стального сердечника принимаем равными $S_{в} = S_{ст} = S$.

Следовательно, магнитная индукция во всех сечениях магнитопровода одинаковая: $B_{в} = B_{ст} = B = 1$ Тл.

Напряженность в стальном сердечнике находим по кривой намагничивания литой стали (рисунок 3.2)

$$H_{ст} = 750 \text{ А/м}.$$

Напряженность в воздушном зазоре находим по уравнению:

$$H_{в} = \frac{B}{\mu_{о}} = 0,8 \cdot 10^{6} \cdot B = 0,8 \cdot 10^{6} \cdot 1 = 0,8 \cdot 10^{6} \text{ А/м}.$$

Подставляем найденные значения напряженностей в уравнение второго закона Кирхгофа и находим МДС катушки:

$$IN = 750 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 10^{6} \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 375 + 4000 = 4375 \text{ А}.$$

Ток в катушке

$$I = \frac{4750}{N} = \frac{4375}{500} = 8,75 \text{ А}.$$

Задача 3.2. Составить систему уравнений по законам Кирхгофа для разветвленной магнитной цепи (рис. 3.4).

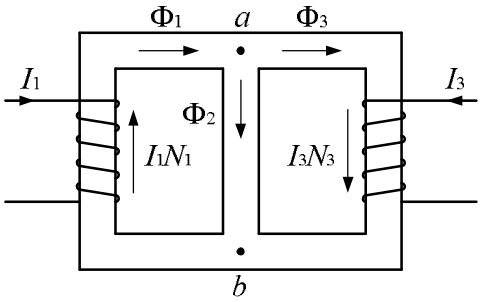


Рис. 3.4. Схема разветвленной магнитной цепи

Решение. Укажем направления МДС $I_1\ N_1$ и $I_3\ N_3$, используя правило правоходового винта. Произвольно выберем и укажем на схеме положительные направления магнитных потоков. Обход по контурам – по часовой стрелке.

По первому закону Кирхгофа необходимо составить одно уравнение (на одно меньше числа узлов), по второму закону Кирхгофа – два уравнения, чтобы общее число уравнений было равно числу ветвей. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0 \\ H_1 l_1 + H_2 l_2 = I_1 N_1 \\ -H_2 l_2 + H_3 l_3 = I_3 N_3. \end{cases}$$

4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

4.1. Теоретическая часть

Для решения задач по расчету линейных электрических цепей синусоидального тока необходимо изучить следующие вопросы: синусоидальный ток и основные характеризующие его величины (период T, частота f, угловая частота ω, амплитуда I_m, начальная фаза ψ); действующее значение тока; изображение синусоидально изменяющихся величин векторами на комплексной плоскости, синусоидальный ток в активном сопротивлении; индуктивность в цепи синусоидального тока; конденсатор в цепи синусоидального тока; основы символического метода расчета цепей синусоидального тока; комплексное сопротивление; закон Ома для цепи синусоидального тока; законы Кирхгофа в символической форме записи; активная, реактивная и полная мощности) [1, 2, 3].

При расчете цепей синусоидального тока необходимо учитывать не только активное сопротивление резистора R, но и индуктивное сопротивление $X_L = \omega L$, создаваемое индуктивной катушкой, и емкостное сопротивление $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, создаваемое конденсатором.

Следует помнить, что синусоидальное напряжение на активном сопротивлении R совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности L опережает ток по времени на четверть периода T или по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$. Напряжение на емкости C отстает от тока по времени на четверть периода T или по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$. Поэтому для расчета разветвленных цепей синусоидального тока наиболее целесообразным является комплексный метод (см. приложение Б).

Закон Ома в комплексной форме: комплексный ток I через комплексное сопротивление $\underline{Z}$ равен отношению комплексного напряжения U на этом сопротивлении к величине этого комплексного сопротивления:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Для участка цепи с последовательным соединением элементов *R, L, C* закон Ома имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}} \quad \text{или} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX_L - jX_C}.$$

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексных токов в узле равна нулю:

$$\sum \dot{I} = 0.$$

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме: алгебраическая сумма комплексных ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме комплексных напряжений на сопротивлениях этого контура:

$$\sum \dot{E} = \sum \dot{I}\underline{Z}.$$

Активная мощность в цепи синусоидального тока: $P = UI\cos\varphi$,

Реактивная мощность: $Q = UI\sin\varphi$,

Полная мощность: $S = UI$.

В выражении мощностей I и U – действующие значения тока и напряжений, φ – угол сдвига тока по фазе относительно напряжения.

Основные законы, формулы и уравнения электротехники, соотношение между током и напряжением, соотношение между током и напряжением на элементах электрической цепи приведены в приложении 2.

Для расчета электрической цепи синусоидального тока со смешанным соединением приемников так же, как в цепях постоянного тока, используют преобразование последовательно и параллельно соединенных сопротивлений в эквивалентное сопротивление.

Для расчета разветвленных цепей синусоидального тока с несколькими ЭДС используют метод уравнения Кирхгофа, метод контурных токов и в частном случае схемы, только с двумя узлами – метод двух узлов. Все расчеты выполняют в комплексной форме.

4.2. Примеры решения задач

Задача 4.1. Расчет электрической цепи синусоидального тока.

В схеме электрической цепи (рис. 4.1)

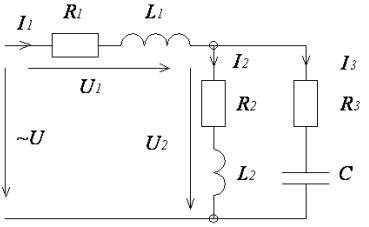


Рис. 4.1. Схема электрической цепи синусоидального тока со смешанным соединением приемников

$U = 260$ В,	$f = 50$ Гц,
$R_1 = 6$ Ом,	$R_2 = 10$ Ом,
$R_3 = 10$ Ом,	$L_1 = 57{,}33$ мГн,
$L_2 = 95{,}55$ мГн,	$C = 79{,}6$ мкФ.

Определить токи и напряжения в ветвях цепи, рассчитать мощность на входе цепи по формуле $P = UI\cos\varphi$, проверить полученный результат по закону Джоуля-Ленца.

Решение

1. Указываем направления токов и напряжений в ветвях.
2. Рассчитываем индуктивное и емкостное сопротивления.

Угловая частота заданного синусоидального напряжения

$$\omega = 2\pi f = 314 \text{ рад/с}.$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 314 \times 57{,}33 \times 10^{-3} = 18 \text{ Ом},$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 314 \cdot 95{,}55 \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 79{,}6 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом}.$$

3. Записываем комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 6 + j18 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = 10 + j30 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = 10 - j40 \text{ Ом}.$$

4. Рассчитываем эквивалентное сопротивление цепи по отношению к входным зажимам.

Сопротивления $\underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_3$ соединены параллельно:

$$\underline{Z}_{2,3} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(10 + j30)(10 - j40)}{20 - j10} = \frac{(1300 - j100)(20 + j10)}{20^2 + 10^2} = 54 + j22 \text{ Ом}.$$

Сопротивления $\underline{Z}_1$ и $\underline{Z}_{2,3}$ соединены последовательно:

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{2,3} = 6 + j18 + 54 + j22 = 60 + j40 \text{ Ом}.$$

5. Рассчитываем токи и напряжения в ветвях цепи.

Ток на входе цепи определяем по закону Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \frac{260}{60 + j40} = \frac{260 \cdot (60 - j40)}{60^2 + 40^2} = 3 - j2 \text{ А}.$$

Действующее значение тока $I_1 = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}6 \text{ А}.$

Напряжение U_2 на участке цепи с параллельным соединением ветвей можно найти двумя способами:

а) по второму закону Кирхгофа для левого контура электрической цепи:

$0 = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 - \dot{U}$. Следовательно, $\dot{U}_2 = \dot{U} - \dot{U}_1$,

где $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 = (3 - j2)(6 + j18) = 54 + j42$ В.

$\dot{U}_2 = 260 - (54 + j42) = 206 - j42$ В.

б) по закону Ома $\dot{U}_2 = \dot{I}_1 \underline{Z}_{23} = (3 - j2)(54 + j22) = 206 - j42$ В.

Действующее значение напряжения $U_2 = \sqrt{206^2 + 42^2} = 210{,}2$ В.

Действующее значение напряжения $U_1 = \sqrt{54^2 + 42^2} = 68{,}4$ В.

Токи в параллельных ветвях находим по закону Ома

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{206 - j42}{10 + j30} = \frac{(206 - j42)(10 - j30)}{10^2 + 30^2} = 0{,}8 - j6{,}6 \text{ А}.$$

Действующее значение тока $I_2 = \sqrt{0{,}8^2 + 6{,}6^2} = 6{,}65 \text{ А}.$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{206 - j42}{10 - j40} = \frac{(206 - j42)(10 + j40)}{10^2 + 40^2} = 2{,}2 + j4{,}6 \text{ А}.$$

Действующее значение тока $I_3 = \sqrt{2,2^2 + 4,6^2} = 5,1$ А.

Проверка по первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0,8 - j6,6 + 2,2 + j4,6 = 3 - j2 \text{ А}.$$

6. Рассчитываем активную мощность цепи по формуле

$$P = UI_1 \cos\varphi .$$

Угол φ – сдвиг тока по фазе относительно напряжения на входе цепи. Его можно определить, пользуясь эквивалентным сопротивлением цепи:

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = 60 + j40 \text{ Ом}.$$

В этом выражении $R_{\text{экв}}$= 60 Ом; $X_{\text{экв}}$= 40 Ом.

Из прямоугольного треугольника сопротивлений (рис. 4.2):

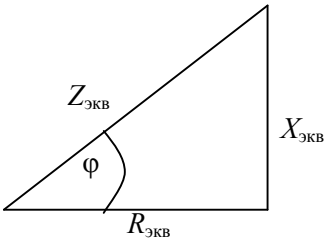


Рис. 4.2. Пояснение к определению угла сдвига фаз φ

$$\varphi = \text{arctg}\frac{X_{\text{экв}}}{R_{\text{экв}}} = \text{arctg}\frac{40}{60} = 33,7^{\circ}.$$

$$\cos\varphi = \frac{R_{\text{экв}}}{Z_{\text{экв}}} = \frac{60}{\sqrt{60^2 + 40^2}} = 0,832.$$

Следовательно, $P = 260 \cdot 3,6 \cdot 0,832 = 778,7$ Вт.

Рассчитываем активную мощность по закону Джоуля–Ленца:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 3,6^2 \cdot 2 + 6,65^2 \cdot 10 + 5,1^2 \cdot 10 = 780 \approx 778,7 \text{ Вт}.$$

Мощность и токи цепи рассчитаны правильно.

5. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

5.1. Теоретическая часть

Схема трехфазной цепи при соединении генератора и приемника звездой представлена на рисунке 5.1.

Пусть $\underline{Z}_N = 0$, тогда $\dot{U}_{AN1} = \dot{U}_A$; $\dot{U}_{BN1} = \dot{U}_B$; $\dot{U}_{CN1} = \dot{U}_C$.

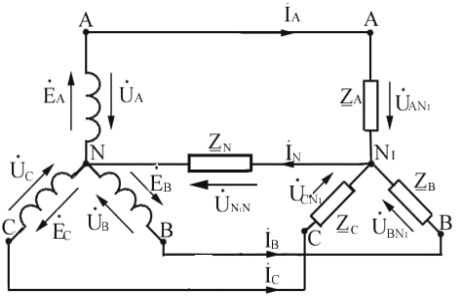


Рис. 5.1. Схема соединения трехфазной цепи звездой

Как правило, при симметричной нагрузке ток определяют в одной из фаз, например, в фазе *A*:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A}.$$

Тогда токи в других фазах:

$$\dot{I}_B = I_A \cdot e^{-j120^0}; \quad \dot{I}_C = I_A \cdot e^{+j120^0}.$$

Ток в нейтральном проводе, согласно первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_A\left(1 + e^{-j120^0} + e^{+j120^0}\right) =$$

$$= \dot{I}_A(1 - 0{,}5 - j0{,}865 - 0{,}5 + j0{,}865) = 0.$$

Так как ток в нейтральном проводе равен нулю, то при симметричном режиме, как правило, нейтральный провод отсутствует. Методика расчета цепи при этом остается такой же.

Активную, реактивную и полную мощности симметричной трехфазной цепи определяют по формулам:

$$P = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \cos\varphi = \sqrt{3}\, U_{Л} I_{Л} \cos\varphi,$$
$$Q = 3U_{\Phi} I_{\Phi} \sin\varphi = \sqrt{3}\, U_{Л} I_{Л} \sin\varphi,$$
$$S = 3U_{\Phi} I_{\Phi} = \sqrt{3} U_{Л} I_{Л} = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

где $U_{\Phi,}\ I_{\Phi}$ – фазное напряжение и фазный ток;

$U_{л}, I_{л}$ – линейное напряжение и линейный ток;

$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{X_A}{R_A}$ – угол сдвига между фазным напряжением и фазным током.

Несимметричный режим: $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$.

а) $\underline{Z}_N = 0.$ Фазные напряжения приемника равны фазным напряжениям генератора.

Токи в фазах находят по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{U_A \cdot e^{-j120^0}}{\underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{U_A \cdot e^{+j120^0}}{\underline{Z}_C}.$$

Ток в нейтральном проводе определяют по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Углы сдвига фаз определяются параметрами нагрузок фаз:

$$\varphi_A = \operatorname{arctg} \frac{X_A}{R_A};\ \varphi_B = \operatorname{arctg} \frac{X_B}{R_B};\ \varphi_C = \operatorname{arctg} \frac{X_C}{R_C}.$$

б) $\underline{Z}_N \neq 0$.

Согласно методу двух узлов напряжение между нейтральными точками потребителя и генератора

$$\dot{U}_{N1N} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \qquad (1.1)$$

где $\underline{Y}_A$, $\underline{Y}_B$, $\underline{Y}_C$, $\underline{Y}_N$ – соответственно комплексные проводимости фаз и нейтрального провода

Напряжения на фазах потребителя находят по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_{AN1} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N1N}; \quad \dot{U}_{BN1} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N1N}; \quad \dot{U}_{CN1} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N1N}.$$

Токи в фазах и в нейтральном проводе находят по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN1}}{\underline{Z}_A}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN1}}{\underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN1}}{\underline{Z}_C}; \quad \dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{N1N}}{\underline{Z}_N}.$$

По первому закону Кирхгофа $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$.

При отсутствии нейтрального провода $(\underline{Z}_N = \infty)$ расчеты ведут аналогично, приняв в формуле (1.1) $\underline{Y}_N = 0$.

Активную, реактивную и полную мощности несимметричной трехфазной цепи определяют по формулам:

$$P = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos\varphi_A + U_B I_B \cos\varphi_B + U_C I_C \cos\varphi_C;$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C = U_A I_A \sin\varphi_A + U_B I_B \sin\varphi_B + U_C I_C \sin\varphi_C;$$

где $\varphi_A = \psi_{uA} - \psi_{iA}$; $\varphi_B = \psi_{uB} - \psi_{iB}$; $\varphi_C = \psi_{uC} - \psi_{iC}$ $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$.

В данном случае удобно использовать комплексную мощность:

$$\underline{S} = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C = \dot{U}_A \overset{*}{\dot{I}}_A + \dot{U}_B \overset{*}{\dot{I}}_B + U_C \overset{*}{\dot{I}}_C = P + jQ.$$

При заданных параметрах приемника активную мощность P можно найти по закону Джоуля–Ленца:

$$P = I_A^2 R_A + I_B^2 R_B + I_C^2 R_C + I_N^2 R_N.$$

Схема трехфазной цепи при соединении генератора и приемника треугольником приведена на рисунке 5.2.

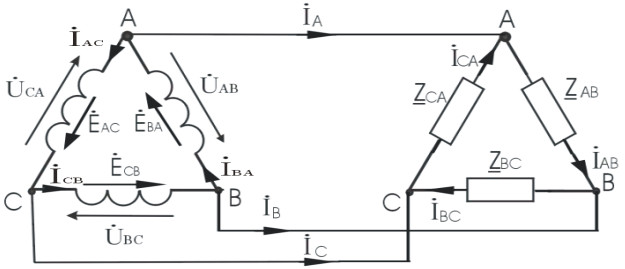


Рис. 5.2. Схема соединения трехфазной цепи треугольником

При соединении обмоток генератора треугольником линейное напряжение равно фазному $U_Л = U_Ф$.

Комплексные линейные токи определяют через комплексные фазные токи по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA};\ \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB};\ \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

Симметричный режим.

Комплексные сопротивления фаз приемника одинаковые:

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA}.$$

Как правило, при симметричной нагрузке определяют ток в одной из фаз, например, в фазе *AB*:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}.$$

Тогда токи в других фазах

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB}\, e^{-j120^\circ};\qquad \dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB}\, e^{j120^\circ}.$$

Углы сдвига фаз

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CA} = \operatorname{arctg}\frac{X_{AB}}{R_{AB}},$$

где R_{AB} и X_{AB} – активная и реактивная составляющие комплексного сопротивления фазы потребителя.

Линейный ток при симметричном режиме $I_Л = \sqrt{3}\, I_Ф$, в комплексной форме $\dot{I}_A = \sqrt{3}\,\dot{I}_{AB}\, e^{-j30^\circ}$.

Активную, реактивную и полную мощности симметричной трехфазной цепи определяют по формулам:

$$P = 3U_Ф I_Ф \cos\varphi = \sqrt{3}\, U_Л I_Л \cos\varphi;$$

$$Q = 3U_Ф I_Ф \sin\varphi = \sqrt{3}\, U_Л I_Л \sin\varphi;$$

$$S = 3U_Ф I_Ф = \sqrt{3}\, U_Л I_Л; \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Несимметричный режим.

Комплексные сопротивления фаз приемника различные, то есть

$$\underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BC} \neq \underline{Z}_{CA}.$$

Токи в фазах потребителя не равны друг другу:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \qquad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \qquad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}$$

и имеют различные углы сдвига относительно своих напряжений

$$\varphi_{AB} = \operatorname{arctg}\frac{X_{AB}}{R_{AB}}; \qquad \varphi_{BC} = \operatorname{arctg}\frac{X_{BC}}{R_{BC}}; \qquad \varphi_{CA} = \operatorname{arctg}\frac{X_{CA}}{R_{CA}}.$$

Комплексные линейные токи находят как разность соответствующих комплексных фазных токов

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{AC}.$$

Активную, реактивную и полную мощности несимметричного трехфазного приемника определяют по формулам:

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = U_{AB} I_{AB} \cos\varphi_{AB} + U_{BC} I_{BC} \cos\varphi_{BC} + U_{CA} I_{CA} \cos\varphi_{CA}$$

.

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = U_{AB} I_{AB} \sin\varphi_{AB} + U_{BC} I_{BC} \sin\varphi_{BC} + U_{CA} I_{CA} \sin\varphi_{CA}.$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

5.2. Примеры решения задач

Задача 5.1. Определить токи и мощность P в трехфазной цепи (рис. 5.1), если линейное напряжение $U_{Л} = 380\,\text{В}$, сопротивления фаз $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = 4 + j3$ Ом, нейтральный провод отсутствует, т. е. $\underline{Z}_N = \infty$. Построить векторные диаграммы напряжений и токов.

Решение. Так как режим работы симметричный, то фазные напряжения

$$U_{Ф} = \frac{U_{Л}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{3} = 220\,\text{В}; \quad \dot{U}_A = 220\,\text{В}; \quad \dot{U}_B = 220 \cdot e^{-j120^0}\ \text{В};$$

$$\dot{U}_C = 220 \cdot e^{j120^0}\ \text{В}.$$

По закону Ома ток фазы A

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{220}{4 + j3} = 35,2 - j26,4 = 44 \cdot e^{-j37^0}\ \text{А}.$$

Угол сдвига фаз $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - \left(-37^0\right) = 37^0$.

Токи двух других фаз записываются следующим образом:

$$\dot{I}_B = I_A e^{-j120^0} = 44 \cdot e^{-j37^0} \cdot e^{-j120^0} = 44 \cdot e^{-j157^0}\ \text{А},$$

$$\dot{I}_C = I_A e^{j120^0} = 44 \cdot e^{-j37^0} \cdot e^{j120^0} = 44 \cdot e^{j83^0}\ \text{А}.$$

Мощность $P = 3U_{ф} I_{ф} \cos\varphi = 3 \cdot 220 \cdot 44 \cos 37^0 = 23192$ Вт.

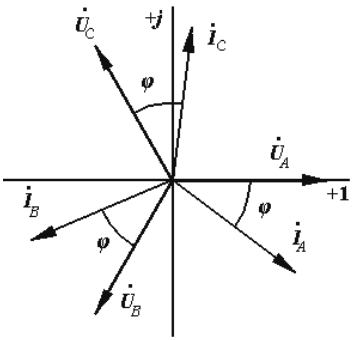


Рис. 5.3. Векторная диаграмма напряжений и токов

Выбираем масштаб $m_U = 100$ В/см, $m_I = 20$ А/см и строим векторную диаграмму (рис. 5.3).

Задача 5.2. Определить токи и мощность P в трехфазной цепи (рис. 5.1), если фазное напряжение генератора $U_\Phi = 220$ В, сопротивления фаз потребителя $\underline{Z}_A = 10$ Ом, $\underline{Z}_B = j10$ Ом, $\underline{Z}_C = -j10$ Ом, сопротивление нейтрального провода: а) $\underline{Z}_N = 0$; б) $\underline{Z}_N = 10$ Ом.

Решение. Если $\underline{Z}_N = 0$, то напряжения генератора равны напряжениям потребителя:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{AN1} = U_\Phi = 220 \text{ В};$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_{BN1} = \dot{U}_A e^{-j120^0} = 220(-0{,}5 - j\,0{,}866) = -110 - j190 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{CN1} = \dot{U}_A e^{j120^0} = 220(-0{,}5 + j\,0{,}866) = -110 + j190 \text{ В}.$$

Токи в фазах потребителя находим по закону Ома:

$\dot{I}_A = \dfrac{\dot{U}_{AN1}}{\underline{Z}_A} = \dfrac{220}{10} = 22$ А, действующее значение $I_A = 22$ А;

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN1}}{\underline{Z}_B} = \frac{-110 - j190}{j10} = -19 + j11 \text{ А}, \quad I_B = \sqrt{19^2 + 11^2} = 22 \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN1}}{\underline{Z}_C} = \frac{-110 + j190}{-j10} = -19 - j11 \text{ А}, \quad I_C = \sqrt{19^2 + 11^2} = 22 \text{ А}.$$

Ток в нейтральном проводе:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 22 - 19 + j11 - 19 - j11 = -16 \text{ А}; \quad I_N = 16 \text{ А}.$$

Мощность по закону Джоуля-Ленца:

$$P = I_A^2 R_A + I_B^2 R_B + I_C^2 R_C + I_N^2 R_N = 22^2 \cdot 10 = 4840 \text{ Вт}.$$

Если $\underline{Z}_N$ = 10 Ом. Так как нейтральный провод имеет сопротивление и нагрузка несимметричная, то напряжения на фазах потребителя будут различными. Напряжение между нейтральными точками потребителя и генератора:

$$\dot{U}_{N1N} = \frac{\dot{U}_A Y_A + \dot{U}_B Y_B + \dot{U}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} =$$

$$= \frac{220\ \frac{1}{10} + (-110\ -\ j190\ )\frac{1}{j10} + (-110\ +\ j190\ )\frac{1}{(-j10\ )}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{j10} - \frac{1}{j10} + \frac{1}{10}} = -80\ \text{В}.$$

Фазные напряжения потребителя:

$$\dot{U}_{AN1} = \dot{U}_A - \dot{U}_{N1N} = 220 + 80 = 300\ \text{В};$$

$$\dot{U}_{BN1} = \dot{U}_B - \dot{U}_{N1N} = -110 - j190 + 80 = -30 - j190\ \text{В};$$

$$\dot{U}_{CN1} = \dot{U}_C - \dot{U}_{N1N} = -110 + j190 + 80 = -30 + j190\ \text{В}.$$

Действующие значения фазных напряжений:

$$U_{AN1} = 300\ \text{В};\quad U_{BN1} = \sqrt{30^2 + 190^2} = 192{,}4\ \text{В};$$

$$U_{CN1} = \sqrt{30^2 + 190^2} = 192{,}4\ \text{В}.$$

Токи в фазах потребителя:

$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_{AN1}}{\underline{Z}_A} = \frac{300}{10} = 30$ А, действующее значение $I_A = 30$ А;

$$\dot{I}_B = \frac{\dot{U}_{BN1}}{\underline{Z}_B} = \frac{-30 - j190}{j10} = -19 + j3\ \text{А};\quad I_B = \sqrt{19^2 + 3^2} = 19{,}2\ \text{А};$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CN1}}{\underline{Z}_C} = \frac{-30 + j190}{-j10} = -19 - j3\ \text{А}.\quad I_C = \sqrt{19^2 + 3}^2 = 19{,}2\ \text{А}.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{N_1N}}{Z_N} = -\frac{80}{10} = -8\ \text{А},\ I_N = 8\ \text{А}.$$

Проверка: $\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C;\ \ 30 - 19 + j3 - 19 - j3 = -8$.

Мощность $P = I_A^2 R_A + I_N^2 R_N = 30^2 \cdot 10 + 8^2 \cdot 10 = 9640$ Вт.

6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ТОКАМИ

6.1. Теоретическая часть

Расчет токов в цепях при действии несинусоидальных периодических напряжений и токов производится следующим образом.

1. Несинусоидальные периодические ЭДС, ток, напряжение и другие величины разлагаются в ряд Фурье. Например, источник несинусоидальной периодической ЭДС представляют в виде последовательного соединения ряда источников с синусоидальными ЭДС и источника постоянной ЭДС.

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_k + \ldots.$$

где $e_0 = E_0$ – постоянная составляющая ЭДС (нулевая гармоника);

$E_k = E_{km}\sin(k\omega + \psi_k)$ – синусоидальная составляющая ЭДС (k – гармоника).

2. Используя принцип наложения, рассчитывают токи в цепи от каждой ЭДС в отдельности. Ток постоянной составляющей рассчитывается методом расчета цепей постоянного тока. При этом имеют в виду, что индуктивность L не оказывает сопротивления постоянному току, а емкость C представляет бесконечно большое сопротивление постоянному току. Расчет токов от первой и последующих гармоник производится методом расчета синусоидальных цепей. Здесь уместно использовать комплексный метод. При этом индуктивные и емкостные сопротивления для k-й гармоники равны соответственно $k\omega_1 L$ и $\dfrac{1}{k\omega_1 C}$, где ω_1 – угловая частота 1-й гармоники.

В простейшем случае неразветвленной RLC цепи сопротивление для тока k-й гармоники равно $\underline{Z}_k = R + j(k\omega_1 L - \dfrac{1}{k\omega_1 C})$.

Результирующее мгновенное значение тока в цепи будет равно сумме мгновенных значений составляющих

$$i = i_0 + i_1 + i_2 + \ldots = I_0 + \sum_1^{\infty} I_{km}\sin(k\omega_1 t + \psi_k - \varphi_k).$$

3. Действующее значение результирующего тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + ... + I_k^2 + ...},$$

где I_k – действующее значение тока k -й гармоники;

I_0 – постоянный ток.

Аналогично находятся действующие значения напряжения, ЭДС и других периодических несинусоидальных величин.

4. Мощность при несинусоидальных ЭДС равна сумме мощностей отдельных гармоник

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + ... + P_k + ... = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + ... + \\ + U_k I_k \cos\varphi_k + ...$$

6.2. Примеры решения задач

Задача 6.1. Пусть нужно определить действующее значение несинусоидального напряжения, заданного следующим выражением:

$$u(t) = 100 + 80\sin(\omega t + 30^\circ) + 60\sin(3\omega t + 20^\circ) + 50\sin(5\omega t + 45^\circ).$$

Решение. Анализ заданного в виде тригонометрического ряда напряжения показывает, что это выражение содержит нулевую, первую, третью и пятую гармоники. Тогда действующее значение напряжения

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{100^2 + \left(\frac{80}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} = 127 \text{ В}.$$

Задача 6.2. В приведенной на рис. 6.1 электрической цепи $u = 30 + 100\sin\omega_1 t + 40\sin(3\omega_1 t + 20°)$ В; R_1 = 6 Ом; R_2 = 5 Ом; R_3 =20 Ом; $\omega_1 L = 12$ Ом; $\dfrac{1}{\omega_1 C} = 30$ Ом.

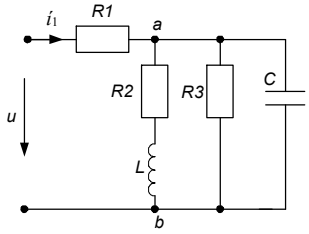


Рис. 6.1

Определить действующее значение тока в неразветвленной части.

Решение. Расчет тока нулевой гармоники:

$$R_{(0)} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом},$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_{(0)}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А}.$$

Расчет тока первой гармоники:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ав(1)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(1)}},$$

$$\underline{Z}_{ав(1)} = \frac{\underline{Z}_{2(1)}\underline{Z}_{3(1)}\underline{Z}_{4(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}\underline{Z}_{3(1)} + \underline{Z}_{2(1)}\underline{Z}_{4(1)} + \underline{Z}_{3(1)}\underline{Z}_{4(1)}} =$$

$$= \frac{(5 + j12)20 \cdot (-j30)}{(5 + j12)20 + (5 + j12)(-j30) + 20(-j30)} =$$

$$10{,}25 + j4{,}83 = 11{,}4 e^{j25^0 30'} \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{(1)} = \underline{Z}_{1(1)} + \underline{Z}_{ав(1)} = 6 + 10{,}25 + j4{,}83 = 16{,}25 + j4{,}83 = 17 e^{j16^0 30'} \text{ Ом}.$$

$$\dot{I}_{m1(1)} = \frac{\dot{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{100}{17 e^{j16^0 30'}} = 5{,}88 \, \mathrm{e}^{-j16°30'} \text{ А},$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{I}_{m1}}{\sqrt{2}} = 4{,}17 \mathrm{e}^{-j16°30'} \text{ А}.$$

Расчет тока третьей гармоники:

$$\underline{Z}_{1(3)} = R_1 = 6 \text{ Ом.} \quad \underline{Z}_{3(3)} = R_3 = 20 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega_1 L = (5 + j36) \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{4(3)} = -\frac{j}{3\omega_1 C} = -j10 \text{ Ом.}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ав(3)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(3)}},$$

$$\underline{Z}_{\text{ав}(3)} = \frac{\underline{Z}_{2(3)}\underline{Z}_{3(3)}\underline{Z}_{4(3)}}{\underline{Z}_{2(3)}\underline{Z}_{3(3)} + \underline{Z}_{2(3)}\underline{Z}_{4(3)} + \underline{Z}_{3(3)}\underline{Z}_{4(3)}} =$$

$$=$$

$$\frac{(5+j36)20\cdot(-j10)}{(5+j36)20+(5+j36)(-j10)+20(-j10)} = 6,56 - j8,9 = 11,05\text{e}^{-j53^0 35'} \text{Ом.}$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \underline{Z}_{ав(3)} =$$

$$= 6 + 6,56 - j8,9 = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35°5'} \text{Ом.}$$

$$\dot{I}_{m1(3)} = \frac{\dot{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{40e^{j20^0}}{15,35e^{-j35^0 5'}} = 2,6\ \text{e}^{j55^0 5'} \text{А},$$

$$\dot{I}_{1(3)} = \frac{\dot{I}_{1m(3)}}{\sqrt{2}} = 1,84e^{j55^0 5'} \text{А.}$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{3^2 + 4,17^2 + 1,84^2} = 5,45 \text{ А.}$$

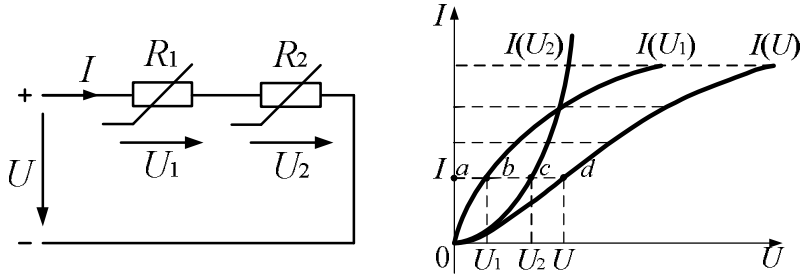
7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

7.1. Теоретическая часть

Нелинейные электрические цепи постоянного тока при последовательном, параллельном соединении рассчитывают, как правило, графическим методом. Сущность графического метода расчета простых нелинейных электрических цепей постоянного тока состоит в построении результирующих вольт-амперных характеристик (ВАХ) участков цепи с последовательным или параллельным соединением элементов на основании уравнений, составленных по законам Кирхгофа. Метод является приближенным, поэтому от аккуратности и точности графических построений зависит точность решения задачи, результат которого проверяется по законам Кирхгофа.

Рассмотрим схему электрической цепи с последовательным соединением нелинейных резисторов (рис. 7.1, *а*). Заданы вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов $I(U_1)$ и $I(U_2)$. Требуется определить ток I, падения напряжений U_1 и U_2, если известно напряжение питания U.

Поскольку задано напряжение U на входе цепи, то для определения тока в цепи необходимо построить результирующую вольт-амперную характеристику всей цепи $I(U)$. Построение результирующей ВАХ равносильно замене нескольких нелинейных резисторов одним эквивалентным с ВАХ $I(U)$.



а) *б*)

Рис. 7.1. Схема электрической цепи (*а*) и графическое построение результирующей ВАХ (*б*) при последовательном соединении нелинейных резисторов

При этом руководствуются законами Кирхгофа. В схеме (рис. 7.1, *а*) через все элементы проходит один и тот же ток *I*, а напряжение на входе цепи в соответствии со вторым законом Кирхгофа определяется по выражению

$$U = U_1 + U_2 . \qquad (7.1)$$

Результирующую ВАХ строят, используя уравнение (7.1). Для этого задаются произвольным значением тока *I* (точка *а* на рисунке 7.1, *б*), проводят горизонтальную линию до пересечения с вольт-амперными характеристиками нелинейных элементов и находят соответствующие напряжения U_1 и U_2, а также их сумму по выражению (7.1). Полученное напряжение будет соответствовать выбранному току, а точка *d* с координатами *I, U* будет принадлежать результирующей характеристике *I (U*). Сложение напряжений можно выполнить графически, складывая отрезки линий, соответствующие напряжениям U_1 и U_2 (рисунок 7.1, *б*):

$$ab + ac = ad .$$

Точка *d* будет одной из точек результирующей ВАХ. Аналогично, задаваясь рядом значений тока *I*, определяют другие точки, соединяют их плавной кривой и получают результирующую ВАХ цепи. По заданному напряжению *U* находят искомый ток *I* , используя ВАХ *I* (*U*). Затем по значению тока *I* и характеристикам *I* (U_1) и *I* (U_2) находят напряжения U_1 и U_2. Результат проверяют по выражению (7.1), при неточности корректируют решение.

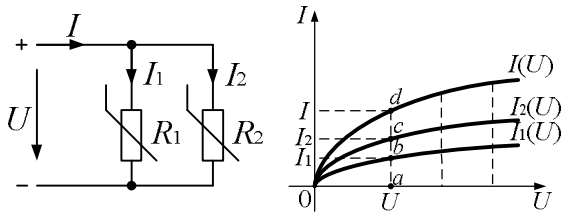
Аналогично рассчитывают цепи при последовательном соединении трех и большего числа нелинейных резисторов. Если в цепи имеются линейные резисторы, то их ВАХ строят на основании закона Ома.

Параллельное соединение. Пусть в схеме электрической цепи (рис. 7.2, *а*) заданы вольт-амперные характеристики нелинейных резисторов $I_1(U); I_2(U)$, а также ток *I* на входе цепи. Требуется определить напряжение питания U , токи I_1 и I_2 .

При построении результирующей ВАХ исходят из того, что напряжение на обоих нелинейных резисторах одинаково, а ток в неразветвленной части схемы находят по первому закону Кирхгофа.

Поскольку известен ток I на неразветвленном участке цепи, то для определения напряжения U на входе цепи, необходимо построить результирующую ВАХ $I(U)$, для чего:

1. Задаются произвольным значением напряжения U. По ВАХ $I_1(U)$ и $I_2(U)$ определяют соответствующие значения I_1 (отрезок ab) и I_2 (отрезок ac) (рис. 7.2, *б*).



а) *б*)

Рис. 7.2. Схема электрической цепи (*а*) и графическое построение результирующей ВАХ (*б*) при параллельном соединении нелинейных резисторов

2. Суммируют эти токи в соответствии с первым законом Кирхгофа и получают значение тока на неразветвленном участке цепи:

$$I_1 + I_2 = I, \qquad ab + ac = ad.$$

Точка d будет принадлежать результирующей ВАХ $I(U)$ (рис. 17.5, *б*).

3. Аналогично, задаваясь другими значениями напряжения U, определяют нужное количество точек ВАХ $I(U)$, которые соединяют плавной кривой (рисунок 7.2, *б*).

4. По заданному значению тока I и результирующей ВАХ $I(U)$ определяют искомое напряжение U.

5. По этому значению напряжения с помощью заданных ВАХ $I_1(U)$ и $I_2(U)$ определяют I_1 и I_2.

7.2. Примеры решения задач

Задача 7.1. Двухполюсник состоит из последовательно включенных линейного резистора R_1 = 100 Ом и нелинейного резистора R_2 (рис. 7.3). ВАХ двухполюсника $I(U)$ задана (табл. 7.1).

Таблица 7.1

U, В	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
I, мА	0	1,2	3,5	6,4	9,4	12,3

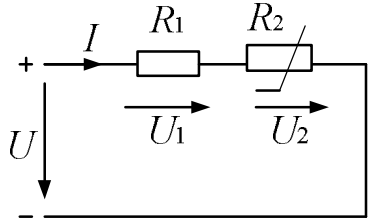


Рис. 7.3. Схема нелинейной цепи к примеру 7.1

Построить вольт-амперные характеристики $I(U_1)$, $I(U_2)$, $I(U)$. Определить напряжения U, U_1, U_2 при $I = 10$ мА.

Решение. Расчет проводим графическим методом. Построим ВАХ двухполюсника $I(U)$ (рис. 7.3) на основании данных табл. 7.1. Чтобы построить ВАХ линейного резистора $I(U_1)$, необходимо иметь хотя бы две точки. Зададимся произвольно значением тока, протекающего по резистору.

Пусть $I = 8$ мА $= 8 \cdot 10^{-3}$ А.

Тогда $U_1 = IR = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0{,}8$ В.

По двум точкам с координатами 0; 0 и 8 мА; 0,8 В строим линейную характеристику $I(U_1)$ (рис. 7.4).

Для построения ВАХ нелинейного резистора R_2 необходимо произвести вычитание абсцисс ВАХ $I(U)$ и $I(U_1)$, соответствующих каждому произвольно принятому значению тока. Например, для тока $I = 10$ мА $ab = ad - ac$. Приняв другие значения тока, получим другие точки ВАХ $I(U_2)$.

По заданному току двухполюсника $I = 10$ мА проводим горизонтальную линию и на пересечении с ВАХ в точках b и d находим соответствующие напряжения, то есть $U_2 = 0{,}68$ В и $U = 1{,}68$ В.

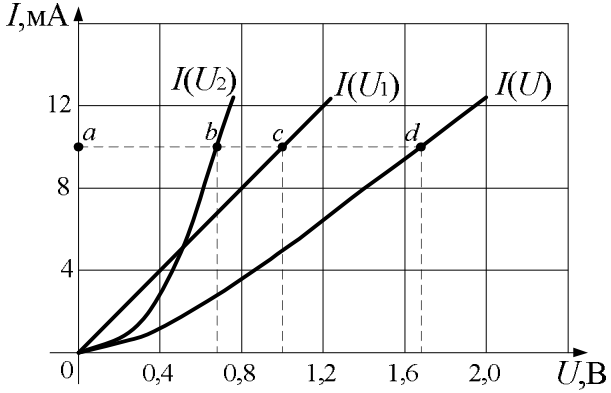


Рис. 7.4. Вольт-амперные характеристики нелинейной цепи

На основании второго закона Кирхгофа

$$U_2 = U - U_1 \cdot$$

По закону Ома

$$U_1 = RI = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1\,\text{В}.$$

Проверка: $U_1 + U_2 = U$; 1 + 0,68 = 1,68, то есть расчет выполнен правильно.

Задача 7.2. Два одинаковых нелинейных резистора R_1 и R_2 (рис. 7.5) включены параллельно. ВАХ нелинейного резистора задана (табл. 7.2).

Таблица 7.2

$I_1(U), I_2(U)$, А	0	0,4	0,5	0,6	0,7
U, В	0	3	5	8	10

Определить ток I в неразветвленной части цепи при напряжении $U = 8\,\text{В}$.

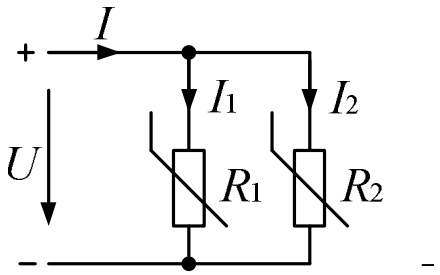


Рис. 7.5. Схема нелинейной цепи к примеру 7.2

Решение. Применяем графический метод расчета. Строим ВАХ нелинейных резисторов $I_1(U)$ (рис. 7.6) на основании данных табл. 7.2. ВАХ второго нелинейного резистора $I_2(U)$ совпадает с первой. Для получения результирующей ВАХ складываем при одном и том же напряжении характеристики каждого нелинейного резистора, т. е. удваиваем значение тока при одних и тех же значениях напряжения, т. к. ВАХ одинаковы. Например, для $U = 10\,\text{В}$ (точка *a* на рис. 7.6) $ab + ab = ad$. Аналогично и для других напряжений суммируем токи. Получаем результирующую ВАХ $I(U)$. Затем при напряжении $U = 8\,\text{В}$ находим ток $I = 1,2\,\text{А}$.

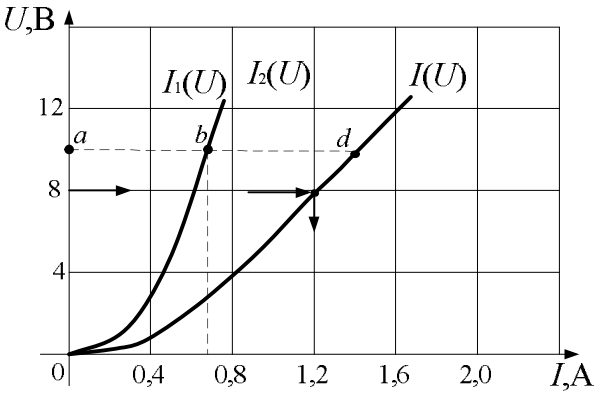


Рис. 7.6. Вольт-амперные характеристики нелинейной цепи

8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ ПОСТОЯННОГО ТОКА

8.1. Теоретическая часть

Расчет переходных процессов в неразветвленных электрических цепях состоит в решении дифференциального уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации.

Так как общее решение неоднородного дифференциального уравнения равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, то переходный ток равен сумме двух составляющих токов установившегося (принужденного) и свободного режимов

$$i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}}.$$

Расчет токов и напряжений установившегося режима в цепи после коммутации выполняют обычными методами, которые используют при анализе цепей постоянного и переменного токов. Следует помнить, что при действии в цепи источника постоянного напряжения в установившемся режиме ток через емкостной элемент C не идет, т. е. $i_{cy} = 0$ и падение напряжения на индуктивном элементе L при неизменном во времени токе равно нулю, т. е. $u_{Ly} = 0$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения первого порядка дает ток или напряжение свободного режима: $i_{\text{св}} = Ae^{pt}$, где A – постоянная интегрирования; p – корень характеристического уравнения.

Как известно из математики, характеристическое уравнение дифференциального уравнения n-го порядка составляют с помощью алгебраизации соответствующего однородного уравнения. Например, имеем уравнение вида

$$a_2 \frac{d^2 i}{dt^2} + a_1 \frac{di}{dt} + a_0 i = 0.$$

После замены символа дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на символ p получаем характеристическое уравнение

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Постоянную интегрирования A находят из начальных условий, т. е. путем подстановки в решение для переходного тока $i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}}$ значения времени $t = 0$ и значения тока $i(0)$ в момент коммутации: $i(0) = i_{\text{у}}(0) + A$.

Значения токов в индуктивных элементах и напряжений на емкостных элементах в момент коммутации определяют на основании двух законов коммутации из схемы до коммутации.

Первый закон коммутации. Ток в ветви с индуктивным элементом в момент коммутации сохраняет то значение, которое он имел непосредственно перед коммутацией, и затем он изменяется, начиная именно с этого значения:

$$i_L(0) = i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

Второй закон коммутации. Напряжение на емкостном элементе в момент коммутации сохраняет то значение, которое оно имело непосредственно перед коммутацией, затем изменяется, начиная именно с этого значения:

$$u_C(0) = u_C(0_+) = u_C(0_-).$$

Началом отсчета времени переходного процесса $t = 0$ является момент коммутации. Моменту времени $t = 0$ и $t = 0_+$ соответствует схема цепи после коммутации, а моменту времени $t = 0_-$ соответствует схема цепи до коммутации.

Значения токов через индуктивные элементы и напряжений на емкостных элементах в момент коммутации, определяемые на основании законов коммутации, называют независимыми начальными условиями.

Значения остальных токов и напряжений в момент коммутации определяют, используя независимые начальные условия, т. е. определяют токи и напряжения из уравнений Кирхгофа, составленных для цепи после коммутации. Поэтому их называют зависимыми начальными условиями.

Для неразветвленной электрической цепи характеристическое уравнение может иметь два корня, соответственно увеличивается число постоянных интегрирования. Методика расчета двух постоянных интегрирования рассмотрена в п. 6.2.

8.2. Примеры решения задач

Задача 8.1. Электрическая цепь (рис. 8.1) включается под постоянное напряжение. Определить переходный ток, если сопротивление резистора $R = 6$ Ом, индуктивность катушки L = 0,5 Гн, напряжение на входе $U = 30$ В.

Построить график изменения тока $i(t)$ в переходном режиме.

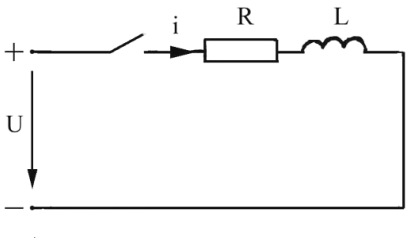


Рис. 8.1

Решение. Указываем в схеме цепи ток i после коммутации и составляем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$iR + L\frac{di}{dt} = U. \qquad (8.1)$$

Решение этого дифференциального уравнения записываем в виде суммы установившегося и свободного токов

$$i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}}. \qquad (8.2)$$

Установившийся ток определяем из расчета цепи в установившемся режиме: $i_{\text{у}} = \frac{U}{R} = \frac{30}{6} = 5$ А, так как индуктивный элемент при постоянном токе имеет сопротивление, равное нулю.

Свободный ток находим из общего решения однородного дифференциального уравнения, составленного из (8.1), заменив в нем $i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}}$ на $i = i_{\text{у}} + i_{\text{св}}$

$$i_{\text{св}}R + L\frac{di_{\text{св}}}{dt} = 0, \qquad i_{\text{св}} = Ae^{pt}.$$

Характеристическое уравнение получаем, заменяя $\frac{d}{dt}$ на p и учитывая $i_{\text{св}} \neq 0$.

$$R + Lp = 0, \text{ откуда } p = -\frac{R}{L} = -\frac{6}{0{,}5} = -12 \text{ с}^{-1}.$$

Выражение переходного тока принимает вид

$$i = 5 + Ae^{-12t}.$$

Постоянную интегрирования A найдем из начальных условий. Подставляем в выражение переходного тока (8.2) $t = 0$:

$$i(0) = 5 + A.$$

Переходный ток проходит через индуктивный элемент, следовательно, в момент коммутации он сохраняет значение, которое имел непосредственно до коммутации. В цепи до коммутации ток отсутствовал, поэтому $i(0_-) = 0 = i(0)$. Из уравнения переходного тока при $t = 0$

$$0 = 5 + A; \qquad A = -5.$$

Таким образом, ток цепи в переходном режиме будет равен

$$i = 5 - 5e^{-12t} \text{ А}.$$

Для построения графика переходного тока определим постоянную времени $\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R} = \frac{0{,}5}{6} = 0{,}0833 \text{ с}$. Практически переходный процесс заканчивается через $4...5\tau$. Составим таблицу (8.1) значений тока $i = 5\left(1 - e^{-12t}\right)$ А в различные моменты времени.

Таблица 8.1

t, с	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	∞
I, А	0	2,25	3,5	4,54	4,86	4,96	5

На рисунке 8.2 построена кривая изменения тока $i(t)$.

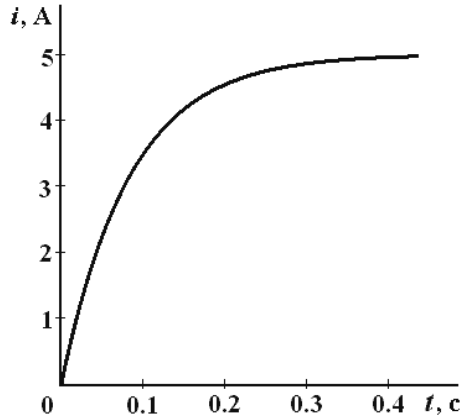


Рис. 8.2. Кривая изменения переходного тока

Задача 8.2. Найти переходные ток i и напряжение u_C в цепи (рис. 8.3) после коммутации, если $U = 220$ В, $R = 100$ Ом, $C = 100$ мкФ.

Построить графики $u_C(t)$, $i(t)$.

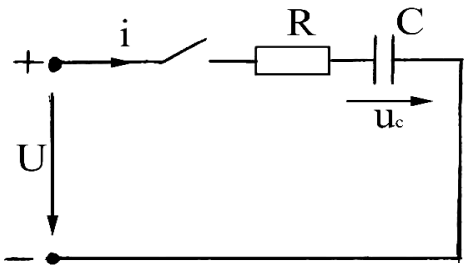


Рис. 8.3

Решение. Для схемы цепи после коммутации составляем уравнение по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме

$$iR + u_C = U.$$

Так как в уравнение вошли две неизвестные величины, подставим $i = C\dfrac{du_C}{dt}$, тогда

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U.$$

Решение этого уравнения в общем виде

$$u_C=u_{C\text{у}}+u_{C\text{св}}.$$

Установившееся напряжение $u_{C\text{у}}$ находим из расчета цепи в установившемся режиме. Так как при действии постоянного напряжения установившийся постоянный ток через конденсатор $i_{\text{у}}=0$, то из уравнения второго закона Кирхгофа видно, что $u_{C\text{у}}=U=220$ В.

Свободную составляющую переходного напряжения $u_{C\text{св}}$ находим из общего решения однородного уравнения

$$RC\frac{du_{C\text{ св}}}{dt}+u_{C\text{ св}}=0;\qquad u_{C\text{ св}}=Ae^{pt},$$

где p – корень характеристического уравнения

$$RCp+1=0;$$

$$p=-\frac{1}{RC}=-100\ \text{с}^{-1}.$$

Напряжение конденсатора в переходном режиме

$$u_C=220+Ae^{-100t}\ \text{В}.$$

Постоянную интегрирования A находим из начальных условий.

Подставим в выражение переходного напряжения $t=0$:

$$u_C(0)=220+A.$$

Так как цепь до коммутации была отключена, то по второму закону коммутации $u_C(0)=u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$. Подставляем в уравнение для определения постоянной интегрирования:

$$0=220+A;\qquad A=-220.$$

Тогда переходное напряжение на емкостном элементе

$$u_c = 220 - 220e^{-100t} \text{ В.}$$

Ток в цепи $i = C\dfrac{du_C}{dt} = C \cdot 220 \cdot 100e^{-100t} = 2{,}2e^{-100t}$ А.

Постоянная времени $\tau = RC = 0{,}01$ с.

Для построения графиков $u_c(t)$ и $i(t)$ составим таблицу 8.2.

Таблица 8.2

t, с	0	0,01	0,02	0,03	0,04	∞
u_c, В	0	139	190	209	216	220
i, А	2,2	0,81	0,3	0,11	0,04	0

Графики $u_c(t)$ и $i(t)$ показаны на рис. 8.4.

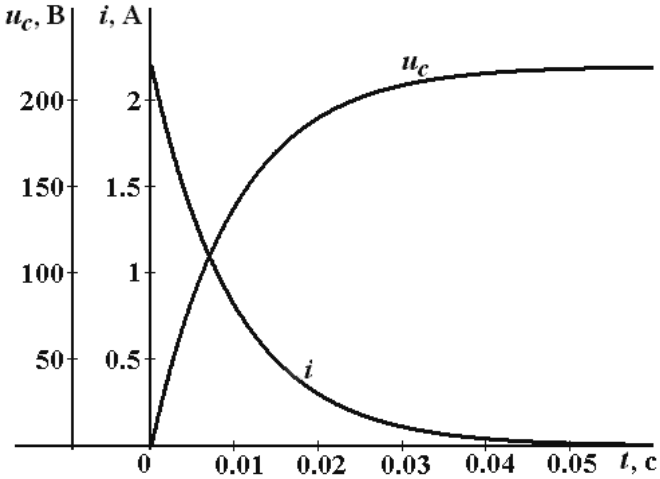


Рис. 8.4. Кривые изменения переходных значений напряжения и тока на конденсаторе

Задача 8.3. В цепи, приведенной на схеме (рис. 8.5), определить напряжение на конденсаторе и токи i_1, i_2, i_3 в момент коммутации. Конденсатор до коммутации не был заряжен. В расчетах принять $U = 220$ В, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн, $C = 100$ мкФ.

Решение. Так как до коммутации правая ветвь цепи была разомкнута, то ток протекал через резисторы R_1, R_2 и катушку индуктивности ($i_1 = i_2$).

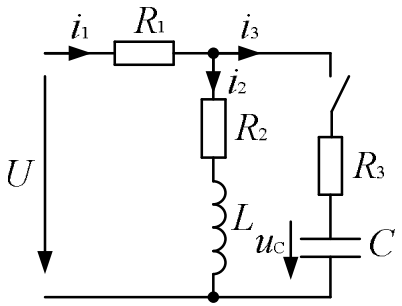


Рис. 8.5

В соответствии с первым и вторым законами коммутации запишем

$$i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{220}{10 + 10} = 11 \text{ А},$$

$$u_C(0) = 0.$$

Для внешнего контура схемы после коммутации имеет место следующее выражение в момент времени $t = 0$:

$$R_1\left[i_2(0) + i_3(0)\right] + R_3 i_3(0) + u_C(0) = U.$$

Тогда $i_3(0) = \dfrac{U - R_1(0) i_2(0)}{R_1 + R_2} = \dfrac{220 - 10 \cdot 11}{10 + 10} = 5{,}5$ А и, согласно первому закону Кирхгофа, $i_1(0) = i_2(0) + i_3(0) = 11 + 5{,}5 = 16{,}5$ А.

ПРИМЕРНОЕ ЗАДАНИЕ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ (С РЕШЕНИЕМ)

1. К источнику постоянного напряжения подключен резистор с сопротивлением $R = 25$ Ом, напряжение на зажимах которого $U_R = 50$ В. Напряжение источника без нагрузки $U_x = 56$ В. Определите внутреннее сопротивление источника (Ом).

2. Определите мощность (Вт), потребляемую двумя последовательно соединенными резисторами с сопротивлением $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 7$ Ом и подключенными к источнику постоянного напряжения с $U = 110$ В.

3. Определите действующее значение тока в цепи (А) с последовательно соединенным резистором $R = 4$ Ом и конденсатором, реактивное сопротивление которого $X_C = 3$ Ом. К электрической цепи приложено синусоидальное напряжение $U = 25$ В.

4. Мгновенное значение тока задано уравнением $i = 28{,}2\sin(314t + \pi)$ А. Определите частоту тока f (Гц).

5. Найти напряжение U_{ab} (см. схему цепи на рисунке 1), если $E_1 = 100$ В; $E_2 = 120$ В; $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 2$ Ом.

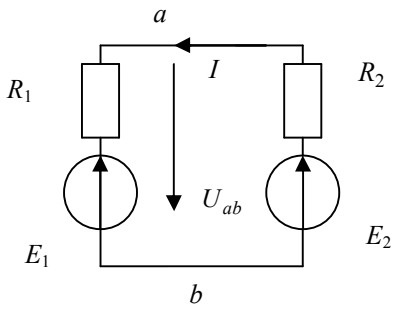


Рис. 1. Схема электрической цепи с параллельным соединением ветвей

6. Симметричный приемник и генератор соединены по схеме «треугольник». Фазный ток приемника $I_ф = \sqrt{3}$ А. Чему равен линейный ток приемника?

7. В цепи переменного тока с последовательным соединением элементов R и L измерены напряжение на входе $U = 100$ В, ток

$I = 5$ А, мощность P = 300 Вт. Определите эквивалентное сопротивление $X_Э$ (Ом).

8. Плоский воздушный конденсатор обладает электрической емкостью 10 пФ. Между электродами конденсатора поместили парафин, для которого относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_r = 2$. Определите, какой величины стала емкость конденсатора. Ответ дайте в пикофарадах.

9. Прямолинейный проводник длиной 0,5 м с током 2 А расположен в однородном магнитном поле под углом 90° к линиям магнитной индукции. Определите магнитную индукцию B (Тл) поля, если оно действует на проводник с силой 1 Н.

10. В электрической цепи (рис. 2) известно: R_1 = 20 Ом, R_2 = 30 Ом, C = 100 мкФ. До какого напряжения надо предварительно зарядить конденсатор, чтобы в цепи при подключении к источнику постоянного напряжения с U = 220 В сразу наступил установившийся режим?

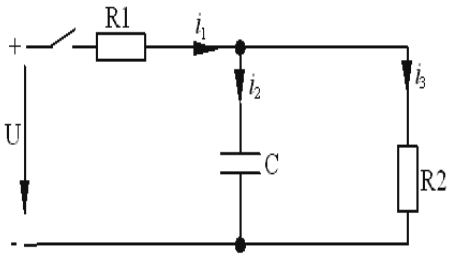


Рис. 2. Схема электрической цепи до коммутации

Решение

Задача 1. Дано: $U_R = 50$ В; $U_x = 56$ В; $R = 56$ Ом.

$R_{\text{вт}} - ?$

ЭДС источника с нагрузкой определяется выражением:

$$E = I(R + R_{\text{вт}}), \qquad (1)$$

где $R_{\text{вт}}$ – внутреннее сопротивление источника.

Ток $I = \frac{U_R}{R} = \frac{50}{25} = 2\,\text{А}$. ЭДС источника E без нагрузки равна напряжению $U_x = 56$ В. Подставляем в уравнение (1) соответствующие значения и получаем:

$$56 = 2(25 + R_{\text{вт}}),$$

откуда

$$R_{\text{вт}} = \frac{56 - 50}{2} = 3\,\text{Ом}.$$

Ответ: 3 Ом.

Задача 2. Дано: $U = 110$ В; $R_1 = 4$ Ом; $R_2 = 7$ Ом.

$P - ?$

Мощность в цепи можно определить по закону Джоуля–Ленца:

$$P = I^2 R,$$

где I – ток;

R – активное сопротивление цепи.

Общее активное сопротивление цепи при последовательном соединении двух резисторов будет $R = R_1 + R_2 = 4 + 7 = 11$ Ом. Тогда согласно закону Ома $I = \frac{U}{R} = \frac{110}{11} = 10\,\text{А}$.

$P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{11} = 1100\,\text{Вт}$. Если в формулу закона Джоуля–Ленца подставить выражение тока, определенное выше, то мощность можно найти и по формуле:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{11} = 1100\,\text{Вт}.$$

Ответ: 1100 Вт.

Задача 3. Дано: $R = 4$ Ом; $X_C = 3$ Ом; $U = 25$ В.

$I - ?$

Подобные задачи можно решать в комплексной форме.

Определим комплексное сопротивление цепи:

$\underline{Z} = R - jX_C = 4 - j3$ Ом.

Полное сопротивление цепи найдем из треугольника сопротивлений (рис. 3):

$$Z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Ом}.$$

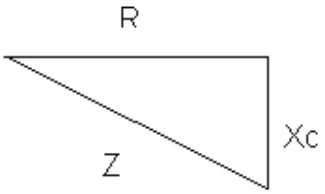


Рис. 3. Прямоугольный треугольник сопротивлений

Согласно закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{25}{5} = 5 \text{ А}.$$

Ответ: 5 А.

Задача 4. Дано: $i = 28{,}2\sin(314t + \pi)$ А.

$f - ?$

Угловая частота $\omega = 2\pi f$. Согласно условию $\omega = 314$ с$^{-1}$. Тогда

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{6{,}28} = 50 \text{ Гц}.$$

Ответ: 50 Гц.

Задача 5. Дано: $E_1 = 100$ В; $E_2 = 120$ В; $R_1 = 3$ Ом; $R_2 = 2$ Ом.

$U_{ab} - ?$

Для цепи на рисунке 1 из выражения, составленного по второму закону Кирхгофа $E_2 - E_1 = I(R_1 + R_2)$ – находим $I = \frac{20}{5} = 4$ А. Для кон-

тура, проходящего по участкам E_2, R_2 и U_{ab}, также по второму закону Кирхгофа записываем: $U_{ab} + IR_2 = E_2$. Следовательно, $U_{ab} = E_2 - IR_2 = 120 - 2 \cdot 4 = 112$ В.

Ответ: 112 В.

Задача 6. Дано: $I_ф = \sqrt{3}$ А.

$I_л - ?$

В симметричном приемнике, соединенном по схеме «треугольник», линейный ток в $\sqrt{3}$ раз больше фазного. Следовательно, линейный ток будет $I_л = \sqrt{3} I_ф = \sqrt{3}\sqrt{3} = 3$ А.

Ответ: 3А.

Задача 7. Дано: $U = 100$В; $I = 5$А; $P = 300$ Вт.

$X_э - ?$

Определим полное сопротивление цепи:

$$Z_э = \frac{U}{I} = \frac{100}{5} = 20 \text{ Ом}.$$

Согласно закону Джоуля-Ленца $P = I^2 R_э$. Откуда $R_э = \frac{P}{I^2} = \frac{300}{25} = 12$ Ом. Из треугольника сопротивлений найдем $X_э = \sqrt{Z_э^2 - R_э^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$ Ом.

Ответ: 16 Ом.

Задача 8. Дано: $C_0 = 10$ пФ; $\varepsilon_{r\,пар} = 2$.

$C - ?$

Емкость конденсатора определяется по формуле:

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Так как для воздуха $\varepsilon_r = 1$, размеры пластин конденсатора и расстояние между ними не изменились, то емкость конденсатора увеличилась на величину относительной диэлектрической проницаемости, т. е. в 2 раза. Следовательно, $C = 2 \cdot 10 \cdot 10^{-12} = 20$ пФ.

Ответ: 20 пФ.

Задача 9. Дано: $I = 2$ А; $l = 0{,}5$ м; $F = 1$ Н; $\alpha = 90°$.

$B - ?$

Сила, действующая на проводник с током, находящийся в магнитном поле, определяется по закону Ампера: $F = IBl\sin\alpha$.

Откуда $B = \dfrac{F}{Il\sin\alpha} = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 1} = 1$ Тл.

Ответ: 1Тл.

Задача 10. Дано: $U = 220$ В; $R_1 = 20$ Ом; $R_2 = 30$ Ом; $C = 100$ мкФ.

$U_C - ?$

После коммутации установившийся режим в цепи наступит тогда, когда конденсатор зарядится до напряжения $U_C = U_2 = U - U_1$, где U_1 – падение напряжения на R_1. Известно, что для постоянного тока конденсатор имеет бесконечно большое сопротивление (равнозначно разрыву в цепи). Следовательно, мы имеем в таком случае цепь, состоящую из последовательно соединенных сопротивлений R_1, R_2. Найдем ток в цепи при установившемся режиме.

$I = \dfrac{U}{R_1 + R_2} = \dfrac{220}{20 + 30} = 4{,}4$ А, тогда $U_1 = IR_1 = 4{,}4 \times 20 = 88$ В.

Следовательно,

$$U_C = U_2 = 220 - 88 = 132 \text{ В}.$$

Ответ: 132 В.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

ЗАДАНИЕ № 1

1. В электрической цепи смешанное соединение. На неразветвленном участке соединены последовательно три резистора по 5 Ом каждый, а в разветвленной части параллельно соединены 2 резистора по 10 Ом. Определите эквивалентное сопротивление цепи и эквивалентную проводимость.

2. Мгновенное значение тока задано уравнением:

$$i = 10\sqrt{2}\sin(314t + \frac{\pi}{3}),\ \text{А}.$$

Определите частоту тока f (Гц), период, T (с), угловую частоту, амплитудное и действующее значения тока, начальную фазу тока.

3. Симметричный трехфазный приемник и генератор соединены по схеме «треугольник». Фазный ток приемника $I_\phi = \sqrt{3}$ А, а линейное напряжение – $U_\text{л} = 220$ В. Чему равны линейный ток приемника и его фазное напряжение? Аналогичная задача может быть задана для соединения приемника и генератора по схеме «звезда».

4. Определите мощность (Вт), потребляемую двумя последовательно соединенными резисторами с сопротивлением $R_1 = 4$ Ом и $R_2 = 7$ Ом и подключенными к источнику постоянного напряжения с U = 110 В.

5. Определите ток через резистор R_4, если известно:
$E = 120$ В, $R_1 = 10$ Ом,
$R_2 = 4$ Ом, $R_3 = R_4 = 12$ Ом.

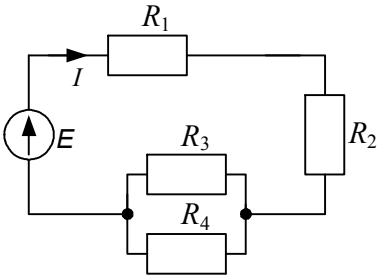


Рис. 1. Схема электрической цепи с одним источником ЭДС

6. Определите действующее значение тока в цепи (А) с последовательно соединенным резистором R = 4 Ом и конденсатором, реактивное сопротивление которого X_C = 3 Ом. К электрической цепи приложено синусоидальное напряжение U = 25 В.

7. К электрической цепи, приведенной на рисунке 2, приложено несинусоидальное напряжение. На конденсаторе напряжение $u_1 = 100 + 282\sin\omega t$. При этом $R = 30\,\text{Ом},\ X_L = 80\,\text{Ом},\ X_C = 100\,\text{Ом}.$ Определите действующее значение тока I_1 (в неразветвленной части схемы).

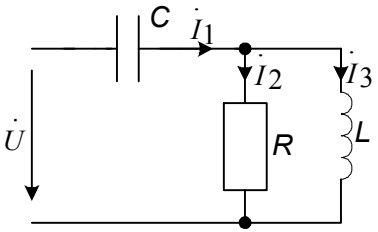


Рис. 2. Схема электрической цепи с несинусоидальным источником питания

8. Плоский воздушный конденсатор находится под напряжением 20 кВ. Расстояние между обкладками конденсатора равно 2 см. Определите запас электрической прочности конденсатора, если электрическая прочность воздуха 30 кВ/см.

9. Прямолинейный проводник длиной 0,5 м с током 2 А расположен в однородном магнитном поле под углом 90° к линиям магнитной индукции. Определите магнитную индукцию B (Тл) поля, если оно действует на проводник с силой 1 Н.

10. В электрической цепи (см. рис. 3) заданы: R_1 = 10 Ом, R_2 = 40 Ом, C = 100 мкФ. Какое напряжение установится на конденсаторе при подключении к источнику постоянного напряжения с $U = 200$ В?

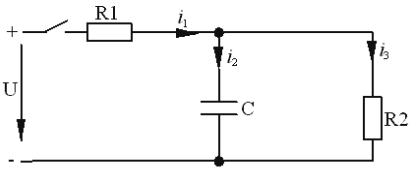


Рис. 3. Схема электрической цепи до коммутации

ЗАДАНИЕ № 2

1. В электрической цепи (рис.1) $U = 100$ В; $I = 5$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 6$ Ом. Определите $R_{экв}$.

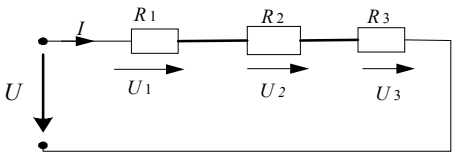


Рис. 1. Схема цепи с последовательным соединением резисторов

2. Чему равен угол сдвига фаз (в градусах) между напряжением и током в цепи синусоидального тока с емкостным элементом?

3. Трехфазные симметричный приемник и генератор соединены по схеме «звезда» без нейтрального провода. Линейное напряжение $U_л = 220$ В. Произошел обрыв одной фазы приемника. Чему равно напряжение на остальных фазах приемника?

4. В электрической цепи синусоидального тока смешанное соединение элементов. На входе и параллельном участке напряжения соответственно $\dot{U} = 160 + j130$ В и $\dot{U}_2 = 80 + j70$ В. Определить действующее значение напряжения на неразветвленном участке.

5. Амперметры PA_1 и PA_2 (рис. 2) показывают токи соответственно 2,4 и 1,6 мА. Определите сопротивление R_5, если $R_1 = R_2 = 5$ кОм; $R_3 = 1{,}5$ кОм; $R_4 = 2$ кОм. Ответ запишите в килоомах.

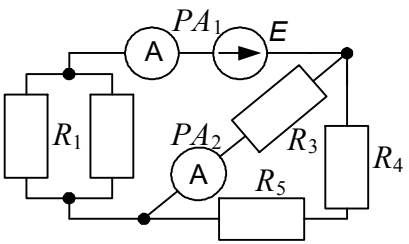


Рис. 2. Схема электрической цепи с одним источником ЭДС

6. К полюсам источника с ЭДС $E = 16$ В присоединили резистор сопротивлением $R = 7$ Ом. Определите внутреннее сопротивление источника, если сила тока в цепи $I = 2$ А.

7. В электрической цепи синусоидального тока с напряжением на входе $u = \sqrt{2} \times 100\sin 314t$ В последовательно включены резистор сопротивлением $R = 30$ Ом и катушка индуктивностью $L = 127{,}4$ мГн. Определите действующее значение напряжения на катушке.

8. Определите напряжение U и токи I_1, I_2 в электрической цепи (см. рис. 3), если:

$$I = 0,8 \text{ А}, \quad R = 20 \text{ Ом}.$$

Вольт-амперная характеристика нелинейного элемента задана (см. табл.)

Таблица

I_2, А	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
U, В	0	2	4	7	12	20	30

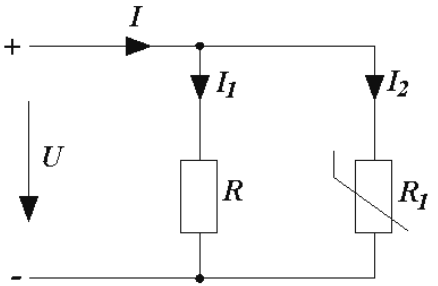


Рис. 3. Схема нелинейной электрической цепи постоянного тока

9. Магнитный поток Ф, пронизывающий катушку с числом витков $N = 15$, за время $t = 0,01$ с изменялся с постоянной скоростью от 0 до $0,1$ Вб. Определите модуль ЭДС, наведенной в катушке.

10. Катушка с активным сопротивлением $R = 10$ Ом и индуктивностью $L = 0,1$ Гн включается на постоянное напряжение $U = 100$ В. Какое количество энергии накопится в магнитном поле катушки за время переходного процесса?

ЗАДАНИЕ № 3

1. Какой эквивалентной емкостью (мкФ) обладают два конденсатора, соединенные последовательно, если $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 30$ мкФ?

2. Изменяющийся во времени ток имеет период $T = 0{,}02$ с. Определите угловую частоту. Примите $\pi = 3{,}14$.

3. В трехфазной цепи при соединении фаз генератора треугольником фазное напряжение равно 660 В. Чему равно при этом линейное напряжение?

4. На входе двухполюсника приложено синусоидальное напряжение, действующее значение которого $U = 100$ В, комплекс тока $\dot{I} = 6 - j8$ А. Определить эквивалентное реактивное сопротивление цепи $X_{\text{экв}}$.

5. В электрической цепи (рис. 1) определите ток через резистор R_3, если известно, что $E_1 = 40$ В, $E_2 = 30$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 6$ Ом.

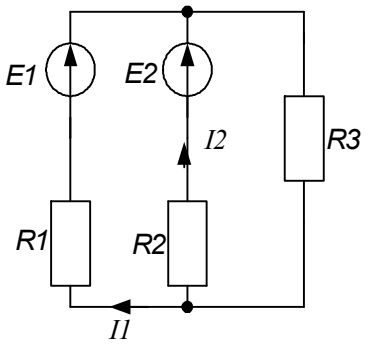


Рис. 1. Схема сложной электрической цепи

6. Три последовательно соединенных резистора с сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, подключены к источнику ЭДС. Напряжение на втором резисторе $U_2 = 10$ В. Определите ЭДС источника. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

7. К электрической цепи приложено синусоидальное напряжение $u = \sqrt{2} \times 25\sin 314t$, В. Определите действующее значение тока в цепи с последовательно соединенным резистором $R = 4$ Ом и конденсатором, реактивное сопротивление которого $X_C = 3$ Ом.

8. К электрической цепи, приведенной на рис. 2, приложено несинусоидальное напряжение. На конденсаторе напряжение $u_1 = 100 + 282\sin\omega t$. При этом $R = 30$ Ом, $X_L = 80$ Ом, $X_C = 100$ Ом. Определите действующее значение тока I_1 (в неразветвленной части схемы).

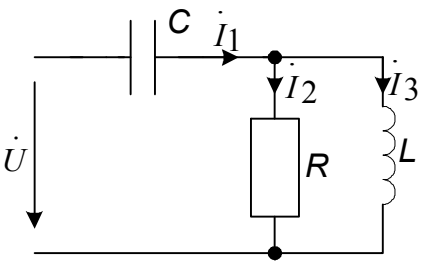


Рис. 2. Схема электрической цепи с несинусоидальным источником питания

9. Определите магнитную индукцию B, если в равномерном магнитном поле контур площадью S = 10 см^2, расположенный перпендикулярно линиям магнитной индукции, пронизывает магнитный поток Ф = 10 × 10^{-4} Вб.

10. В электрической цепи (рис. 3) определите установившееся значение напряжения на сопротивлении R_1 после коммутации, если $U = 100$ В, R_1 = 20 Ом, R_2 = 30 Ом, $L = 1$ Гн.

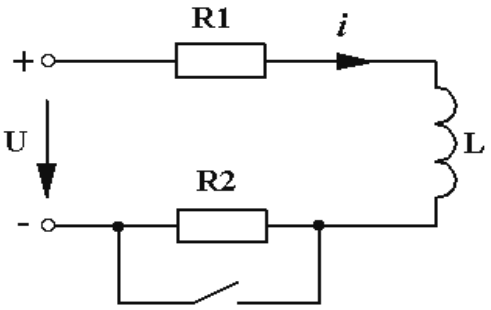


Рис. 3. Схема электрической цепи до переходного процесса

ЗАДАНИЕ № 4

1. В цепи постоянного тока последовательно соединены три резистора с сопротивлениями R_1 = 5 Ом, R_2 = 2 Ом, R_3 = 3 Ом. Через резистор R_2 протекает ток 2 А. Какой ток протекает через резистор R_1?

2. Начальная фаза синусоидального напряжения равна 0 градусов, а начальная фаза синусоидального тока равна -30°. Определите угол сдвига фаз.

3. Трехфазные генератор и приемник соединены по схеме «треугольник». Линейное напряжение генератора равно 220 В. Чему равно фазное напряжение приемника?

4. В электрической цепи смешанное соединение. На последовательном и параллельных участках напряжения соответственно $\dot{U}_1 = 50 + j40$ В и $\dot{U}_2 = 150 + j110$ В. Определить действующее значение приложенного к цепи напряжения.

5. Определите ток через источник ЭДС в цепи на рисунке 1, если E = 42 В, $R_1 = R_2$ = 2 Ом, R_3 = 3 Ом, R_4 = 1 Ом, R_5 = 2 Ом, R_6 = 3 Ом.

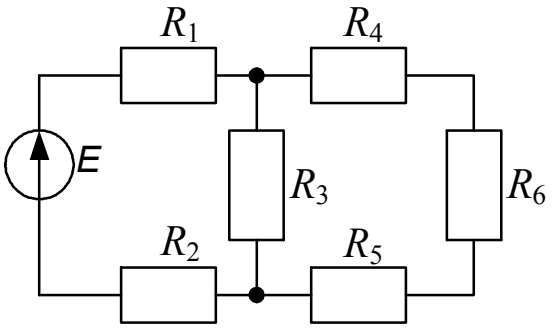


Рис. 1. Схема электрической цепи с одним источником ЭДС

6. Определите мощность, потребляемую двумя последовательно соединенными резисторами с сопротивлением R_1 = 7 Ом и R_2 = 4 Ом, если они подключены к источнику постоянного напряжения с U = 110 В.

7. К электрической цепи на рисунке 2 приложено напряжение U = 25 В. Сопротивление линейного резистора R = 30 Ом. ВАХ нелинейного резистора задано таблицей.

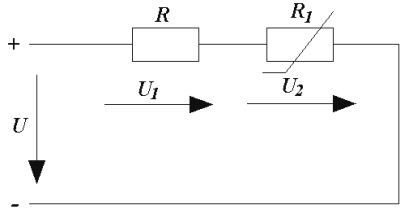


Рис. 2. Схема нелинейной цепи постоянного тока

Таблица

I, А	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
U_2, В	0	10	15	20	23	27	30

Постройте вольт-амперную характеристику всей цепи $I(U)$. Определите ток I, напряжения U_1, U_2.

8. Три одинаковых приемника с сопротивлением по 30 Ом соединены треугольником и включены в сеть трехфазного тока с линейным напряжением 380 В. При каких сопротивлениях приемников, соединенных звездой, линейные токи останутся прежними?

9. Напряженность электрического поля на расстоянии 20 см от центра заряженного шара составляет 20 кВ/м. Радиус шара – 4 см. Определите напряженность поля (кВ/м) на расстоянии 8 см от центра шара.

10. В электрической цепи на рисунке 3 определите напряжение на конденсаторе в момент коммутации, если U = 400 В, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $C = 318$ мкФ.

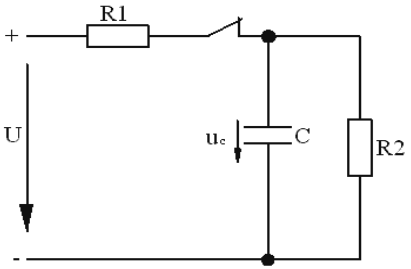


Рис. 3. Схема электрической цепи до переходного процесса

ЗАДАНИЕ № 5

1. В электрической цепи (рис. 1) $U = 100$ В; $I = 5$ А; $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 6$ Ом. Определите U_1.

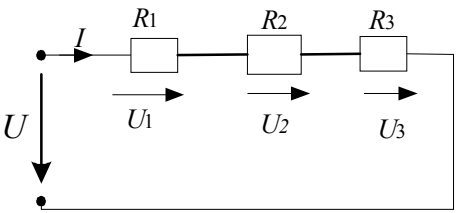


Рис. 1. Схема цепи с последовательным соединением резисторов

2. Начальная фаза синусоидального напряжения равна 0 градусов, а начальная фаза синусоидального тока равна 33°. Определите угол сдвига фаз.

3. Какое соотношение линейного и фазного токов в приемнике, соединенном звездой?

4. Определите эквивалентное полное сопротивление параллельно соединенных двух элементов, если комплексное сопротивление каждого из них $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 80 + j60$.

5. Два источника с ЭДС $E_1 = 16$ В и $E_2 = 24$ В соединены разноименными полюсами. Внутренние сопротивления источников ЭДС соответственно $R_{вт1} = 2,5$ Ом, $R_{вт2} = 1,5$ Ом. Определите силу тока в цепи.

6. Определите добавочное сопротивление для подключения лампы накаливания мощностью $P = 36$ Вт, напряжением $U = 12$ В к источнику с ЭДС $E = 36$ В.

7. Определите действующее значение тока в цепи синусоидального напряжения с последовательно соединенным резистором R= 8 Ом, катушкой индуктивности и конденсатором, реактивные сопротивления которых $X_L = 13$ Ом, $X_C = 7$ Ом. На входе электрической цепи действующее значение напряжения $U = 160$ В.

8. К электрической цепи, приведенной на рисунке 2, приложено несинусоидальное напряжение $u = 60 + 141\sin\omega t$. При этом $R = 60$ Ом, $X_L = 80$ Ом. Определите показание амперметра.

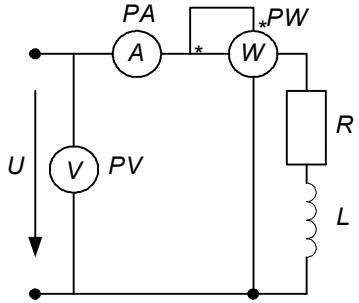


Рис. 2. Схема электрической цепи с несинусоидальным источником питания

9. Скорость нарастания напряжения на конденсаторе составила 1000 кВ/с. Определите ток (А) через конденсатор, если его емкость $C = 1$ мкФ.

10. В цепи на рисунке 3 определите установившееся значение тока в ветви с индуктивностью после коммутации, если U = 120 В, R_1 = 10 Ом, R_2 = 20 Ом, L = 10 мГн.

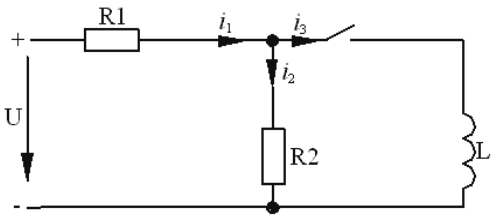


Рис. 3. Схема электрической цепи до переходного процесса

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутов, А. В. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие / А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова. – 2-е изд., стер. – Минск : РИПО, 2016. – 375 с.

2. Лоторейчук, Е. А. Теоретические основы электротехники / Е. А. Лоторейчук. – М. : НД «Форум»: ИНФРА-М, 2008. – 320 с.

3. Евдокимов, Ф. Е. Теоретические основы электротехники / Ф. Е. Евдокимов. – М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 560 с.

4. Теоретические основы электротехники. В 3-х ч. Часть 1: учебно-методический комплекс для студентов вузов, обучающихся по специальностям 1-74 06 05 01 Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика) и 1-53 01 01 09 Автоматизация технологических процессов и производств (сельское хозяйство) / БГАТУ, кафедра электротехники [сост. : А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова]. – Минск, 2008. – 353 с.

5. Теоретические основы электротехники. В 3-х ч. Часть 2: учебно-методический комплекс для студентов вузов, обучающихся по специальностям 1-74 06 05 01 Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика) и 1-53 01 01 09 Автоматизация технологических процессов и производств (сельское хозяйство) / БГАТУ, кафедра электротехники [сост. : А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, Т. Ф. Гузанова]. – Минск, 2010. – 276 с.

6. Теоретические основы электротехники. В 3-х ч. Часть 3: учебно-методический комплекс для студентов вузов, обучающихся по специальностям 1-74 06 05 01 Энергетическое обеспечение сельского хозяйства (электроэнергетика) и 1-53 01 01 09 Автоматизация технологических процессов и производств (сельское хозяйство) / БГАТУ, кафедра электротехники [сост. : А. В. Крутов, Э. Л. Кочетова, В. С. Корко, Т. Ф. Гузанова]. – Минск, 2011. – 324 с.

7. Батура, М. П. Теория электрических цепей [текст] : учебник для студентов электротехнических специальностей вузов / М. П. Батура, А. П. Кузнецов, А. П. Курулев ; под общ. ред. А. П. Курулева. – 2-е изд., испр. – Минск : Выш. школа, 2007. – 608 с.

8. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [текст] : учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Электротехника, электромеханика и электротехнологии», «Электроэнергетика», «Приборостроение» / Л. А. Бессонов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М. : Гардарики, 2007. – 704 с.

9. Прянишников, В. А. Теоретические основы электротехники [текст] : курс лекций : учебное пособие для студентов вузов и ссузов / В. А. Прянишников. – СПб. : КОРОНА принт, 2011. – 366 с.

10. Башарин, С. А. Теоретические основы электротехники. Теория электрических цепей и электромагнитного поля [текст] : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» / С. А. Башарин, В. В. Федоров. – 3-е изд., испр. – М. : Академия, 2008. – 304 с.

11. Баскаков, С. И. Лекции по теории цепей [текст] : [учеб. пособие] / С. И. Баскаков. – 5-е изд. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 277 с

12. Коровкин, Н. В. Теоретические основы электротехники : сборник задач / Н. В. Коровкин, Е. Е. Селина, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004. – 512 с.

13. Данилов, И. А. Общая электротехника : учеб. пособие для бакалавров ; учеб. пособие для учащихся неэлектротехнических специальностей вузов и техникумов / И. А. Данилов. – М. : Юрайт, 2014. – 674 с.

14. Сборник задач по электротехнике и электронике [текст] : учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по инженерно-техническим специальностям / Ю. В. Бладыко [и др.]; под общ. ред. Ю. В. Бладыко. – Минск : Выш. школа, 2012. – 478 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Единицы электрических и магнитных величин

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Электрическое сопротивление	$R = \frac{U}{I}$	Ом	*Ом* равен сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А
Электрическая проводимость	$G = \frac{1}{R}$	См	*Сименс* равен проводимости участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = \frac{RS}{l}$	Ом·м	*Ом·метр* равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом
Удельная электрическая проводимость	$\gamma = \frac{1}{\rho}$	$\frac{\text{См}}{\text{м}}$	*Сименс на метр* равен удельной электрической проводимости проводника, который при площади поперечного сечения 1 м^2 и длине 1 м, имеет электрическую проводимость 1 См

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Электрический заряд (количество электричества)	$Q = It$	Кл	*Кулон* равен электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника при величине постоянного тока 1 А за время 1 с
Объемная плотность электрического заряда	$\rho = \frac{Q}{V}$	Кл/м^3	*Кулон на кубический метр* равен объемной плотности электрического заряда, при которой в объеме 1 м^3 равномерно распределен заряд 1 Кл
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{Q}{S}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд в 1 Кл равномерно распределен на поверхности площадью 1 м^2
Линейная плотность электрического заряда	$\tau = \frac{Q}{l}$	Кл/м	*Кулон на метр* равен линейной плотности электрического заряда, при которой заряд в 1 Кл равномерно распределен на нити длиной 1 м

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Напряженность электрического поля	$E = \frac{F}{Q}$	$\frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$	*Ньютон на кулон* равен напряженности электрического поля в точке поля, в которой на точечный электрический заряд 1 Кл поле действует с силой 1 Н. *Вольт на метр* равен напряженности однородного электрического поля, создаваемого разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м на линии напряженности поля
Электрический потенциал	$\varphi = \frac{\text{А}}{Q_0}$	В 1 В = =1Дж/Кл	*Вольт равен* потенциалу такой точки поля, в которой заряд 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Плотность электрического тока	$j = \frac{I}{S}$	А/м^2	*Ампер на квадратный метр* равен плотности электрического тока, при которой ток 1 А равномерно распределен по поперечному сечению проводника площадью 1 м^2
Электрическая емкость	$C = \frac{Q}{\varphi}$	Ф	*Фарад* равен электрической емкости такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл
Электрическое смещение	D	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен электрическому смещению, при котором поток электрического смещения сквозь поперечное сечение площадью 1 м^2 равен 1 Кл
Поток электрического смещения	$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} Q_i$	Кл	*Кулон* равен потоку электрического смещения, связанному с суммарным свободным зарядом 1 Кл

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Электрический момент диполя	$p = \|Q\| l$	Кл·м	*Кулон-метр* равен электрическому моменту диполя, заряды которого равные каждый 1 Кл, расположены на расстоянии 1 м один от другого
Поляризованность	$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V}$	Кл/м^2	*Кулон на квадратный метр* равен поляризованности диэлектрика, при которой диэлектрик объемом 1 м^3 имеет электрический момент 1 Кл·м
Магнитная индукция	$B = \frac{F}{Il}$	Тл 1 Тл = $\frac{1\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}$	*Тесла* равна магнитной индукции такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А

Наименование величины	*Единица*		
	определяющее уравнение	*обозначение*	*наименование и определение*
Магнитный Поток	$\Phi = BS$	Вб 1 Вб = 1Тл·м^2	*Вебер* равен магнитному потоку, проходящему сквозь плоскую поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно направлению однородного магнитного поля, индукция которого равна 1 Тл
Напряженность магнитного поля	$H = \frac{B}{\mu_0}$	А/м	*Ампер на метр* равен напряженности такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл
Магнитный момент контура с током	$p = IS$	А·м^2	*Ампер·квадратный метр* равен моменту контура площадью 1 м^2, если по нему течет ток 1 А
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	Гн 1 Гн = 1 Вб/А	*Генри* равен индуктивности такого контура, магнитный поток которого при токе 1 А составляет 1 Вб
Намагниченность	$M = \frac{\sum p_a}{V}$	А/м	*Ампер на метр* равен намагниченности, при которой вещество объемом 1 м^3 имеет магнитный момент 1 А·м^2

Приложение Б

Десятичные приставки к названиям единиц

Т – тера (10^{12})	д – деци (10^{-1})	н – нано (10^{-9})
Г – гига (10^{9})	с – санти (10^{-2})	п – пико (10^{-12})
М – мега (10^{6})	м – милли (10^{-3})	ф – фемто (10^{-15})
К – кило (10^{3})	мк – микро (10^{-6})	а – атто (10^{-18})

Приложение В

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Умножение многочленов:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

2. Действия с дробями:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}.$$

3. Пропорция:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\qquad ad=bc;\qquad a=\frac{bc}{d};\qquad c=\frac{da}{b}.$$

4. Действия со степенями и корнями:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n};\quad (a^m)^n=a^{m\cdot n};\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}};$$

$$a^1 = a; \qquad a^0 = 1; \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

5. Действия с нулем и бесконечностью:

$$a \cdot 0 = 0; \qquad \frac{a}{0} = \infty; \qquad \frac{a}{\infty} = 0; \qquad a \cdot \infty = \infty.$$

6. Неопределенности:

$$\frac{0}{0}; \qquad \frac{\infty}{\infty}; \qquad 0 \cdot \infty; \qquad 0^0; \qquad \infty^0; \qquad 1^\infty.$$

7. Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора

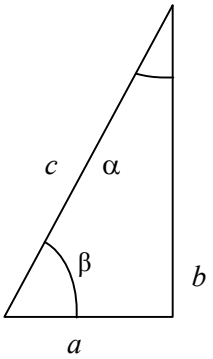


Рис. 22

$$c^2 = a^2 + b^2; \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$a = c \cdot \cos\beta; \qquad a = c \cdot \sin\alpha; \qquad a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha;$$

$$b = c \cdot \cos\alpha; \qquad b = c \cdot \sin\beta; \qquad b = a \cdot \operatorname{tg}\beta;$$

8. Формулы тригонометрии:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 .$$

9. Раскрытие определителя третьего порядка:

а) по элементам строки или столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

б) приписыванием двух первых столбцов справа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексное число, соответствующее точке, в которой лежит конец вектора $\dot{A}$ (рис. 23), может быть записано в следующих формах:

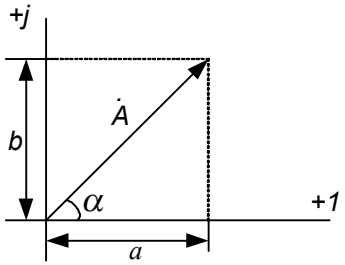


Рис. 23

$\dot{A} = a + jb$ – алгебраической;

$\dot{A} = A(\cos\alpha + j\sin\alpha)$ – тригонометрической;

$\dot{A} = A \cdot e^{j\alpha}$ – показательной;

$\dot{A} = A\angle\alpha$ – полярной.

Здесь $a = A\cos\alpha$ – действительная часть комплексного числа, А;

$jb = jA\sin\alpha$ – мнимая часть комплексного числа;

$j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица;

$A = |\dot{A}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа;

$\alpha = \text{arctg}\dfrac{b}{a}$ – угол (или аргумент) комплексного числа.

Комплексное число $\dot{A} = a - jb = A \cdot e^{-j\alpha}$ называется сопряженным комплексному числу $\dot{A} = a + jb = A \cdot e^{j\alpha}$. Произведение комплексно-сопряженных чисел – число вещественное, равное квадрату их модуля:

$$\dot{A} \cdot \dot{A} = A \cdot e^{j\alpha} \cdot A \cdot e^{-j\alpha} = A^2 .$$

$e^{j\varphi}$ – оператор поворота на угол φ.

Умножение комплексного числа $\dot{A}$ на число $e^{j\varphi}$ сводится к повороту вектора $\dot{A}$ в комплексной плоскости на угол φ:

$$\dot{A} \cdot e^{j\varphi} = A \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\varphi} = A \cdot e^{j(\alpha + \varphi)}.$$

φ > 0 – поворот против часовой стрелки.
φ < 0 – поворот по часовой стрелке.

Действия над комплексными числами

Вычисления над комплексными числами производятся так же, как и над обыкновенными двучленами, полагая $j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1.$

При делении одного комплексного числа на другое, записанных в алгебраической форме, уничтожают мнимость в знаменателе, для чего умножают числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac - jad + jbc + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Возведение в степень: $\dot{A}^n = (A \cdot e^{j\alpha})^n = A^n \cdot e^{jn\alpha}.$

Извлечение корня: $\sqrt[n]{\dot{A}} = \sqrt[n]{A \cdot e^{j\alpha}} = \sqrt[n]{A} \cdot e^{j\frac{\alpha + 2k\pi}{n}},$
где k – целое число.

Основные законы электротехники

Закон Ома	$i = \frac{u}{R}$
Первый закон Кирхгофа	$\sum i = 0$
Второй закон Кирхгофа	$\sum e = \sum u$
Закон Джоуля-Ленца	$p = i^2 R$
Закон электромагнитной индукции	$e = -\frac{d\Phi}{dt}$
Закон Кулона	$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_0}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$
Закон полного тока	$\oint \vec{H} d\vec{\ell} = \Sigma i$

Основные формулы и уравнения электротехники

Мощность мгновенная	$p = ui$
Энергия	$W = \int uidt$
Энергия магнитного поля катушки	$W_{\text{маг}} = \frac{Li^2}{2}$
Энергия электрического поля конденсатора	$W_{\text{эл}} = \frac{Cu^2}{2}$
Теорема Гаусса	$\oint \vec{D} d\vec{S} = \Sigma q_{\text{св}}$
Первое уравнение Максвелла	$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \boldsymbol{\varepsilon}_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Второе уравнение Максвелла	$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Теорема Умова-Пойнтинга	$-\oint \vec{\Pi} d\vec{S} = \int_V \gamma E^2 dv + \frac{\partial W_{\text{эм}}}{\partial t}$

Соотношения между током и напряжением на элементах электрической цепи

Элемент цепи	Вид тока			
	Переменный ток, мгновенное значение	Синусоидальный ток, комплексное значение	Синусоидальный ток, действующее значение	Постоянный ток
R	$u = iR$ $i = \frac{u}{R}$	$\dot{U} = \dot{I}\,R$ $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$	$U = IR$ $I = \frac{U}{R}$	$U = IR$ $I = \frac{U}{R}$
L	$u_L = L\frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L}\int u_L dt$	$\dot{U} = j\omega L\,\dot{I}$ $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{j\omega L}$	$U = \omega LI$ $I = \frac{U}{\omega L}$	Индуктивность не оказывает сопротивления постоянному току
C	$u_C = \frac{1}{C}\int idt$ $i = C\frac{du_C}{dt}$	$\dot{U} = -\,j\,\frac{1}{\omega C}\,\dot{I}$ $\dot{I} = j\omega C\dot{U}$	$U = \frac{1}{\omega C}I$ $I = \omega CU$	Емкость представляет собой разрыв цепи для постоянного тока

Закон Ома
в комплексной форме для цепи синусоидального тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)}.$$

Методика использования инженерного калькулятора для выполнения расчетов с комплексными числами

Подготовка: включение калькулятора – ON/C. Клавишей DRG устанавливают угловую единицу DEG (градусы). Вход в программу расчета: клавиши 2ndF и $\leftrightarrow$ (cplx)

Примеры вычислений

Деление комплексного числа на комплексное число:

Пример 1

$$\frac{40-j10}{5-j5}=5+j3.$$

Порядок действий: $40\boxed{a}10\boxed{+/-}\boxed{b}\div5\boxed{a}5\boxed{+/-}\boxed{b}=\boxed{a}\boxed{b}$ – просмотр результата.

Клавиша $\boxed{a}$ дает величину вещественной части. Клавиша $\boxed{b}$ – величину мнимой части комплексного числа.

Пример 2

$$\frac{40-j10}{j4}=-2{,}5-j10.$$

Порядок действий: $40\boxed{a}10\boxed{+/-}\boxed{b}\div4\boxed{b}=\boxed{a}\boxed{b}$ – просмотр результата.

Умножение, сложение и вычитание производят аналогично.

Переход от алгебраической формы комплексного числа к показательной:

Пример:

$$-110-j190=220e^{-j120^{\circ}}.$$

Порядок действий: $110\boxed{+/-}\boxed{a}190\boxed{+/-}\boxed{b}2\text{ndF}\boxed{a}$.

Просмотр результата: клавиша $\boxed{a}$ дает модуль комплексного числа, клавиша $\boxed{b}$ – аргумент в градусах.

Переход от показательной формы комплексного числа к алгебраической:

Пример:

$$220e^{j120^{\circ}}=-110+j190.$$

Порядок действий: $220\boxed{a}120\boxed{b}\ 2\text{ndF}\boxed{b}$.

Просмотр результата: клавиши $\boxed{a}$ и $\boxed{b}$.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Пособие

Составители:
Крутов Анатолий Викторович,
Гузанова Татьяна Федоровна

Ответственный за выпуск *В. А. Ковалев*
Редактор *Г. В. Анисимова*
Корректор *Г. В. Анисимова*
Компьютерная верстка *Д. А. Пекарского*

Подписано в печать 05.04.2019 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,52. Уч.-изд. л.4,36. Тираж 400 экз. Заказ 130.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный аграрный технический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий
ЛИ № 1/359 от 09.06.2014.
ЛП № 2/151 от 11.06.2014.
Пр-т Независимости, 99-2, 220023, Минск.